# TRATADO

DE LAS

# CURVAS ESPECIALES NOTABLES

# TRATADO

DE LAS

# CURVAS ESPECIALES NOTABLES

POR

F. GOMES TEIXEIRA

PROFESOR EN LA ACADEMIA POLITÉCNICA DE OPORTO,
ANTIGUO PROFESOR
EN LA UNIVERSIDAD DE COIMBRA, ETC.

Memoria premiada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, y publicada por la misma Academia.

MADRID
IMPRENTA DE LA "GACETA DE MADRID,,
Calle de Pontejos, núm. 8.
1905.

Obra publicada en el tomo **XXII** de las **Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.**

QA567
T45

MATH. DEPT.

BOSTON COLLEGE LIBRARY
CHESTNUT HILL, MASS.

228882

# INTRODUCCION

Lema: «L'Algèbre n'est qu'une »Géométrie écrite, la Géométrie est »une Algèbre figurée». — *Sophie Germain.*

Versa esta Memoria sobre el tema siguiente, que la Real Academia de Ciencias de Madrid propuso, por primera vez, en 1892, y reprodujo en 1895:

«*Catálogo ordenado de todas las curvas de cualquier clase que han recibido nombre especial, acompañado de una idea sucinta de la forma, ecuaciones y propiedades generales de cada una, con noticia de los libros ó autores que primeramente las han dado á conocer.*»

En el lapso de tiempo comprendido entre aquellas dos fechas, llamó HATON DE LA GOUPILLIERE, en el *Intermédiaire des mathématiciens* (tomo I, p. 37.), la atención de los matemáticos sobre las ventajas que ofrecería reunir en una obra especial el estudio de las curvas notables. Respondiendo á este llamamiento, sólo se publicó, sin embargo, una lista de nombres especiales dados á diversas curvas, por BROCARD, en el tomo IV de la Revista á que acabamos de referirnos (1).

(1) Después de redactado el presente trabajo se han publicado algunas obras, consagradas al mismo asunto. Así, á fines del año 1897, fecha en que fué presentada esta Memoria á la REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE MADRID, publicó BROCARD una obra titulada: *Notes de Bibliographie des courbes géométriques*, en la que este sabio geómetra da noticias breves, pero substanciales, de las curvas mencionadas en la lista á que en el texto aludimos. Posteriormente, en 1901, publicó BASSET un libro titulado: *An elementary Treatrise on cubic and quartic curves*, en el que se estudian sucintamente algunas curvas notables, y, con extensión, las cúbicas circulares y las cuárticas bicir-

En el trabajo que tenemos el honor de presentar á la Academia nos colocamos en punto de vista diferente del de este ilustre geómetra. Limitándonos, en efecto, al programa propuesto, consideramos las curvas á que se han dado nombres especiales, y no los nombres especiales que toman las curvas en determinadas circunstancias. Debemos, empero, observar que existen nombres que se pueden considerar en los dos sentidos indicados. Así, por ejemplo, la palabra *catenaria*, tomada en sentido general, representa cualquiera de las curvas que aparecen en la solución del problema del equilibrio del hilo flexible, cuyas condiciones pueden variar de una infinidad de modos; en sentido estricto, representa la curva correspondiente al hilo pesado de densidad constante en todos sus puntos, primitivamente estudiada por LEIBNITZ, JACOB BERNOULLI, JUAN BERNOULLI, etc. Esta última es la curva que designa aquella palabra, cuando no se dice explícitamente lo contrario, y así entra su estudio en el programa propuesto.

La colección de curvas con nombre especial que vamos á estudiar no es completa. Por falta de tiempo dejamos de considerar algunas de que tenemos noticia, y ciertamente existen, además, otras de que no tenemos, actualmente, conocimiento. Creemos, sin embargo, no haber dejado de considerar curva alguna de las que tienen importancia por su teoría, por sus aplicaciones ó por su historia. Si esta Memoria mereciera la alta aprobación de la Academia, al publicarla, se añadirán, ó en un suplemento ó en los lugares que les correspondan, algunas de las curvas que aquí faltan. Debemos observar, además, que no estudiamos las cónicas, por ser su teoría, tan conocida, objeto de todos los libros de Geometría analítica.

El orden en que haremos el estudio de las curvas comprendidas

---

culares. Finalmente, en 1902 ha publicado LORIA otra obra magistral, dedicada al estudio de las curvas planas notables, y titulada: *Spezielle algebraiche und transcendente ebene curven*, riquísima en informaciones históricas y bibliográficas.

en este trabajo es el determinado por las ecuaciones de aquéllas. Así, principiamos por las cúbicas, consagrando el capítulo I á las cúbicas circulares, y el II á las otras cúbicas á que se han dado nombres especiales. Estúdianse en los capítulos III y IV las cuárticas bicirculares, y en el V otras varias cuárticas. En el capítulo VI se consideran las curvas algébricas de grado superior al cuarto, que han recibido también nombres especiales.

Terminado lo relativo á las curvas algébricas, pasamos á considerar las transcendentes en los capítulos VII y VIII; éste último dedicado especialmente á las espirales, tomando esta palabra en su sentido geométrico.

En los capítulos IX, X y XI se estudian ecuaciones que, según un parámetro que en ellas entra, representan, unas veces, curvas algébricas, y otras, curvas trascendentes; tratando en el primero, de las parábolas é hipérbolas de cualquier orden, en el segundo, de las curvas cicloidales, y en el tercero, de varias clases de curvas no comprendidas en los grupos anteriores.

Pasando, después, á las curvas de doble curvatura, estudiamos las curvas esféricas en el capítulo XII; y otras varias que no lo son en el XIII.

El último capítulo está dedicado á las teorías de la pollodia y de la herpollodia de Poinsot.

Debemos advertir que algunas veces nos alejamos del punto de vista general que adoptamos para disponer las curvas. Así, la hipocicloide de tres retrocesos no va colocada junto á las otras cuárticas, ni las parábolas cúbicas han sido colocadas junto á las otras cúbicas, por no ser conveniente separar el estudio de estas curvas del estudio general de las clases á que pertenecen. Colócanse también en un capítulo especial la pollodia y la herpollodia de Poinsot, á pesar de que una de estas curvas es plana y la otra de doble curvatura, por no ser conveniente la separación de dos curvas, cuyas teorías están estrechamente relacionadas.

En el tema propuesto por la Academia se pide, respecto de cada curva, la indicación del nombre del geómetra que primero la consideró. Se ha hecho esta indicación en la mayor parte de las curvas estudiadas; y respecto de aquellas otras en que esto no ha sido posible, se citan, al menos, los trabajos más antiguos sobre las mismas de que se ha tenido noticia.

---

*P. S.* A lo que precede, escrito en el año 1897, debemos añadir hoy algunas palabras.

Advertiremos, en primer término, que al redactar esta obra hemos procurado hacerlo de un modo elemental. Muchas cuestiones podían haber sido tratadas con mayor concisión, por procedimientos especiales; pero nos ha parecido que obra de esta naturaleza, si ha de ser útil, debe ser accesible á todos los lectores que pretendan estudiar cualquiera de las curvas en ella consideradas, aunque estén desprovistos de conocimientos científicos profundos. Por esta razón hemos empleado siempre los métodos más generales y conocidos.

Añadiremos también, por creerlo un deber, la expresión de nuestro agradecimiento hacia persona que, por desgracia, ya no existe! Nos referimos al sabio Secretario de la Real Academia de Ciencias de Madrid, Sr. D. Miguel Merino.

Grande fué el servicio que nos prestó este hombre ilustre, cuyas altas cualidades de corazón é inteligencia tuvimos muchas ocasiones de apreciar. El dirigió con minucioso cuidado la publicación de esta obra; revisó escrupulosamente su texto castellano, traducido en un principio del portugués por persona que desconocía la ciencia matemática, y llevó su cooperación en ella hasta darnos en muchas ocasiones preciosos consejos, que contribuyeron eficazmente á mejorarla. Todo esto en lucha constante con dolorosa y cruel

enfermedad (1) que acabó por hacerle su víctima. El interés afectuoso que dedicaba á este trabajo lo expresó él mismo en repetidas ocasiones por modo elocuente, diciendo á sus amigos que «no quería morir sin terminar la publicación de esta obra, á la que amaba tanto como su mismo autor». Desgraciadamente, Dios no escuchó su ruego, y al consignar yo aquí mi agradecimiento por los valiosos servicios que me prestó, sólo puedo dirigirme á su inolvidable memoria, expresando, al mismo tiempo que mi acendrada gratitud, mi respetuosa y profunda veneración.

---

(1) La enfermedad del Sr. Merino fué la causa de que la impresión de esta Memoria, que comenzó en el año 1900 y marchó con regularidad durante los dos primeros años, se demorase después, y aun se suspendiera en varias ocasiones.

# CAPITULO PRIMERO

## CÚBICAS NOTABLES

### I

### LA CISOIDE

**1.** Consideremos una circunferencia de radio igual á $a$ (fig. 1); señalemos en ella un punto fijo $O$; y por la extremidad opuesta, $A$, del diámetro,

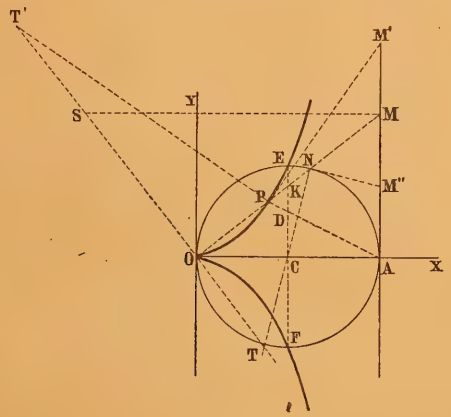



Figura 1.ª

que pasa por $O$, tracemos la recta $AM$, *tangente* á la misma circunferencia. Tracemos además otra recta cualquiera, $OM$, que pase por el punto $O$, y sobre ella tomemos el segmento $OP$, igual á $MN$. El lugar geométrico de las posiciones del punto $P$, cuando $OM$ varía, es la curva designada con el nombre de *Cisoide de* Diocles.

Por ser $OP = OM - ON$, representando por $\rho$ la longitud de $OP$ y por $\theta$ el ángulo $POC$, la *ecuación polar de la cisoide* será

$$\rho = \frac{2a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta = \frac{2a\,\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta};$$

de la cual se desprende, *en coordenadas cartesianas*, esta otra ecuación

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

2. Problema célebre en la historia de la Geometría, y en el cual con grande insistencia se ocuparon los antiguos geómetras, fué el de hallar dos *medias proporcionales* entre dos segmentos de recta dados: conocido también por el nombre de *problema de Delos*, y que comprende el *famoso de la Duplicación del Cubo*. Y entre los varios procedimientos inventados por los geómetras de la antigua Grecia para resolver este problema, existe uno, atribuído á Diocles por Eutocio *(Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii*, ed. Heiberg, Lipsiae, 1880-1881, t. III, págs. 78 y 152), el comentador de Arquímedes, en el cual empléase la curva que acabamos de definir, sin todavía atribuirla, por entonces, el nombre de *cisoide*. En las obras de Pappo y de Proclo desígnase con este mismo nombre una curva, que aquellos geómetras no caracterizan suficientemente para que pueda afirmarse con plena seguridad de acierto que se trata de la curva empleada por Diocles, del cual ni por incidencia se hace mención en las referidas obras.

Después del Renacimiento de las Ciencias Matemáticas estudiaron la curva de Diocles algunos geómetras célebres, entre los cuales figuran Sluse, que determinó el volumen de su sólido de revolución alrededor de la asíntota, y Huygens, que determinó sus áreas, en cartas que uno al otro se dirigieron en 1658; Wallis, que resolvió los mismos problemas por sus métodos analítico-geométricos, en un trabajo especial que consagró á esta curva *(Opera*, t. I, p. 542); Fermat, que resolvió también el problema de sus áreas *(Oeuvres*, t. III, p. 248), y el de sus tangentes *(Oeuvres*, t. III, p. 141); Newton, que determinó la longitud de sus arcos en su *Methodus fluxionum etc.*, y que propuso un procedimiento mecánico para trazarla *(Arithmetica universalis*, t. II, p. 83 de la traducción de Beaudeux, París, 1802); etc., etc.

3. La forma de la *cisoide* * se determina fácilmente por medio de una de sus ecuaciones anteriormente establecidas. Vese que la curva es (fig. 1) simétrica relativamente al eje de las abscisas, y tangente á este eje en el origen de las coordenadas, en donde posee un *punto de retroceso;* que se aleja indefinidamente del mismo eje, cuando $x$ crece desde 0 hasta $2a$; que corta en dos puntos las paralelas á $Oy$, comprendidas entre esta recta y la recta $AM$, cuya ecuación es $x = 2a$; que no corta á las demás paralelas á $Oy$; y que $AM$ es una asíntota de la curva. Y con igual facilidad se concluye también que la circunferencia, cuyo diámetro es $OA$, corta á la cisoide en dos puntos, $E$ y $F$, que se proyectan en su centro.

4. Por ser (fig. 1) $\rho = OM - ON$, tenemos

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d \cdot OM}{d\theta} - \frac{d \cdot ON}{d\theta}.$$

El primer miembro de esta igualdad representa la subnormal polar de la cisoide en el punto $P$; y los dos términos del segundo miembro representan, respectivamente, el primero la subnormal polar de la recta $AM$ en el punto $M$, y el segundo la subnormal polar del círculo $ONA$ en el punto $N$. Luego, para construir la subnormal de la cisoide en el punto $P$, basta trazar por $M$ una recta $MS$, perpendicular á $AM$; y por el centro del círculo y por el punto $N$ tirar la recta $NC$, que corta á $OS$ en el punto $T$. El segmento $OS$ es la subnormal de la recta en el punto $M$, y $OT$ la subnormal de la circunferencia en el punto $N$: tomando $OT' = OS + OT$, $OT'$ será, pues, la subnormal de la cisoide en el punto $P$.

5. La tangente á la cisoide en el punto $P$ corta á la recta $AM$ en otro punto, $M'$, cuya ordenada $y_1$ está dada por la fórmula

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}(2a - x);$$

ó, poniendo $x = \rho\cos\theta = 2a\,\mathrm{sen}^2\theta$, é $y = 2a\,\dfrac{\mathrm{sen}^3\theta}{\cos\theta}$,

$$y_1 = 3a\,\mathrm{tang}\,\theta:$$

---

* De κισσός, ó *cissos: yedra.*—Por la semejanza de su figura con el contorno de la hoja de este nombre.

igualdad de la cual se desprende un método muy sencillo para trazar la tangente á la cisoide en el punto $P$, con solamente advertir que

$$CK = a \operatorname{tang} \theta.$$

Como la ecuación del círculo $ONA$ es $\rho = 2a \cos \theta$, resulta también, representando por $y_2$ la ordenada del punto $M''$, en que su tangente en el $N$ corta á la recta $AM$,

$$y_2 = a \operatorname{tang} \theta.$$

El radio vector $OP$ corta asimismo á la recta $AM$ en otro punto, $M$, cuya ordenada $y_3$ tiene por expresión

$$y_3 = 2a \operatorname{tang} \theta.$$

Luego *el punto en que el radio vector del punto P de la cisoide corta á la asíntota* equidista *de aquellos otros dos en que cortan á la misma recta las tangentes á la cisoide y al círculo, trazadas por los de intersección de OP con ambas curvas.* (Longchamps: *Association française, Congrès de Grenoble*, 1885.)

De esta propiedad de la cisoide resulta otro medio de determinar sus tangentes.

6. Partiendo de la ecuación polar de la curva, obtiénese fácilmente la siguiente expresión de su radio de curvatura

$$R = \frac{a \operatorname{sen} \theta (1 + 3 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{3 \cos^4 \theta} = \frac{N^3}{24 a^2} \cot^2 \theta;$$

en la cual $N$ representa la longitud de la normal. La primera expresión de $R$ muestra que la cisoide no tiene puntos de inflexión á distancia finita.

7. El área limitada por la cisoide, el eje de las abscisas, y una paralela al eje de las ordenadas, tirada por el punto $(x, y)$, se halla expresada por la fórmula

$$A = \int_0^x x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}\, dx$$

$$= a^2 \left[ - \frac{(x + 3a)\sqrt{x(2a - x)}}{2a^2} + 3 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{x}{2a - x}} \right].$$

La cual, cuando $x = 2a$, doblando el resultado, se convierte en esta otra:

$$2A = 3a^2 \pi.$$

Luego *el valor del área limitada por la cisoide y por su asíntota es igual á tres veces el área del círculo de radio a.* (Wallis: *l. c;* Huygens: *l. c;* Fermat: *l. c).*

8. La rectificación de la cisoide puede obtenerse por medio de funciones elementales. En efecto, partiendo de la ecuación polar de la curva, resulta que

$$ds = \frac{2\sqrt{3}\, a \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{1}{3}}\, d\theta;$$

y, por consiguiente,

$$s = 2a \left[ \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 \theta_1}}{\cos \theta_1} - \frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 \theta_0}}{\cos \theta_0} - \sqrt{3} \log \frac{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{1}{3} + \cos^2 \theta_1}}{\cos \theta_0 + \sqrt{\frac{1}{3} + \cos^2 \theta_0}} \right];$$

representando por $\theta_0$ y por $\theta_1$ los valores de $\theta$ en las extremidades del arco que se quiere rectificar.

9. El volumen del sólido engendrado por la cisoide, al girar alrededor de su asíntota, hállase asimismo fácilmente por medio del Cálculo Integral, y tiene por expresión

$$V = 2\pi^2 a^3;$$

igual al volumen del *toro*, engendrado por el círculo en que se basa la construcción de la cisoide, haciéndole girar alrededor de la misma asíntota.—Tan interesante relación entre los volúmenes de los dos sólidos considerados fué

descubierta por SLUSE *(Carta á Huygens de* 10 *de Febrero de* 1658). En la revista *Mathesis* (1886, p. 241 y 273) puede verse una generalización del teorema de Sluse, debida á MASSAU.

**10.** Para terminar lo que tenemos que decir sobre la *Cisoide de Diocles*, veamos cómo, por medio de esta curva, resolvían los antiguos el *problema de la duplicación del cubo:* esto es, el problema que tiene por objeto, dado un segmento $a$ de una recta, determinar otro segmento $\alpha$, enlazado con el primero por la relación

$$\alpha^3 = 2a^3.$$

Descríbase para ello el círculo de radio $CO$, igual á $2a$, y la cisoide correspondiente (fig. 1); trácese después una recta $AP$ que corte la paralela $CE$ al eje de las ordenadas en un punto $D$, tal que sea $CD = a$; y tírese finalmente por el punto $P$, en que $AD$ corta á la curva, la recta $OP$.

Tendremos, poniendo $KC = \beta$,

$$FK = 2a + \beta \quad \text{y} \quad KE = 2a - \beta;$$

y, por lo tanto,

$$OK \,.\, KN = FK \,.\, KE = 4a^2 - \beta^2.$$

Pero, aplicando el teorema de Menelao á la transversal $PDA$ del triángulo $OKC$, se obtiene

$$\frac{PK \,.\, DC \,.\, OA}{OP \,.\, DK \,.\, AC} = 1:$$

ó, por ser $AO = 4a$, $DC = a$, y, por definición de la curva, $PK = KN$,

$$\frac{2a \, KN}{(OK - KN)(\beta - a)} = 1.$$

Ó, más sencillamente:

$$KN(\beta + a) = OK(\beta - a).$$

Eliminando en esta ecuación $KN$ y $OK$, por medio de las ecuaciones

$$OK \,.\, KN = 4a^2 - \beta^2 \quad \text{y} \quad OK^2 = 4a^2 + \beta^2,$$

resulta esta otra:

$$\beta^3 = 4\,a^3.$$

Y suponiendo que $\alpha$ sea media proporcional entre $a$ y $\beta$, ó que $\alpha^2 = a\beta$, hallaremos finalmente que $\alpha$ satisface á la condición indicada, $\alpha^3 = 2\,a^3$: ó que $\alpha$ resuelve el problema de la *duplicación del cubo.*

**11.** Consideremos, como en el núm. 1, una circunferencia (fig. 2), cuyo centro sea $C$; un punto $O$ de esta circunferencia; y una tangente $AM$, que corte á $OA$ oblicuamente. Si trazamos una recta $ON$, de posición variable, y tomamos en ella, á partir de $O$, un segmento $OP$ igual á $NM$, el lugar geométrico descrito por $P$, cuando $ON$ gire alrededor de $O$, es la curva, á que se ha dado el nombre de *Cisoide oblicua.* Cuando $O$ coincide con $A_0$, resulta la *Cisoide de Dioeles,* denominada también *Cisoide recta.*

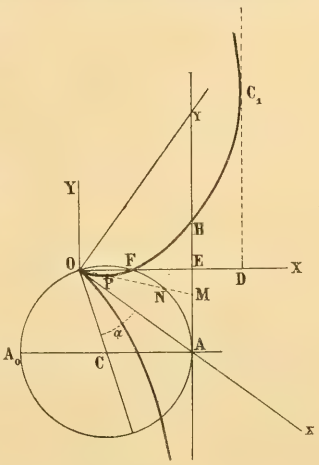



Figura 2.ª

Por ser $OP = OM - ON$, representando por $\alpha$ el ángulo constante $AOC$, por $\theta$ el ángulo $MOA$, por $\rho$ la recta $OP$, y por $2a$ el diámetro de la circunferencia, hallaremos que

$$ON = 2a\cos(\alpha + \theta), \qquad \frac{OM}{OA} = \frac{\cos\alpha}{\cos(\theta - \alpha)}, \quad \text{y} \quad OA = 2a\cos\alpha.$$

De donde se deduce para *ecuación polar de la cisoide oblicua:*

$$\rho = \frac{2a\cos^2\alpha}{\cos(\theta - \alpha)} - 2a\cos(\theta + \alpha),$$

que también puede escribirse como sigue:

$$\rho = 2a\,\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

Ó, en coordenadas cartesianas, tomando por eje de las abscisas la recta $OA$, y de las ordenadas la perpendicular á esta recta, levantada por el punto $O$:

$$(x^2 + y^2)(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) = 2ay^2.$$

**12.** Para determinar sencillamente la figura de la curva de que se trata, conviene adoptar como nuevo eje de las abscisas la recta $OX$, que forma con $OA$ un ángulo igual á $\alpha$. Y así tendremos:

$$x = X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha, \qquad y = X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha;$$

y, en consecuencia,

$$X(X^2 + Y^2) = 2a(X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha)^2;$$

ó

$$(1) \qquad Y = \frac{2aX \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \pm X\sqrt{2aX - X^2}}{X - 2a \cos^2 \alpha}.$$

En esta forma, la ecuación de la curva es de fácil discusión.

Vese, en efecto, que $Y = 0$ cuando $X = 0$, y que $Y$ resulta imaginaria cuando $X$ es negativa, y cuando $X > 2a$: luego la curva pasa por el punto $O$ (fig. 2) y se halla por completo comprendida entre el eje de las ordenadas y una paralela á este eje, tirada por el punto $(2a,0)$. Las rectas, paralelas al eje de las ordenadas, que pasan por los puntos del eje de las abscisas, comprendidos entre el origen de las coordenadas y este punto $(2a,0)$, cortan á la curva en dos puntos.

La recta $BM$, definida por la ecuación $X = 2a \cos^2 \alpha$, es *asíntota* de una rama de la curva, y corta á la otra rama en el punto $B$, cuya ordenada, $EB$, se halla expresada por la fórmula

$$EB = \frac{a \cos \alpha \cos 2\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

La curva toca á la recta $DC_1$, que limita la zona en que está comprendida, en el punto $C_1$, cuya ordenada es igual á $2a \cot \alpha$.

Poniendo $Y = 0$, vese que los puntos $O$ y $F$, donde la curva corta al

eje de las abscisas, tienen por abscisas $X = 0$ y $X = OF' = 2a \operatorname{sen}^2 \alpha$. Y también es fácil ver que en el punto $O$ es $Y' = -\operatorname{tang} \alpha$: luego el origen de las coordenadas es un *punto de retroceso*, y la tangente á la curva en este punto forma un ángulo igual á $-\alpha$ con el eje de las abscisas. Como, por ser $OF + OE = 2a$, se concluye sencillísimamente que $OF = ED$.

La fórmula (1) muestra además que la hipérbola, cuya ecuación es

$$Y = \frac{a \operatorname{sen} 2\alpha}{X - 2a \cos^2 \alpha} X,$$

y que tiene la misma asíntota que la curva considerada, corta por mitad á todas las cuerdas paralelas á la misma asíntota.

13. La *subnormal polar* de la cisoide oblicua tiene por expresión (fig. 2)

$$S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d.OM}{d\theta} - \frac{d.ON}{d\theta},$$

y es igual á la diferencia entre la subnormal de la recta $AM$ y la de la circunferencia, en los puntos $M$ y $N$ correspondientes. Luego el método empleado en el núm. 4 para trazar la normal á la cisoide *recta* es aplicable también á la cisoide *oblicua*.

Y, del mismo modo, el método de *Longchamps* para trazar las tangentes á la cisoide recta, expuesto en el núm. 5, es también aplicable á la cisoide oblicua, como fácilmente se deduce con auxilio de la Geometría Analítica, ó por un método geométrico más sencillo, empleado por aquel ilustre geómetra. *(Geométrie Analytique à deux dimensions, Paris*, 1884, *p.* 19-22.)

14. La cisoide es curva *unicursal*. Poniendo, en efecto, $x = ty$ en la ecuación de la curva, hallada en el núm. 11, resulta

$$x = \frac{2at}{(\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha)(1+t^2)} \quad \text{é} \quad y = \frac{2a}{(\operatorname{sen}\alpha + t\cos\alpha)(1+t^2)}.$$

Y por medio de estas ecuaciones se concluye que la recta, cuya ecuación es

$$u\,x + v\,y = 1,$$

corta á la curva en tres puntos, en los cuales $t$ adquiere los valores determinados por la ecuación

$$(A) \quad t^3 \cos\alpha + t^2 \operatorname{sen}\alpha - (2au - \cos\alpha)\, t + \operatorname{sen}\alpha - 2av = 0:$$

valores, $t_1$, $t_2$ y $t_3$, relacionados por esta condición

$$(2) \qquad t_1 + t_2 + t_3 = -\operatorname{tang}\alpha.$$

Del mismo modo se ve que la circunferencia, cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + l = 0,$$

corta á la cisoide en cuatro puntos, determinados por valores de $t$, que satisfacen á esta otra expresión condicional:

$$(3) \qquad t'_1 + t'_2 + t'_3 + t'_4 = -2\operatorname{tang}\alpha.$$

Las relaciones (2) y (3) fueron halladas por BALITRAND *(Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1893, *p.* 448), quien dedujo de ellas algunas propiedades de la cisoide, y las soluciones de algunas cuestiones relativas á esta curva, entre las cuales mencionaremos las siguientes:

1.° Poniendo en (2) $t_1 = t_2 = t_3$, se ve que *la curva posee un punto de inflexión*, y que el valor de $t$ en este punto resulta de la igualdad

$$t = -\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha.$$

Las coordenadas del punto de inflexión son, pues,

$$x = -\frac{9a}{\cos\alpha\,(9 + \operatorname{tang}^2\alpha)} \quad \text{é} \quad y = \frac{27a}{\operatorname{sen}\alpha\,(9 + \operatorname{tang}^2\alpha)}.$$

2.° Poniendo en (3) $t'_1 = t'_2 = t'_3 = t'_4$, concluiremos que existe un punto de la cisoide en que la circunferencia *osculatrix* tiene con la curva un *contacto* de *tercer orden*, donde se verifica que

$$t = -\frac{1}{2}\operatorname{tang}\alpha.$$

Las coordenadas de este punto son:

$$x = -\frac{8a}{\cos\alpha\,(4 + \operatorname{tang}^2\alpha)} \quad \text{é} \quad y = \frac{16a}{\operatorname{sen}\alpha\,(4 + \operatorname{tang}^2\alpha)}.$$

3.° Poniendo en (2) $t_1 = t_2$, hállase la ecuación

$$2\,t_1 + t_3 = -\operatorname{tang}\alpha,$$

por medio de la cual se determina uno de los puntos en que la tangente toca y corta á la cisoide, cuando se supone dado el otro.

4.° Poniendo en (3) $t'_1 = t'_2 = t'_3$, resulta la ecuación

$$3\,t'_2 + t'_4 = -2\operatorname{tang}\alpha,$$

que parecidamente determina uno de los puntos en que la circunferencia osculatriz de la cisoide toca y corta á esta curva, cuando el otro se supone conocido.

**15.** Es fácil ver que se puede dar á la ecuación de las tangentes á la cisoide la forma

$$(\cos\alpha + 2\,t\operatorname{sen}\alpha + 3t^2\cos\alpha)\,X + (\operatorname{sen}\alpha - t^2\operatorname{sen}\alpha - 2\,t^3\cos\alpha)\,Y = 2a.$$

Luego, si por el punto $(x_1, y_1)$ se tiran tangentes á esta curva, los valores de $t$ en los tres puntos de contacto se desprenderán de la ecuación

$$2t^3\,y_1\cos\alpha + (y_1\operatorname{sen}\alpha - 3x_1\cos\alpha)\,t^2$$
$$-2x_1\,t\operatorname{sen}\alpha + 2a - x_1\cos\alpha - y_1\operatorname{sen}\alpha = 0.$$

La condición para que éstos tres puntos de contacto estén sobre una misma recta exige que esta ecuación coincida con la (A), ó que

$$2y_1 = y_1 - 3\cot\alpha\,.\,x_1 = \frac{2x_1\operatorname{sen}\alpha}{2au - \cos\alpha} = \frac{y_1\operatorname{sen}\alpha + x_1\cos\alpha - 2a}{2av - \operatorname{sen}\alpha};$$

ó que $y_1 = -3\,x_1\cot\alpha$.

Luego *los puntos por los cuales se pueden tirar tangentes á la cisoide, de manera que los de tangencia resulten en línea recta, corresponden á la recta que tiene por ecuación* $y = -3\,x\,cot\,\alpha$ (Balitrand, *l. c).*

De las mismas ecuaciones condicionales se deducen además los coeficientes $u$ y $v$ de la recta $u\,x + v\,y = 1$, que pasa por los puntos de contacto considerados. Esta recta tiene, pues, por ecuación

$$\frac{3\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{6a\cos\alpha}X + \frac{4x_1\cos\alpha + a}{6ax_1\cot\alpha}Y = 1;$$

y, según esto, corta al *eje de las abscisas en un punto que no varía con* $(x_1, y_1)$. (BALITRAND: *l. c.*)

**16.** Ya hemos visto que la cisoide corta á su asíntota en el punto cuyas coordenadas son

$$x = 2a\cos^2\alpha \quad \text{é} \quad y = \frac{a\cos\alpha\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Pues, eliminando la $\alpha$ entre estas ecuaciones, hállase la ecuación de la curva descrita por aquel punto, cuando $\alpha$ varía:

$$y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a - x}.$$

Ecuación correspondiente á la curva denominada *estrofoide*, de que trataremos poco más adelante.

**17.** La *Cisoide de Diocles* y la *oblicua* son casos particulares de una clase de cúbicas que reciben el nombre general de *cisoides:* cúbicas que se obtienen sustituyendo, en la construcción expuesta en el número **11**, la circunferencia y la recta $AM$ por una cónica cualquiera y por una recta arbitraria, no paralela á las asíntotas de la cónica, cuyas ecuaciones sean

$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y = 0, \quad \text{y} \quad u\,x + v\,y = 1$$

Para hallar la ecuación de las *cisoides*, así consideradas en general, representemos ante todo por $\rho_1$ y $\rho_2$ los radios vectores correspondientes al mismo valor del ángulo $\theta$, y referentes el primero á la cónica, y á la línea recta el segundo; y las ecuaciones cartesianas de ambas líneas se transformarán en estas otras:

$$(A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta)\,\rho_1 + D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta = 0,$$
$$(u\cos\theta + v\operatorname{sen}\theta)\,\rho_2 = 1.$$

Y si de estas ecuaciones, combinadas con la expresión fundamental, $\rho = \rho_2 - \rho_1$, eliminamos ahora los valores $\rho_1$ y $\rho_2$, obtendremos la *ecuación polar* de aquellas curvas, de la cual inmediatamente se desprende esta otra en coordenadas cartesianas:

$$(A x^2 + B x y + C y^2)(u x + v y) = A x^2 + B x y + C y^2 + (D x + E y)(u x + v y).$$

Aplicando á esta ecuación el método de las asíntotas, fácilmente se concluye que la recta $ux + vy = 1$ lo es de las curvas á que se refiere, y las cuales poseen además otras dos asíntotas, reales ó imaginarias, simétricas de las que posea la cónica, con respecto al origen de las coordenadas.

Y asimismo se concluirá, mediante sencillas consideraciones geométricas, que cualquiera de aquellas curvas presenta, en el origen, un *nodo*, cuando la recta considerada la corta; un *punto de retroceso*, cuando la toca; y un *punto aislado*, cuando no la encuentra: con la advertencia de que, en los dos primeros casos, las tangentes á la cisoide en el origen pasan por las intersecciones de la recta con la curva.

Las cisoides son, en todos casos, cúbicas *unicursales*. Y, por referencia á ellas, demostró *Zahradnik* que es condición suficiente, para que una cúbica unicursal sea una cisoide, que posea tres asíntotas reales distintas, ó sólo una asíntota real á distancia finita. *(Archiv der Mathematik und Physik, t.* LVI, *p.* 8.)

## II

### LA CONCOIDE DE SLUSE

18. – Dase el nombre de *Concoide de Sluse* á la curva cuya ecuación en coordenadas polares es

$$a(\rho \cos \theta - a) = k^2 \cos^2 \theta,$$

y en coordenadas cartesianas

(1) $$a(x - a)(x^2 + y^2) = k^2 x^2.$$

Curva notable, de la cual trató primeramente Sluse en su interesante correspondencia matemática con Huygens (*Oeuvres de Huygens, t.* IV, *página* 246); olvidada luego por mucho tiempo; y sobre la cual llamó recientemente la atención Gino Loria en un artículo publicado en el *Mathesis* (1897, *p.* 5).

Sluse obtuvo del modo siguiente la curva de que tratamos, cuyo nombre procede de κόγχη, en latín y castellano *concha*.

Sea $O$ un punto dado, y $AB$ una recta dada también. Por el punto $O$ tracemos la recta variable $OC$, que corte á la $AB$ en el punto $C$; y sobre esta recta, prolongada, tomemos, á partir de $C$, un segmento $CD$ tal que sea

$$OC \cdot CD = k^2,$$

representando por $k^2$ una constante conocida.

El lugar geométrico (fig. 3), descrito por $D$, cuando $OC$ varía, es la *concoide* considerada.

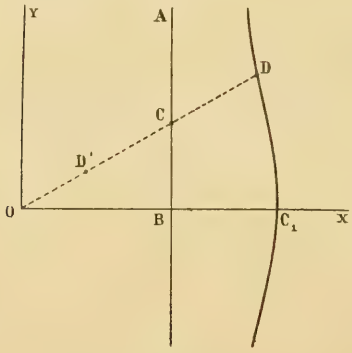


Figura 3.ª

Para verlo basta advertir que

$$CD = OD - OC = OD - \frac{OB}{\cos COB}$$

y $$CD = \frac{k^2}{OC} = \frac{k^2 \cos COB}{OB}$$

Ó, suponiendo que $OB = a$, y tomando el punto $O$ como *polo* y la recta $Ox$, perpendicular á la $AB$, como *eje polar*,

$$CD = \rho - \frac{a}{\cos\theta} \quad \text{y} \quad CD = \frac{k^2 \cos\theta}{a}.$$

Expresiones de las cuales se desprende inmediatamente la ecuación polar de la curva, y de ésta la cartesiana.

**19.** De la última (1) se deduce con facilidad que la *Concoide* de Sluse posee la forma indicada en la figura 3.ª, simétrica relativamente al eje de las abscisas; que la recta $AB$, dada por la ecuación $x = a$, es

asíntota suya; la abscisa del vértice $C_1$ igual á $\frac{a^2+k^2}{a}$; y el punto $O$ un *punto aislado* del lugar geométrico, representado por aquella ecuación.

La *Concoide de* Sluse tiene además dos puntos de inflexión á distancia finita. Para determinarlos, expresemos $x$ é $y$ en función racional de un parámetro variable $t$, poniendo $y = tx$ en la ecuación de la curva. Y así obtendremos por de pronto

$$x = a + \frac{k^2}{a(1+t^2)} \quad \text{é} \quad y = at + \frac{k^2 t}{a(1+t^2)}.$$

Los valores de $t$, correspondientes á los puntos de inflexión, resultan, pues, determinados por la ecuación siguiente:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2k^2}{a^2}\cdot\frac{k^2+a^2-3a^2t^2}{(1+t^2)^3} = 0, \quad \text{ó}$$

$$t^2 = \frac{k^2+a^2}{3a^2};$$

y las coordenadas de aquellos puntos por estas otras:

$$x = \frac{4a(a^2+k^2)}{4a^2+k^2} \quad \text{é} \quad y = \pm\frac{4(a^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}{4(a^2+k^2)\sqrt{3}}.$$

Sluse atribuye á Huygens la primera determinación de estos puntos *(Oeuvres de Huygens*, t. IV, 1891, p. 292).

Eliminando, finalmente, $k$ entre las ecuaciones anteriores, hállase la ecuación de una *cisoide*. Luego *el lugar geométrico de los puntos de inflexión de las Concoides de* Sluse, *que poseen la misma asíntota y el mismo punto singular, es una cisoide.*

**20.** Si tomamos sobre la recta $OD$ (fig. 3) un segmento $CD'$, igual á $CD$, el lugar descrito por $D'$, cuando $OC$ varía, será otra curva, denominada también *Concoide de* Sluse, y cuya ecuación es, como fácilmente puede verse,

$$a(x-a)(x^2+y^2) = -k^2x^2.$$

De las fórmulas obtenidas anteriormente para la *concoide* primeramente considerada, dedúcense las aplicables á la segunda, mudando $k^2$ en $-k^2$. Siendo además cosa sencilla averiguar que la forma de esta nueva curva es la indicada en la (fig. 4.ª), cuando $a^2 > k^2$; y en la (fig. 5.ª), cuando $a^2 < k^2$. En ambos casos $OB = a$; debiendo advertirse que en el segundo la curva carece de puntos de inflexión reales á distancia finita, pero que tiene dos imaginarios. Cuando $k^2 = a^2$, la curva se reduce á una *cisoide.*

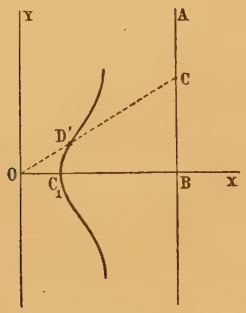



Figura 4.ª

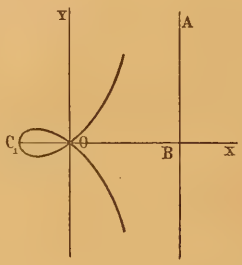



Figura 5.ª

## III

### LA ESTROFOIDE

**21.** Consideremos una circunferencia de centro $C$ y radio $CA$ (fig. 6), y por su centro tracemos la recta $KL$, que forme con $CA$ el ángulo $\alpha$. Tracemos después la recta de posición variable $OD$, que pasa por el punto fijo $O$, y sobre esta recta tomemos un segmento $OM$, igual á $ED$. El lugar geométrico de las posiciones del punto $M$, cuando $OD$ varía, es la curva denominada *estrofoide* *. Si $\alpha = 90^0$, la estrofoide se dice *recta;* y *oblicua,* si $\alpha \gtrless 90^0$.

---

* De στρόφιον ó *strophium:* corona ó guirnalda de flores; ó στροφίς: espira ó revuelta.

Por ser $OM = OD - OE$, representando por $\rho$, $a$ y $\theta$ el segmento $OM$, radio $OC$, y ángulo $DOA$, nos resultará que

$$OD = 2a\cos\theta, \quad \text{y} \quad OE = \frac{a\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\alpha - \theta)}.$$

De manera que la *ecuación polar de la estrofoide* será ésta:

$$\rho = 2a\cos\theta - \frac{a\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\alpha - \theta)}, \quad \acute{o} \quad \rho = a\,\frac{\text{sen}\,(\alpha - 2\,\theta)}{\text{sen}\,(\alpha - \theta)}.$$

Para obtener la ecuación cartesiana de la curva, tomemos para eje de las

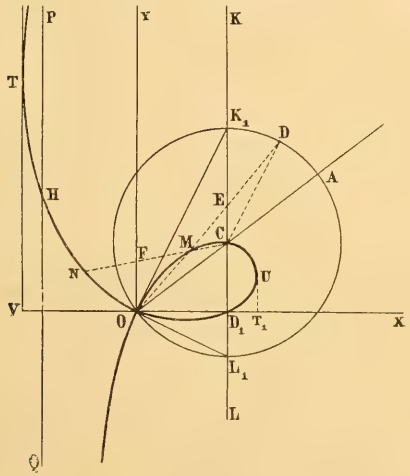



Figura 6.ª

abscisas la recta $Ox$, perpendicular á la recta dada $KL$; y para eje de las ordenadas la $Oy$, paralela á $KL$. El ángulo $AOx$ es igual á $\frac{\pi}{2} - \alpha$, y las coordenadas, $x$ é $y$, del punto $M$ tendrán por expresión:

$$x = \rho\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \rho\,[\cos\theta\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\theta\cos\alpha],$$

$$y = \rho\,\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \rho\,[\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha + \cos\theta\cos\alpha].$$

De las cuales se desprenden los valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, que, sustituídos en la ecuación polar de la estrofoide, producen la siguiente ecuación cartesiana de la misma curva:

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)\, x = a\,[(x^2 - y^2)\operatorname{sen}\alpha + 2\,xy\cos\alpha].$$

**22.** La más antigua noticia, conocida hasta la fecha, referente á la *estrofoide recta*, hállase consignada, según advirtió G. Loria *(Bolletino di Bibliografia*, etc., 1898, p. 3), en dos cartas, escritas por Verdus á Torricelli, por los años 1645, de las cuales se deduce, con probabilidad de acierto, que Roberval, antes que ningún otro geómetra, se ocupó en el estudio de esta curva, designada por entonces con el nombre de *Pteroide* *. Las cartas á que nos referimos fueron publicadas en el *Bolletino de Boncompagni* (t. VIII, 1875).

Después estudiaron la misma curva Moivre *(Phylosophical Transactions*, 1715); y Agnesi en sus *Instituzioni Analitiche (Milano*, 1748, *p.* 378 *y* 391); etc.

Montucci parece haber sido el primero que la dió el nombre de *estrofoide*, en un artículo publicado en 1846 en los *Nouvelles Annales des Mathématiques* (*t.* V, *p.* 470). Lehmus, en sus *Aufgaben aus der höheren Mathematik* (*Berlin*, 1842, *p.* 120), la llamó *cucumeide* **; y Booth *logocíclica*, en un artículo que sobre ella publicó en el *Quarterly Journal of Mathematics* (1858 y 1859), y después en su *Treatise on some New Geometrical Methods* (1873, *t.* I, *p.* 292).

Referentes á la *estrofoide oblicua*, los más antiguos trabajos conocidos, en los cuales se trata de ella, son las *Lectiones geometricæ* de Barrow (1669, *p.* 69), según recientemente advirtió Aubry, y dos memorias de Casali, publicadas en los *Instituti Bononiensis Commentarii* (t. IV, 1757), en los cuales atribúyese la invención de estas curvas á Torricelli (Loria, l. c). Y con posterioridad trató del mismo asunto Quetelet en una memoria intitulada: *De quibusdam locis geometricis necnon de curva focali*, publicada en Gand por los años 1819, en la cual atribuyó á la curva el nombre de *focal con nodo:* por cuyo motivo todavía suele designarse con el de *focal de Quetelet.*—Véase más adelante.

---

* De πτερὸν, ó *pteron*, ala: la *curva alada.*

** De κεκυμαι, *cucuma*, ó *cucumis*, cohombro, ó especie de pepino.

Las estrofoides *recta* y *oblicua* han sido con posterioridad objeto de muchos trabajos notables, cuyos títulos se pueden ver, por lo que respecta á los anteriores al año 1860, en una lista publicada por *Tortolini* en los *Annali di Matematica, t.* III, y transcrita en los *Nouvelles Annales des Mathématiques* (1861, *p.* 82); y, también en otra más extensa, y de fecha más reciente, publicada por GUNTHER en sus *Paraboliches Logaritmen und paraboliche Trigonometrie.* (Leipzig, 1882.)

**23.** Tras de estos preliminares, pasemos al estudio, por de pronto, de la *estrofoide recta.*

La ecuación de esta curva es

$$y^2 = \frac{x^2(a-x)}{x+a};$$

de la cual se deduce que su forma será la indicada en la figura 7.ª Porque en efecto, la curva corta al eje de las abscisas en los puntos $O$ y $C$, donde es $x = 0$ y $x = a$; á cada valor de $x$, comprendido entre $-a$ y $+a$, corresponden dos puntos reales de la curva, simétricamente dispuestos con respecto al eje mencionado; y la recta $PQ$, que tiene por ecuación $x = -a$, es asíntota de la misma curva. Además, en los puntos cuya abscisa es igual á $\frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$, el valor absoluto de $y$ resulta máximo. Y el de origen, $O$, de las coordenadas es un punto *doble* de la curva, donde las tangentes forman ángulos de $45^0$ y $-45^0$ con el eje de las abscisas.

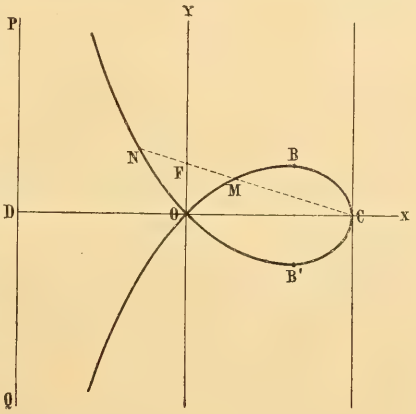



Figura 7.ª

**24.** Partiendo de la ecuación de la estrofoide recta, en coordenadas polares,

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta},$$

hállase, para expresión de su radio de curvatura, $R$, la que sigue:

$$R = \frac{a(1+\operatorname{sen}^2 2\theta)^{\frac{3}{2}}}{4\cos^4\theta(1+2\operatorname{sen}^2\theta)}.$$

Y por medio de esta fórmula vese que la curva no tiene puntos de inflexión reales á distancia finita; y que en el punto $C$ es $R = \frac{1}{4}a$, y también, en el $O$, $R = a\sqrt{2}$.

**25.** Si por el punto $C$ trazamos la recta $CMN$, y representamos por $\omega$ el ángulo $NCO$, las coordenadas de los puntos $M$ y $N$ resultan determinadas por la ecuación de la curva, y por la correspondiente á la recta

$$y = -(x-a)\operatorname{tang}\omega.$$

Y, eliminando la $y$ entre ambas ecuaciones, resulta la siguiente:

$$x = \pm\frac{a\operatorname{tang}\omega}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\omega}} = \pm a\operatorname{sen}\omega.$$

La cual muestra que las proyecciones de $M$ y $N$ sobre el eje de las abscisas equidistan de $O$, y, por lo tanto, que *los puntos M y N, en que las secantes trazadas por C cortan á la curva, equidistan también de los puntos F, en que las mismas secantes cortan á la recta OF.*

Y como también

$$FO = a\operatorname{tang}\omega \quad \text{y} \quad FM = a\operatorname{tang}\omega,$$

resulta probado que $FO = FM = FN$; ó que el punto $F$, no solamente equidista de los $M$ y $N$, sino asimismo del $O$. De manera que

$$CN = CF + FO, \quad \text{y} \quad CM = CF - FO.$$

Y, en consecuencia, dado el parámetro $a$, que figura en la ecuación cartesiana de la *estrofoide recta*, nada más sencillo que la construcción, por pares de puntos, de esta curva.

**26.** Adviértase además que de las expresiones

$$CM = CF - MF = \frac{a}{\cos \omega} - a \operatorname{tang} \omega \quad \text{y}$$

$$CN = CF + FN = \frac{a}{\cos \omega} + a \operatorname{tang} \omega,$$

se concluye esta otra

$$CM \times CN = a^2.$$

Por lo tanto, *el producto de las distancias del punto C á dos puntos de la curva, colocados sobre una recta que pase por C, es constante, cualquiera que sea esta recta.* (Booth: *l. c.*)

**27.** El área limitada por la estrofoide, por el eje de las abscisas y por una paralela al eje de las ordenadas, tirada por el punto $(x, y)$, tiene por expresión

$$A = \int_0^x x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx$$

$$= a^2 \left[ \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - \frac{(2a-x)\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2} - \frac{\pi}{4} + 1 \right].$$

Poniendo $x = a$, y multiplicando por 2, hállase para valor del área comprendida en la parte cerrada de la curva,

$$A_1 = 2a^2 - \frac{\pi}{2} a^2.$$

Y como el valor del área comprendida entre la curva y la asíntota se halla análogamente expresado por la fórmula

$$A_2 = 2a^2 + \frac{\pi}{2} a^2,$$

resulta que la suma de las dos áreas es igual á $4a^2$.

**28.** La determinación de la longitud de los arcos de la estrofoide recta se obtiene por medio de las integrales elípticas de 1.ª y 2.ª especie: para demostrar lo cual se apoyó Booth *(l. c., p.* 304) en la consideración de la curva *inversa* de la estrofoide. Pero aquí resolveremos el mismo problema directamente, ó sin auxilio de aquella curva.

Aplicando á la ecuación polar de la estrofoide la fórmula

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta,$$

dedúcese que

$$ds = \frac{a}{\cos^2 2\vartheta}\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 2\vartheta}\, d\vartheta = \frac{2a\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\cos^2 2\vartheta}}{1 + \cos 2\vartheta}\, d\vartheta;$$

ó, si $2\vartheta = \frac{\pi}{2} - \omega$,

$$ds = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}\omega\, d\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega}} - \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega}} - \frac{d\omega}{(1 + \operatorname{sen}\omega)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega}}\right].$$

Poniendo ahora $\operatorname{sen}\omega = t$, é integrando, resulta esta otra ecuación:

$$s = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left[\int \frac{t\,dt}{\sqrt{F(t)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} - \int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{F(t)}}\right],$$

en la cual

$$F(t) = (1 - t^2)\left(1 - \frac{1}{2}t^2\right).$$

Pero empleando una fórmula, ya demostrada en la teoría de las integrales elípticas, hallaremos la igualdad siguiente, fácil de verificar además por simple diferenciación:

$$\frac{2\sqrt{F(t)}}{t+1} = -\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{F(t)}} - \int \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} + \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{F(t)}};$$

y ésta otra luego, poniendo $t^2 = x$,

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{F(t)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(2-x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left(2x - 3 + 2\sqrt{(1-x)(2-x)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left(2t^2 - 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{F(t)}\right).$$

Eliminando en la expresión de $s$ las integrales

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{F(t)}} \quad \text{é} \quad \int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{F(t)}},$$

y poniendo $\operatorname{sen}\omega$ en vez de $t$, y $\Delta\omega$ por $\sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\omega}$,

hallaremos que

$$s = \frac{a}{2} \log \left(2\operatorname{sen}^2\omega - 3 + 2\sqrt{2}\cos\omega\Delta\omega\right)$$

$$+ \frac{a\sqrt{2}\cos\omega\Delta\omega}{\operatorname{sen}\omega + 1} - \frac{a\sqrt{2}}{2} \int \frac{\operatorname{sen}^2\omega d\omega}{\Delta\omega}.$$

Y, con auxilio de la conocida fórmula

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2\omega d\omega}{\Delta\omega} = 2\left[\int \frac{d\omega}{\Delta\omega} - \int \Delta\omega d\omega\right],$$

obtendremos, finalmente, la expresión buscada de $s$:

$$s = \frac{a}{2}\log\left(2\operatorname{sen}^2\omega - 3 + 2\sqrt{2}\cos\omega\Delta\omega\right)$$

$$+ \frac{a\sqrt{2}\cos\omega\Delta\omega}{\operatorname{sen}\omega + 1} - a\sqrt{2}\left(\int \frac{d\omega}{\Delta\omega} - \int \Delta\omega d\omega\right),$$

dependiente de integrales de la 1.ª y 2.ª especie de Legendre.

**29.** Consideremos ahora la *estrofoide oblicua.*

Partiendo de la ecuación cartesiana de la curva, puede hallarse fácilmente la forma de ésta, resolviendo por de pronto aquella ecuación relativamente á $y$; lo que da

$$y = \frac{ax\cos\alpha \pm x\sqrt{a^2 - x^2}}{x + a\operatorname{sen}\alpha}.$$

De donde se infiere que la recta (fig. 6) $PQ$, determinada por la ecuación $x = -a\operatorname{sen}\alpha$, es asíntota de la curva y secante á ella también en el punto $H$, cuya ordenada tiene por valor $\frac{a\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$.

Cuando es $x = \pm a$, los dos valores de $y$, correspondientes á cada valor de $x$, tienen por expresión

$$y = \frac{\pm a\cos\alpha}{\pm 1 + \operatorname{sen}\alpha};$$

y en los puntos correspondientes, $U$ y $T$, á que éstos de $y$ se refieren, las tangentes son entonces paralelas al eje de las ordenadas.

En el intervalo comprendido entre $x = -a$ y $x = a$, $y$ es real; é ima-

ginaria para los demás valores de $x$. Luego la curva se halla por completo comprendida en la región limitada por las paralelas al eje de las ordenadas que pasan por $U$ y $V$.

Los valores de $y$ son asimismo iguales á cero, cuando es $x = 0$. Luego el origen de las coordenadas es un *punto doble:* en el cual los valores de $y'$ tienen por expresión

$$y_0' = \frac{\cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha, \text{ é } y_1' = \frac{\cos\alpha + 1}{\operatorname{sen}\alpha} = \cot\frac{1}{2}\alpha.$$

Luego, representando por $\omega_0$ y $\omega_1$ los ángulos formados por las tangentes, en el punto doble, con el eje de las abscisas, hallaremos que

$$\omega_0 = -\frac{\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

*Las tangentes en el punto doble son, pues, perpendiculares una á otra.*

Puédense también determinar geométricamente estas tangentes. En efecto, $M$ tiende (fig. 6) hacia $O$ cuando la recta variable $OD$ propende á confundirse con $OK_1$ ó con $OL_1$. Luego $OK_1$ y $OL_1$ son las tangentes á la curva en el punto doble $O$.

La curva corta al eje de las abscisas en el punto $O$ y en el punto $D_1$, donde $x = a\operatorname{sen}\alpha$: valor de $x$ este último á que corresponde, además del de $y = 0$, el de $y = a\cos\alpha$, que designa también el de la ordenada del centro $C$ de la circunferencia, considerada en el número **21**.

La expresión de $y$ muestra que la hipérbola, cuya ecuación es

$$y = \frac{ax\cos\alpha}{x + a\operatorname{sen}\alpha},$$

y que posee la misma asíntota que la curva considerada y pasa por los puntos $U$, $O$ y $T$, corta á todas las cuerdas paralelas á la asíntota en dos partes iguales.

**30.** Por ser $\rho = OD - OE$, vese que la *subnormal polar* de la curva en el punto $M$ es igual á la diferencia entre la subnormal polar de la circunferencia (fig. 6) $ADO$ en el punto $D$, y la subnormal polar de la recta

$CK$ en el punto $E$. Luego el método empleado en el número 4 para trazar las normales á la cisoide es también aplicable á la estrofoide.

**31.** La propiedad de la estrofoide recta, demostrada en el número **25**, es propiedad también de la oblicua. Trazando, en efecto, por el punto $C$ (fig. 6) la recta $CM$, que pasa por el punto $M$ de la curva y corta la paralela á la asíntota, levantada por $O$, en el punto $F$, hallaremos que $FM = OF$: bastando advertir, para persuadirse de ello, que los triángulos $MCO$ y $CED$ son iguales, por ser $CD = CO$, $OM = ED$, y $EDC = COM$. Luego

$$MC = EC, \quad \text{y} \quad MEC = EMC = FMO.$$

Y, por lo tanto,

$$FOM = MEC = FMO, \quad \text{y} \quad MF = OF,$$

conforme nos proponíamos demostrar.

**32.** Tomando las rectas $OL_1$ y $OK_1$ (fig. 6), esto es, las tangentes á la curva, en el *punto doble*, para ejes de las coordenadas, la ecuación de la estrofoide se transforma como sigue:

$$(x^2 + y^2)\left[x\cos\frac{\alpha}{2} + y\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right] = 2axy.$$

Y, suponiendo después que $y = tx$, hallaremos

$$x = \frac{2at}{(t^2+1)\left[\cos\frac{\alpha}{2} + t\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right]}, \text{ é}$$

$$y = \frac{2at^2}{(t^2+1)\left[\cos\frac{\alpha}{2} + t\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\right]}.$$

Advirtamos ahora que la recta, cuya ecuación es

$$ux + vy = 1,$$

corta á la curva en tres puntos, que corresponden á los tres valores de $t$, dados por la ecuación

$$t^3 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} + \left[ \cos \frac{\alpha}{2} - 2av \right] t^2 + \left[ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - 2au \right] t + \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Luego, representando por $t_1$, $t_2$ y $t_3$ estos tres valores de $t$, resulta que

$$t_1 t_2 t_3 = - \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Y del mismo modo se concluye que una circunferencia cualquiera corta á la estrofoide en cuatro puntos, determinados por los valores $t'_1$, $t'_2$, $t'_3$, $t'_4$ de $t$, que satisfacen á la condición

$$t'_1 t'_2 t'_3 t'_4 = \cot^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Por medio de estas relaciones hallaron Balitrand y E. Valdés muchas propiedades interesantes de la estrofoide, consignadas en dos artículos publicados en las *Nouvelles Annales des Mathématiques* (1893, *p.* 430; y 1894, *p.* 243). Y por su medio también pueden resolverse las mismas cuestiones que en el caso de la cisoide fueron resueltas por medio de las fórmulas (2) y (3) del número **14**. Como, por ejemplo: que la estrofoide tiene un punto de inflexión allí donde $t = - \sqrt[3]{\cot \frac{\alpha}{2}}$; y otro punto, correspondiente á $t = \sqrt{\cot \frac{\alpha}{2}}$, donde la circunferencia osculatriz y la curva tienen un contacto de tercer orden: etc., etc.

**33**. Como ya anteriormente se indicó, la *estrofoide* interviene en la resolución ó análisis de muy variadas é interesantes cuestiones geométricas. Casali primero, y más tarde Quetelet, dieron con aquella curva al tratar de resolver el problema que, á título de ejemplo y como aclaración de lo que precede, vamos á exponer ahora.

Sea (fig. 8) *ASB* la sección producida en un cono de revolución por el

plano dirigido por el eje $SK$ del mismo cono. Otro de los planos que pasan por el punto $A$ y por la tangente $Ay$ al círculo, de diámetro $AB$ y perpendicular al eje $SK$, es también perpendicular al plano $ASB$, y determina, por su intersección con la superficie del cono, una cónica, $AGC$, cuyo eje, $AC$, forma con $AS$ un ángulo en $A$, que designaremos por $\varphi$. Y sean además $F$ y $F'$ los *focos* de la cónica considerada.

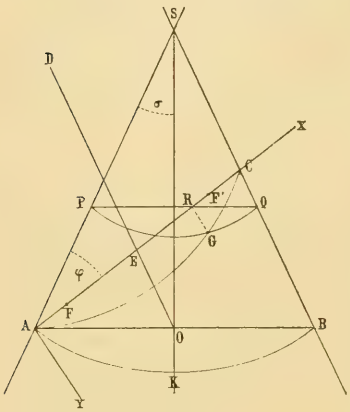



Figura 8.ª

Si tras de esto suponemos que el plano secante, dirigido por la tangente invariable $Ay$, gira alrededor de esta línea, á cada nueva posición suya corresponderán otra cónica y otros focos, situados éstos siempre en el plano $ASB$, sobre la recta móvil $AC$. Pues bien, el lugar geométrico que todos estos focos determinan constituye una nueva curva, *focal* de QUETELET, cuya ecuación y forma consiguiente se trata ahora de encontrar.

Recuérdese para ello que, representando por $\sigma$ el ángulo $ASK$, y por $d$ la distancia $AS$, la curva resultante de la intersección, con la superficie cónica, del plano secante que pasa por $Ay$, tiene por ecuación

$$y^2\cos^2\sigma = x\,\mathrm{sen}\,\varphi\,[d\,\mathrm{sen}\,2\sigma - x\,\mathrm{sen}(\varphi + 2\sigma)]^*;$$

y que, en consecuencia, el semi-eje mayor, $m$, de la cónica, y la distancia, $c$,

---

* En la fig. 8, $y = GR$, ó $y^2 = PR \times RQ$; y $x = AR$. Y como de los triángulos $APR$, $QCR$ y $ASC$ resulta que

$$PR = \frac{x\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\sigma};\quad RQ = (AC - x)\,\frac{\mathrm{sen}(\varphi + 2\sigma)}{\cos\sigma};\ \text{y}\ \ AC = \frac{d\,\mathrm{sen}\,2\sigma}{\mathrm{sen}(\varphi + 2\sigma)},$$

inmediatamente se concluye la ecuación del texto.

de cualquiera de los focos al centro de la misma, se hallan expresadas por estas fórmulas:

$$m = \frac{d \operatorname{sen} 2\sigma}{2 \operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \quad \text{y} \quad c = \frac{d \operatorname{sen}\sigma \cos(\varphi + \sigma)}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)}.$$

Luego, designando por $r$ el radio vector del punto $F$ ó del $F'$, en el sistema de coordenadas polares, que tiene por origen el punto $A$, por eje fijo la recta $AS$, y por ángulo variable el $\varphi$, la ecuación de la *focal* será ésta:

$$r = \frac{d \operatorname{sen} 2\sigma}{2 \operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \mp \frac{d \operatorname{sen}\sigma \cos(\varphi + \sigma)}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)}.$$

Para demostrar por procedimiento puramente analítico que esta ecuación corresponde á una estrofoide oblicua, el camino es un poco largo y molesto; pero, en cambio, á esta conclusión puede llegarse con suma sencillez, basándose en consideraciones de orden elemental geométrico.

Tracemos, en efecto, por $A$ la recta $AOB$, perpendicular á la $SK$; y por el punto $O$ la $OED$, paralela á $SB$. Y del triángulo $AEO$ se deducirá sin dificultad entonces que

$$\frac{AE}{AO} = \frac{\operatorname{sen} AOE}{\operatorname{sen} AEO} = \frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \quad \text{y} \quad \frac{EO}{AO} = \frac{\operatorname{sen} EAO}{\operatorname{sen} AEO} = \frac{\cos(\varphi + \sigma)}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)}$$

De donde, advirtiendo que $AO = d \operatorname{sen}\sigma$, se concluye que

$$r = AE \mp EO.$$

Propiedad como característica de la *estrofoide* (Núm.$^{os}$ **25** y **31**), de la cual inmediatamente se deduce que la *focal* es una curva de aquel nombre, con un *nudo* en $O$; tangente en $A$ á la generatriz del cono $SA$; secante á esta misma generatriz en $S$; y que tiene por asíntota la $SB$: conforme lo indica la fig. 9, construída valiéndose de la anterior expresión de $r$, y en la cual se indica con suficiente claridad la construcción

de los puntos $N'$ y $N''$, $M'$ y $M''$, $L'$ y $L''$, etc., con sólo advertir que

$$LO = LL' = LL'', \qquad MO = MM' = MM'', \qquad NO = NN' = NN''.$$

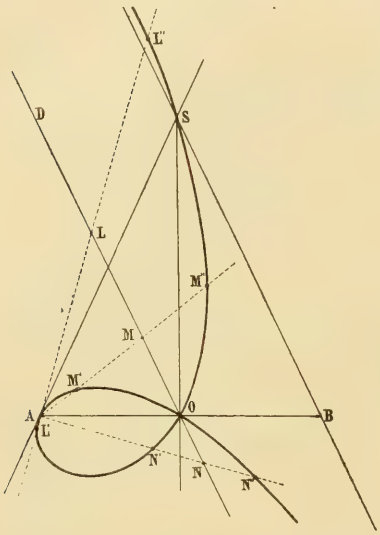



Figura 9.ª

Designando por $2a$ la longitud del diámetro $AB$, la ecuación de la *focal cónica* puede escribirse como sigue:

$$r = \frac{a\cos\sigma}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)} \mp \frac{a\cos(\varphi + \sigma)}{\operatorname{sen}(\varphi + 2\sigma)}.$$

Y cuando $\sigma = 0$, ó cuando el *cono* se transforma en *cilindro*, la ecuación anterior se convierte en esta otra, correspondiente á la *estrofoide recta:*

$$r = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}(1 \mp \cos\varphi).$$

Discrepa por su forma esta ecuación de la primera, contenida en el número **24**, correspondientes ambas á la misma curva, por no hallarse ésta referida, en uno y otro caso, á idéntico sistema de coordenadas polares.

## IV

### LA TRISECTRIZ DE MACLAURIN

**34.** Dase el nombre de *trisectriz de Maclaurin* á la curva cuya ecuación polar es

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} - 4a\cos\theta,$$

y la cartesiana

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2):$$

así llamada por ser una de las curvas que pueden emplearse para resolver el famoso problema de la trisección del ángulo, y por haber sido considerada por primera vez por MACLAURIN en su *Treatise of Fluxions (p.* 198 *del t.* I *de la traducción francesa del P. Pesenas).* Modernamente ha sido objeto de varios trabajos, de los cuales mencionaremos los siguientes:

SCHOUTE: *Sur la construction des courbes unicursales par points et par tangentes. (Archives Néerlandaises, t.* XX, 1885.)

A. LIMA: *Sobre uma curva do terceiro grao. (Jornal de Sciencias Mathematicas, t.* V, *p.* 13.)

LONGCHAMPS: *Essai de la Géométrie de la Règle, etc., París,* 1890, *p.* 102.

**35.** Escribiendo la ecuación cartesiana del modo siguiente:

$$y = \pm x\sqrt{\frac{3a + x}{a - x}},$$

vese fácilmente que la curva á que se refiere tiene la forma indicada en la figura 10: simétrica relativamente al eje de las abscisas; con una asíntota, $AB$, dada por la ecuación $x = a$; un *punto doble*, $O$, en el origen de las coordenadas, en el cual las tangentes forman ángulos de $\pm 60°$ con el eje mencionado; un vértice, $V$, á la distancia del origen $O$, determi-

nado por la igualdad $x = -3a$; y dos puntos, $N$ y $N_1$, cuyas coordenadas son

$$x = -a\sqrt{3} \quad \text{é} \quad y = \pm a\sqrt{6\sqrt{3} - 9},$$

donde el valor absoluto de $y$ es máximo.

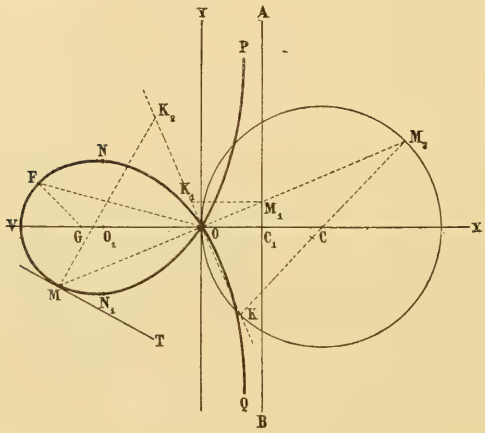



Figura 10.

**36.** De la ecuación polar de la trisectriz se deduce un procedimiento sencillo para construir esta curva. En efecto, el primer término de la expresión de $\rho$ representa los radios vectores $\rho_1$ de los puntos de la recta $AB$, referidos al punto $O$ como origen; y el segundo representa los, $\rho_2$, de la circunferencia de radio igual á $2a$, con el centro en el punto $C$, cuyas coordenadas son $(2a, 0)$. Luego la curva propuesta puede ser construída tomando, á partir del punto $O$, sobre la recta variable $MOM_2$, un segmento $OM$, igual á $OM_1 - OM_2$, ó $\rho_1 - \rho_2$: lo que determina el punto $M$, generador de la curva, conforme $MOM_2$ varía de posición.

**37.** Por ser $\rho = OM_1 - OM_2$, tenemos

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dOM_1}{d\theta} - \frac{dOM_2}{d\theta}.$$

De manera que la subnormal de la curva en el punto $M\,(OK_2)$, es igual á la diferencia entre la subnormal polar de la recta $AB$, en el punto $M_1\,(OK_1)$, y la de la circunferencia en el punto $M_2\,(-OK)$. Igualdad que sugiere un procedimiento muy sencillo para el trazado de la normal en $M$ á la curva, indicado en la figura, y análogo al expuesto en el Núm. 4, al tratar de la cisoide.

38. En la trisectriz de Maclaurin, el radio de curvatura en cualquier punto se deduce de la siguiente fórmula:

$$R = \frac{a\,(1 + 8\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{24\cos^4\theta},$$

según la cual, la curva carece de puntos de inflexión á distancia finita.

39. Por ser

$$ds = \frac{a}{\cos^2\theta}\sqrt{1 + 8\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{a\,d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1 + 8\cos^2\theta}} + \frac{8a\,d\theta}{\sqrt{1 + 8\cos^2\theta}},$$

para determinar la longitud de los arcos de la curva considerada, sirve la fórmula

$$s = \frac{a}{3}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1 - \frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}} + \frac{8a}{3}\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

La primera de estas integrales representa la longitud de un arco de hipérbola. Aplicando, pues, la fórmula de Legendre, según la cual la rectificación de la hipérbola depende de las integrales elípticas de 1.ª y 2.ª especie,

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\theta}} = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$- \frac{1}{1 - k^2}\int_0^\theta \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta + \frac{\operatorname{tang}\theta\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\theta}}{1 - k^2},$$

y poniendo por $k^2$ su valor numérico $\frac{8}{9}$, hallaremos que

$$s = 3a\left[\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}} - \int_0^{\theta} \sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \right.$$

$$\left. + \operatorname{tang}\theta \sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\theta}\right].$$

*La longitud de los arcos de la trisectriz de Maclaurin depende, pues, de una integral elíptica de 1.ª especie y de otra de 2.ª*

**40.** El área recorrida por el radio vector de la trisectriz, cuando $\theta$ varía desde $\theta_0$ hasta $\theta_1$, se determina por la fórmula

$$A = \frac{a^2}{2}\left[\operatorname{tang}\theta_1 + 4\operatorname{sen}2\theta_1 - \operatorname{tang}\theta_0 - 4\operatorname{sen}2\theta_0\right].$$

En la cual fácil es ver que cada uno de los términos del segundo miembro representa el área de un cierto triángulo rectángulo.

Poniendo $\theta_0 = 0$ y $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, y multiplicando el resultado por 2, conclúyese que el área limitada por la parte cerrada de la curva es igual á $3a^2\sqrt{3}$. (MACLAURIN: *l. c.)*

**41.** Para justificar el nombre de trisectriz, aplicado á la curva de que se trata, concluiremos demostrando cómo, mediante su consideración, se puede resolver el problema de la trisección del ángulo. Sea $VG = a$ (fig. 10): pues, poniendo $FOV = \alpha$ y $FGV = \omega$, nos resultará

$$\frac{OF}{OG} = \frac{\operatorname{sen} FGO}{\operatorname{sen} GFO}; \quad \text{ó} \quad \frac{\rho}{2a} = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(\omega - \alpha)}.$$

Mas, por ser $\theta = \pi - \alpha$, la ecuación polar de la curva será

$$\rho = -\frac{a}{\cos\alpha} + 4a\cos\alpha.$$

Y, eliminando $\rho$ entre las dos últimas ecuaciones, resulta la igualdad

$$\text{tang}\,\omega = \frac{4\,\text{sen}^3\alpha - 3\,\text{sen}\,\alpha}{3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha} = \text{tang}\,3\alpha:$$

la cual prueba que el ángulo $FOV$ es igual á la tercera parte del ángulo $FGV$.

## V

### LAS CÚBICAS CIRCULARES

AMPLIACIÓN Y RESUMEN DE LO HASTA AHORA EXPUESTO

**42.** La *cisoide* de Diocles y la oblicua, la *estrofoide*, la *concoide* de Sluse, y la *trisectriz* de Maclaurin, pertenecen á una clase de curvas, denominadas *cúbicas circulares*, que tienen por ecuación común la siguiente:

$$(1)\quad (ax + by)(x^2 + y^2) = Px^2 + Qxy + Ry^2 + Tx + Uy + V,$$

y á las cuales corresponden una asíntota real, determinada por la ecuación

$$ax + by = \frac{Pb^2 - Qab + Ra^2}{a^2 + b^2},$$

y dos imaginarias con coeficientes iguales á $+i$ y $-i$, representando por $i$ el radical $\sqrt{-1}$.

Por medio de la ecuación inmediata anterior, vese fácilmente que, si cambiamos la dirección de los ejes coordenados, adoptando para nuevo eje de las ordenadas una paralela á la asíntota real, desaparecerá el término que contiene el producto $by$ de la (1), y esta ecuación se reducirá á la forma

$$(2)\quad (x^2 + y^2)x = P_1x^2 + Q_1xy + R_1y^2 + T_1x + U_1y + V_1.$$

Y, trasladando después el origen de las coordenadas al punto $(0, {}^1/_2 Q_1)$,

la ecuación general de las cúbicas circulares podrá representarse como sigue:

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)\, x = Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + F:$$

ecuación de que nos serviremos para estudiar las curvas á que se refiere.

**43.** Comencemos por demostrar que las cúbicas circulares son envolventes de círculos, cuyos centros se hallan situados, según los casos, sobre distintas parábolas.

Y para ello fijemos, por de pronto, la atención en el círculo cuya ecuación sea

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = 2(\alpha x + \beta y + \gamma),$$

y busquemos las condiciones á que ha de satisfacer este círculo, para que resulte bitangente á una cualquiera de las curvas comprendidas en la ecuación (3).

Para resolver este problema adviértase, en primer lugar, que los puntos de intersección con el círculo de la curva, en particular ahora considerada, son los mismos, también de intersección, del círculo con la cónica, á que corresponde la ecuación

$$(5) \quad 2(\alpha x + \beta y + \gamma)\, x - (Ax^2 + Ay'^2 + 2Cx + 2C'y + F) = 0.$$

Mas, para que el círculo resulte bitangente á la cúbica (3), deben reunirse en cada punto de contacto dos puntos de intersección del mismo círculo con la cúbica, y, por lo tanto, deben ser también bitangentes el círculo y la cónica de que se trata.

Investiguemos, pues, las condiciones para que esto último se verifique.

Para ello, designando por $h$ un parámetro arbitrario, tomemos la ecuación

$$(A) \quad \begin{cases} 2(\alpha x + \beta y + \gamma)\, x - (Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + F) \\ \qquad - h(x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma) = 0, \end{cases}$$

que representa todas las cónicas que pasan por los puntos de intersección del círculo (4) con la cónica (5).

Pues para que las dos curvas, (4) y (5), sean bitangentes, necesítase y basta que la ecuación $(A)$ represente dos rectas en coincidencia una con otra, ó que el primer miembro de la ecuación se resuelva en un cuadrado perfecto de la forma $(Kx + Ly + M)^2$. Y, para que á esto haya lugar, necesítase también y basta que se verifiquen las siguientes condiciones:

$$(B)\quad \begin{cases} K^2 = 2\alpha - A - h; \quad L^2 = -(A' + h); \quad M^2 = 2h\gamma - F; \\ KL = \beta; \quad KM = \gamma + h\alpha - C; \quad \text{y} \quad LM = h\beta - C'. \end{cases}$$

De estas expresiones condicionales, las tres primeras sirven para determinar los valores de $K$, $L$ y $M$. Y de las cuarta y sexta, por eliminación de $K$, $L$ y $M$, con auxilio de las tres primeras; y, después, de la quinta, por eliminación de las mismas cantidades, valiéndose ahora para ello de las citadas cuarta y sexta, en unión de la segunda, se desprenden las relaciones siguientes:

$$(6)\quad \begin{cases} \beta^2 = -(2\alpha - A - h)(A' + h), \\ (h\beta - C')^2 = -(A' + h)(2h\gamma - F), \\ \beta(h\beta - C') = -(A' + h)(\gamma - C + h\alpha), \end{cases}$$

como expresión de las condiciones de bitangencia del círculo y de la cúbica considerada.

De la primera y de la segunda de estas tres ecuaciones se deduce, por de pronto, que

$$(7)\quad \alpha = \frac{1}{2}(A + h) - \frac{\beta^2}{2(A' + h)}, \quad \text{y}$$

$$(8)\quad \gamma = \frac{1}{2h}\left[F - \frac{(h\beta - C')^2}{A' + h}\right].$$

Y de la última, poniendo en ella por $\alpha$ y $\gamma$ sus valores, acabados de obtener, esta otra:

$$(9)\quad -\frac{C'^2}{2h(A' + h)} + \frac{F}{2h} - C + \frac{h}{2}(A + h) = 0;$$

equivalente á esta otra:

$$(10) \quad h^2(A+h)(A'+h)+F(A'+h)-2Ch(A'+h)-C'^2=0.$$

De la cual se deducen, en general, cuatro valores para $h$: los cuales, á su vez, sucesivamente sustituídos en las (7) y (8), determinarán los que deben poseer las constantes $\alpha$ y $\gamma$, que figuran en la ecuación del círculo (4), para que éste sea bitangente á la cúbica considerada, permaneciendo, después de todo, arbitraria la constante $\beta$.

De donde resulta demostrado que *existen*, en general, *cuatro series de círculos, bitangentes á la cúbica circular considerada, de cada una de las cuales es, por lo tanto, envolvente la misma cúbica.*

Además: como $\alpha$ y $\beta$ representan las coordenadas del centro del círculo (4), la ecuación (7) nos enseña también que *los centros de los círculos de cada serie se hallan situados sobre una misma parábola.*

El análisis anterior pide modificación cuando *cero* sea raíz de la ecuación (10), ó cuando $FA'=C'^2$.

De las ecuaciones (6) dedúcense entonces estas otras:

$$\alpha=\frac{1}{2}A-\frac{\beta^2}{2A'};\quad \beta C'=A'(\gamma-C);\quad \text{y}\quad FA'=C'^2.$$

La primera de las cuales determina el lugar geométrico de los centros de una serie de círculos, bitangentes á la cúbica á que estos mismos círculos se refieren; y la segunda el valor de $\gamma$.

Cuando $-A'$ sea raíz de (10), ó cuando $C'=0$, también pide modificación el análisis precedente, deduciéndose entonces de las ecuaciones *(B)* estos resultados:

$$\beta=0,\quad \text{y}\quad (2\alpha-A+A')(2A'\gamma+F)=-(\gamma-C-A'\alpha)^2:$$

el primero de los cuales expresa que, en este caso, los círculos bitangentes de la serie tienen sus centros sobre el eje de las abscisas, reduciéndose la parábola á dos rectas, ambas en coincidencia con el mismo eje; y el segundo determina el valor de $\gamma$, del cual dependen los de los radios de aquellos círculos.

**44.** Sustituyendo en la ecuación (4) la $\gamma$ por su valor, tomado de la (8), la de los círculos bitangentes á la cúbica considerada será ésta:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \frac{1}{h}\left[F - \frac{(h\beta - C')^2}{A' + h}\right] = 0:$$

ó, llevando en cuenta la ecuación (7),

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \dfrac{2C'\beta}{A' + h} - \dfrac{F}{h} + \dfrac{C'^2}{h(A' + h)} \\ - h[2\alpha - (A + h)] = 0: \end{array} \right.$$

á condición, bien entendido, de no ser $h$ igual á *cero*, ni tampoco igual á $-A'$.

Si, por excepción, $h = 0$, la ecuación de los círculos bitangentes, deducida de la (4),

$$x^2 + y^2 = 2(\alpha x + \beta y + \gamma),$$

y de la condicional, pág. 38, $\beta C' = A'(\gamma - C)$, por eliminación de la $\gamma$, será ésta:

$$(12)\qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 2C + \beta\frac{2C'}{A'}.$$

No debiendo en ningún caso olvídar que en estas varias ecuaciones $\alpha$ y $\beta$ representan cantidades, positivas ó negativas, que satisfacen á la (7), y $h$ una raíz de la (10).

**45.** Todos los círculos (11), correspondientes á una misma raíz de la ecuación (10), diferente de 0 y de $-A'$, cortan ortogonalmente al círculo, determinado por la siguiente:

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{c} X^2 + Y^2 + \dfrac{2C'Y}{A' + h} + 2hX + \dfrac{F}{h} \\ - \dfrac{C'^2}{h(A' + h)} - h(A + h) = 0, \end{array} \right.$$

siempre que no sea nulo el radio de este último círculo: cosa de sencilla

comprobación, formando las derivadas $y'$ é $Y'$, de $y$ é $Y$, sustituyéndolas en la expresión condicional $y'Y' + 1 = 0$, y contando con las ecuaciones (11) y (13).

Y, además: como la (13) no depende de $\alpha$ ni de $\beta$, conclúyese que el círculo á que se refiere y representa es constante con respecto á todos los círculos (11), cuyos centros corresponden á una de las parábolas comprendidas en la ecuación (7). Deduciéndose del mismo modo y con igual facilidad que los círculos (12) cortan también ortogonalmente al representado por la ecuación

$$X^2 + Y^2 + \frac{2C'}{A'}Y + 2C = 0. \tag{14}$$

Luego *todos los círculos bitangentes á la cúbica circular* (3), *que tienen sus centros sobre la misma parábola* (7), *cortan ortogonalmente á un círculo fijo.*

**46.** Sustituyendo en la ecuación

$$Kx + Ly + M = 0$$

$K$, $L$ y $M$ por sus valores, dados por las ecuaciones segunda, cuarta y sexta de las ($B$), dedúcese esta otra:

$$\beta x - (A' + h)y + h\beta - C' = 0,$$

que representa la recta, definida por los dos puntos de contacto del círculo bitangente con la cúbica, y correspondiente á valores determinados de $h$ y $\beta$.

De la cual se desprende además la siguiente proposición, hasta ahora inadvertida, creo: *todas las rectas que pasan por los dos puntos de contacto de los círculos bitangentes á la cúbica, y pertenecientes á la misma serie, se cortan en un punto fijo, que tiene por coordenadas* $-h$ y $-\frac{C'}{A'+h}$.

**47.** Trasladando el origen de las coordenadas al centro del círculo (13), para lo cual es menester que sean

$$x = x' - 2h \quad \text{é} \quad y = y' - \frac{2C'}{A' + h},$$

la ecuación (11) se transforma en la que sigue:

$$x'^2 + y'^2 - 4hx' - 2\alpha x' - \frac{4C'}{A'+h}y' - 2\beta y' - \frac{F}{h}$$

$$+ \frac{C'}{h(A'+h)} + h\alpha + h(A+h) = 0.$$

Y aplicando al círculo representado por esta ecuación la transformación por *radios recíprocos*, ó, lo que es igual, poniendo

$$x' = \frac{kx_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y' = \frac{ky_1}{x_1^2 + y_1^2},$$

$$k = -\frac{F}{h} + \frac{C'}{h(A'+h)} + h\alpha + h(A+h),$$

infiérese que

$$x_1^2 + y_1^2 - 4hx_1 - 2\alpha x_1 - \frac{4C'}{A'+h}y_1 - 2\beta y_1 - \frac{F}{h}$$

$$+ \frac{C'}{h(A'+h)} + h\alpha + h(A+h) = 0:$$

ecuación que coincide con la que se trataba de transformar.

Análogo cálculo, aplicado á las ecuaciones (12) y (14), nos daría la misma conclusión.

Luego los círculos de que es envolvente la cúbica circular (3) no experimentan alteración alguna, ni tampoco, en consecuencia, la misma cúbica, cuando ésta se transforma por *radios recíprocos*, tomando por centros de transformación los centros *de los círculos representados por la ecuación* (13), *ó por las* (13) *y* (14), *cuando* cero *es raíz de la* (10). De donde resulta que las *cúbicas circulares* son *analagmáticas:* nombre aplicado á todas las curvas que coinciden con alguna de sus transformadas por radios recíprocos.

48. Con el nombre de *focos* de una curva designó PLUCKER los puntos por los cuales se pueden trazar dos tangentes á ella, cuyos coeficientes angulares sean $+i$ y $-i$. Cuando una de estas tangentes, ó las dos, tocan á la curva en lo infinito, llámase *singular* el foco correspondiente:

aplicándose el calificativo de *ordinarios* á los focos de donde parten tangentes, cuyos puntos de contacto con la curva se encuentran situados á distancias finitas de los mismos.

En la Geometría Analítica establécense reglas generales para determinar el número de focos de cada especie: número dependiente de la *clase* de la curva, que, tratándose de las cúbicas circulares, es igual á *seis* cuando no poseen ningún *punto doble*, á *cuatro* cuando tienen uno, y á *tres* cuando tienen un *punto de retroceso*. En el primer caso, el número de focos ordinarios es igual á 16, cuatro de los cuales son reales; á cuatro en el segundo, contándose entre ellos dos reales; y á uno, también real, en el tercero.

Para demostrar del modo menos complicado posible esta tan interesante proposición, recordemos (SALMON, *Higher Curves planes*, ed. 3.ª, número 67) que, en términos generales, la *clase* $n$, de una curva plana algebraica, se halla determinada por la siguiente fórmula de PLUCKER, cuyo fundamento razonadamente expondremos como nota complementaria de esta obra:

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3\nu.$$

En la cual representan: $m$ el grado ú *orden* de la curva; $\delta$ el número de sus *nodos;* y $\nu$ el de sus puntos de *retroceso*. Tratándose, en particular, de las cúbicas, $m$ será igual á 3; y, por lo tanto, $n = 6$, si la cúbica no posee ningún *punto doble* ($\delta = 0$ y $\nu = 0$); á 4, cuando posea uno ($\delta = 1$ y $\nu = 0$); y á 3 cuando presente un *punto de retroceso* ($\delta = 0$ y $\nu = 1$).

Fácil es ver además que, poniendo en la ecuación de una curva $C$

$$(\alpha) \qquad y = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{x_1},$$

aquella curva se transforma en otra, $C'$, cuyos *nodos* y *puntos de retroceso* son los puntos en que se transforman los de iguales nombres de la primera, y que será, por lo tanto, de la misma *clase*.

De las ecuaciones ($\alpha$) se deduce, en efecto, esta otra:

$$(\beta) \qquad \frac{dy}{dx} = y_1 - \frac{dy_1}{dx_1} x_1:$$

según la cual $\frac{dy_1}{dx_1}$ tendrá tantos valores en el punto $(x_1, y_1)$ como tenga $\frac{dy}{dx}$ en el $(x, y)$: con la particularidad, además, de que, si en este punto la derivada $\frac{dy}{dx}$ admite valores iguales, también en el $(x_1, y_1)$ los admitirá la $\frac{dy_1}{dx_1}$.

De análogo modo: si en la ecuación de las rectas

$$Y = iX + A,$$

ponemos

$$(\gamma) \qquad Y = \frac{Y_1}{X_1} \quad \text{y} \quad X = \frac{1}{X_1},$$

aquellas rectas se transformarán en estas otras, determinadas por la ecuación $Y_1 = i + AX_1$, y que pasan por el punto $(0, i)$. Y como, teniendo en cuenta las relaciones $(\alpha)$, $(\beta)$ y $(\gamma)$, la ecuación de la tangente á la curva $C$, en el punto $(x, y)$,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

se transforma en la

$$Y_1 - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(X_1 - x_1),$$

de la tangente á la $C'$ en el $(x_1, y_1)$, resulta, en conclusión, que las tangentes á la primera curva, cuyo coeficiente angular es igual á $i$, se transforman en las tangentes á la segunda, dirigidas por el mencionado punto $(0, i)$. Pero el número de tangentes á la curva $C'$, que pasan por el punto $(0, i)$, es igual á $n$ cuando este punto no pertenece á la curva; á $n - 1$, cuando $(0, i)$ coincide con un punto ordinario de la misma; á $n - 2$, cuando coincide con un punto doble, etc., etc.; según también al final de este libro nos reservamos demostrar. Luego el número de tangentes á $C$, de coeficiente angular $i$, será también igual á $n$ en el primer caso; á $n - 1$ en el segundo; á $n - 2$ en el tercero, etc.

Aplicando tras de esto la transformación $(\alpha)$ á la ecuación de las cúbicas circulares, hállase la siguiente:

$$F x_1^3 + A' y_1^2 x_1 + 2C' y_1 x_1^2 + 2C x_1^2 + A x_1 = 1 + y_1^2,$$

por medio de la cual se ve que $(0, i)$, es un punto ordinario de la curva que representa.

Luego el número de tangentes á la cúbica circular, con coeficiente angular igual á $i$, es $n - 1$: representando, cumo en el caso general, por $n$ la *clase* de la cúbica considerada. Pero como una de estas tangentes debe coincidir con la asíntota, de coeficiente angular $i$, que, según ya se vió en el Núm. **42**. posee la curva, el número de las mismas, con el expresado coeficiente angular $i$, y puntos de contacto á distancia finita, se reduce á $n - 2$.

Y por los mismos pasos se concluye también que $n - 2$ es asimismo el número de tangentes á la cúbica circular, con los puntos de contacto á distancia finita, cuando el coeficiente angular es $-i$.

Las tangentes del primer grupo cortan á las del segundo en $(n - 2)^2$ puntos, que serán precisamente los *focos ordinarios* de la *cúbica circular* á que $n$ en particular se refiera: 16, 4 ó 1 solamente, conforme sea $n$ igual á 6, 4 ó 3.

De los focos á que nos referimos serán *reales* los que resultan de la intersección de cada tangente del primer grupo con su *conjugada* del segundo: *cuatro*, en consecuencia, cuando la cúbica carezca de *puntos dobles; dos*, cuando posea un *nodo;* y *uno*, cuando presente un *punto de retroceso.*

Los focos *singulares* reales resultan de la intersección de las *asíntotas conjugadas*, ó susceptibles de permutación por el cambio de $i$ en $-i$. Por referencia á la ecuación (3), estas asíntotas tienen por ecuación

$$y = \pm i \left[x - \frac{1}{2}(A - A')\right],$$

hallándose definido el *foco singular real* por las coordenadas

$$\left[\frac{1}{2}(A - A'), 0\right].$$

**49.** Tras de lo que precede, pasemos á determinar los *focos ordinarios* de las cúbicas circulares.

Si $x_1$ é $y_1$ representan las coordenadas de uno de estos focos, las rectas cuyas ecuaciones sean

$$y - y_1 = i\,(x - x_1) \qquad \text{é} \qquad y - y_1 = -\,i\,(x - x_1)$$

serán tangentes á la curva. Luego el círculo imaginario

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 0,$$

que comprende á las dos, debe ser bitangente á la misma curva, y hallarse, en consecuencia, comprendido también entre los círculos representados por la ecuación (11), cuando *cero* no sea raíz de (10), ó por las (11) y (12), cuando lo sea.

En el primero de estos casos (y de análogo modo puede tratarse el segundo), de la identidad

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - \frac{2\,C'\,\beta}{A' + h} - 2h\alpha - \frac{F}{h}$$

$$+ \frac{C'^2}{h\,(A' + h)} + h\,(A + h) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

se deduce que

$$x_1 = \alpha \qquad \text{é} \qquad y_1 = \beta;$$

y también

$$x_1^2 + y_1^2 + \frac{2\,C'\,y_1}{A' + h} + 2hx_1 + \frac{F}{h} - \frac{C'^2}{h\,(A' + h)} - h\,(A + h) = 0.$$

Comparando esta ecuación con la (13), conclúyese que los focos están situados sobre las circunferencias de los círculos representados por la última ecuación. Luego *los puntos de intersección de cada una de las parábolas representadas por la* (7), *con el círculo correspondiente por la* (13), *son los focos ordinarios de la curva.*—Teorema descubierto por HART, según puede verse en SALMON *(Higher planes curves*, 3.ª ed., n.$^{os}$ 168 y 271).

**50.** Anteriormente vimos que, cuando $h = -A'$ es raíz de (10), una de las parábolas (7) se reduce á dos rectas, ambas coincidentes con el eje de las abscisas, sobre el cual pueden, en tal caso, existir *focos* que pasamos á determinar.

Adviértase para ello que, si el punto $(x_1, 0)$ fuese un foco de (3), cada recta determinada por la ecuación

$$y = \pm i(x - x_1)$$

debe representar una tangente á esta curva, á la cual cortará, en consecuencia, en dos puntos coincidentes. Y como los valores de $x$ en los puntos de intersección de estas rectas con la cúbica se hallan definidos por la ecuación

$$(2x_1 - A + A')x^2 - (x_1^2 + 2A'x_1 + C)x + A'x_1^2 - F = 0,$$

cuyas dos raíces han de ser iguales, resulta esta otra:

$$(15) \qquad x_1^4 - 4A'x_1^3 + (2C + 4AA')x_1^2 + (8F + 4CA')x_1 + C^2 + 4F(A' - A) = 0.$$

La cual sirve para determinar el valor de $x_1$ y muestra que sobre el eje de las abscisas existen en este caso, por regla general, *cuatro focos*.

**51.** Tratemos ahora especialmente de las *cúbicas*, además de *circulares, unicursales*. Estas últimas curvas, como ya es sabido, poseen un *punto doble* que, tomado por origen de las coordenadas, permite reducir siempre la ecuación (2) á la forma

$$(16) \qquad x(x^2 + y^2) = P_2 x^2 + Q_2 xy + R_2 y^2.$$

Y si después se traslada el origen de las coordenadas al punto $(0, \frac{1}{2} Q_2)$, la última ecuación se reduce á la forma (3), en la cual

$$A = P_2;\ A' = R_2;\ 2C = \frac{1}{4} Q^2{}_2;\ 2C' = R_2 Q_2;\ \text{y}\ F = \frac{1}{4} R_2 Q^2{}_2.$$

Aplicando tras de esto la ecuación (10) á la determinación de $h$, obtiénese la siguiente:

$$h^4 + h^3 (P_2 + R_2) + h^2 (P_2 R_2 - \frac{1}{4} Q_2^2) = 0.$$

De donde se infiere que, en este caso, dos, por lo menos, de las series de círculos, consideradas en el Núm. 43, y de que la curva es envolvente, coinciden.

Adviértase además que los círculos que pasan por el *punto doble* de la curva, y son tangentes á la misma curva en otros puntos, tienen *cuatro* puntos comunes con la cúbica, reunidos en *dos;* y por eso el análisis del Núm. 43 determina, no solamente los círculos bitangentes, sino también los que, siendo no más que tangentes, pasan por el *punto doble.* Luego la curva es, en el caso de que se trata, envolvente de *tres series* de círculos, en general: bitangentes cuando no pasan por el *punto doble;* y nada más que tangentes cuando pasan por este punto.

Si la cúbica considerada tiene un punto de retroceso, las *series de círculos,* á que venimos refiriéndonos, redúcense á *dos.* Pues derivando dos veces, con relación á $x$, la ecuación (16), y poniendo luego $x = 0$ é $y = 0$, los valores de $y'$ en el origen de las coordenadas se hallan representados por la expresión

$$y'_0 = \frac{-Q_2 \pm \sqrt{Q_2^2 - 4 P_2 R_2}}{2 R_2}.$$

Luego las dos tangentes á la curva en este punto coincidirán una con otra, y el punto será de retroceso, si

$$Q_2^2 = 4 P_2 R_2.$$

En cuyo caso la ecuación que determina los valores de $h$ tendrá tres raíces iguales á *cero.*

**52.** El método expuesto en el Núm. 49 para determinar los focos de las *cúbicas circulares,* es siempre aplicable á las curvas de este nombre, sean ó no *unicursales.* Pero, en el caso de serlo, dedúcense de su aplicación soluciones extrañas, ó *pseudofocos,* que es necesario excluir. Lo cual procede de que el método citado, no solamente sirve para determinar los focos propiamente dichos, sino también los puntos por los cuales se puede

trazar á la curva una tangente, cuyo coeficiente sea igual á $+i$ ó $-i$, y otra recta además que pase por el *punto doble*, y cuyo coeficiente angular esté respectivamente representado por $-i$ ó por $+i$. Estas últimas rectas tienen, en efecto, dos puntos comunes con la curva, reunidos en uno, como los tangentes cuyos coeficientes angulares sean $-i$ y $+i$: lo cual constituye el fundamento del método referido. Luego, si $x'$ é $y'$ representan las coordenadas del *punto doble*, el punto $(x_1, y_1)$, hallado por el método referido, no será *foco* cuando, siendo diferente del $(x', y')$, resulte situado sobre cualquiera de las rectas

$$y - y' = \pm i\,(x - x'),$$

que pasan por el *punto doble*, y tienen por coeficientes angulares $+i$ ó $-i$, pero que no pueden ser tangentes á la curva, porque, de serlo, tendrían cuatro puntos comunes con ella: lo que es absurdo.

Y como por el *punto doble* no pueden trazarse rectas que sean tangentes á la curva en un punto diferente de éste, porque tales rectas tendrían más de tres puntos comunes con la curva, conclúyese también que aquel punto solamente merecerá el nombre de foco cuando las tangentes en este punto tengan por coeficientes $+i$ y $-i$.

53. Para aplicar las doctrinas acabadas de exponer, consideremos, en primer lugar, la *estrofoide recta*, que tiene por ecuación (Núm. 23)

$$(x^2 + y^2)\,x = a\,(x^2 - y^2),$$

y de la cual, cotejada con la (3), se deduce que

$$A = a, \quad A' = -a, \quad C = 0, \quad C' = 0 \quad y \quad F = 0.$$

Valores que, sustituídos en la (10), dan por resultado

$$h = 0, \quad h = a \quad y \quad h = -a.$$

A la primera solución corresponden la parábola

$$\alpha = \frac{1}{2}\,a + \frac{\beta^2}{2a},$$

y los círculos, dados por las fórmulas (12) y (14),

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2, \quad \text{y} \quad X^2+Y^2=0.$$

La curva, en este caso, es la envolvente de los círculos, cuyos centros coinciden con la parábola, representados por la primera de estas ecuaciones: no correspondiendo ningún foco á la intersección de la parábola con el círculo $X^2+Y^2=0$, porque este círculo equivale á las dos rectas $Y=\pm iX$, que pasan por el punto doble de la curva.

A la solución $h=-a$ corresponden la parábola

$$\alpha=\frac{\beta^2}{4a},$$

y los círculos

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2a\alpha=0 \quad \text{y} \quad X^2+Y^2-2aX=0.$$

Y la curva, como en el caso anterior, es la envolvente de los círculos representados por la primera de estas dos ecuaciones, cuyos centros describen la parábola: verificándose además que aquella parábola y el círculo á que corresponde la última ecuación se cortan en los puntos $(0,0)$ y $[-2a, \pm 2ai\sqrt{2}]$. El primero de estos puntos es *doble* y no puede ser *foco;* y los otros dos son los focos imaginarios de la curva.

A la solución $h=a$ corresponde la recta $\beta=0$, resultando entonces definidos los focos situados en esta línea por la ecuación

$$x_1^4+4ax_1^3-4a^2x_1^2=0.$$

De la cual se deduce que las coordenadas de los focos reales de la estrofoide son

$$[-2a(1\pm\sqrt{2}), 0].$$

Como segunda aplicación, consideremos la *cisoide de Diocles,*

$$(x^2+y^2)x=2ay^2.$$

De la ecuación (10) se desprenden entonces para $h$ estos valores:

$$h = 0, \quad \text{y} \quad h = -2a.$$

Al primero de los cuales corresponden la parábola

$$\alpha = -\frac{\beta^2}{4a},$$

y los círculos

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{y} \quad X^2 + Y^2 = 0:$$

siendo la cúbica ahora considerada envolvente del sistema de círculos por la primera de estas dos ecuaciones representados.

De la intersección con la parábola del círculo $X^2 + Y^2 = 0$, no resultan ahora *focos*, porque el círculo equivale á las dos rectas $Y = \pm iX$, que pasan por el origen.

En cambio, si $h = -2a$, hallaremos que $\beta = 0$, y los focos resultan determinados por la ecuación

$$x_1^4 - 8a x_1^3 = 0:$$

según la cual, la curva posee un foco, en el punto $(8a, 0)$.

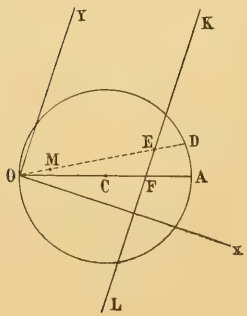



Figura 11.

**54.** Continuando el estudio de las *cúbicas circulares unicursales*, demostremos ahora que estas curvas pertenecen á la clase de las *cisoides* (Núm. **17**), y que, por lo tanto, pueden obtenerse por medio de la construcción indicada en el mismo número, para obtener las cisoides en general, reemplazando la cónica, de que entonces se habló, por un simple círculo.

Representemos, en efecto, por $C$ (fig. 11) el centro de una circunferencia que tenga por ecuación

$$x^2 + y^2 + (R_2 - P_2)\,x - Q_2 y = 0;$$

y sean, además, $KL$ una recta fija, definida por la ecuación $x = -R_2$, y $OD$ otra recta, móvil, que pase por el punto $O$, origen de las coordenadas. Si tras de esto señalamos el punto $M$, de manera que $OM$ sea igual á $ED$, el lugar geométrico de las distintas posiciones de $M$, cuando la recta $OD$ varía de situación, girando alrededor de $O$, será la cúbica representada por la ecuación (16).

En efecto: si $\rho_1 = OD$, $\rho_2 = OE$, y $\rho = OM$, hallaremos, representando por $\theta$ el ángulo de $MO$ con el eje de las abscisas, que

$$\rho = \rho_1 - \rho_2; \quad \rho_1 + (R_2 - P_2)\cos\theta - Q_2\operatorname{sen}\theta = 0; \quad \text{y} \quad \rho_2\cos\theta = -R_2.$$

Y, eliminando $\rho_1$ y $\rho_2$ entre estas ecuaciones, y contando con que $x = \rho\cos\theta$ é $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, obtiénese la ecuación (16) de las cúbicas circulares unicursales.

La forma de la curva así resultante depende de la posición de la recta fija $KL$. Repitiendo, á título de ejemplo, lo ya expuesto en términos generales al tratar de las cisoides en el Núm. **17**, advertiremos que, si aquella recta corta á la circunferencia $ODA$, la curva poseerá un punto doble en $O$, y las tangentes á la curva en este punto pasarán por los puntos de intersección de $KL$ con la circunferencia. La cual será una *estrofoide*, si $KL$ pasa por el centro $C$ de la circunferencia; ó semejante, en la forma, á la estrofoide en cualquier otro caso. Si la recta $KL$ es tangente á la circunferencia, las intersecciones de $KL$ coinciden, y la curva posee un *punto de retroceso* en $O$: caso de la cisoide. Y si la recta $KL$ no corta á la circunferencia ni le es tangente, $O$ será, ciertamente, un punto de la curva; pero, en los alrededores de este punto, la curva resultará imaginaria. El punto $O$ será, pues, entonces un *punto aislado* de la curva resultante.

Adviértase asimismo que, por ser

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dOD}{d\theta} - \frac{dOE}{d\theta},$$

el método explicado anteriormente para trazar las tangentes á la cisoide, á la estrofoide y á la trisectriz de Maclaurin es aplicable á todas las *cúbicas unicursales circulares*.

**55.** La rectificación de las curvas que estamos considerando depende generalmente de integrales elípticas, como ahora veremos.

Poniendo en la ecuación (16) de la curva $y = tx$, resulta que

$$x = \frac{F(t)}{t^2 + 1}, \quad \text{é} \quad y = \frac{tF(t)}{t^2 + 1};$$

expresiones en las cuales

$$F(t) = P_2 + Q_2 t + R_2 t^2.$$

De donde se deduce que

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{[F(t)]^2 - 2tF(t)F'(t) + (1 + t^2)[F'(t)]^2}{(t^2 + 1)^2}.$$

En la expresión de $ds$ entra, pues, la raíz de un polinomio de *cuarto grado* relativamente á $t$, y, por tanto, el valor de $s$ depende de las integrales elípticas, que en el caso de la estrofoide recta y en el de la trisectriz de Maclaurin fueron ya, poco más atrás, reducidas á integrales normales de Legendre.

Y en el particular de que el numerador de $\frac{ds^2}{dt^2}$ admita como factor un polinomio de segundo grado, relativamente á $t$, que sea cuadrado perfecto, se obtiene $s$ por medio de funciones elementales, conforme se vió en el caso de la cisoide.

56. Terminaremos cuanto nos parece en esta ocasión pertinente decir á propósito de las cúbicas unicursales circulares, mencionando dos trabajos sobre tan interesante asunto, presentados por Longchamps á la *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, en los Congresos de Grenoble (1885) y de Nancy (1886). En el primero de estos trabajos demuéstrase que *las tangentes á la circunferencia* DAO, *en el punto* D, *y á la cúbica en el* M, *cortan á la recta* KL *en dos puntos equidistantes del* E; y en el segundo propónese un método para construir los puntos de inflexión de las cúbicas unicursales circulares rectas. En el número 5 fué considerado el caso particular del teorema anterior correspondiente á la cisoide.

# CAPÍTULO SEGUNDO

## CÚBICAS NOTABLES

(Continuación).

### I

### EL FOLIUM DE DESCARTES

**57.** Dase el nombre de *folium*, ú *hoja de Descartes*, á la curva cuya ecuación, en coordenadas cartesianas, es

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0. \tag{1}$$

Curva de que, antes que ningún otro geómetra, habló Descartes al Padre Mersenne, en sus cartas del 18 de Enero y 23 de Agosto de 1638 *(Oeuvres, ed. V. Cousin*, 1824, t. VII, p. 11), en la primera de las cuales desafiaba á Fermat á encontrar por su método las tangentes á esta curva, y en la segunda expuso la solución del problema por él discurrida.

Ocupáronse también en el estudio de esta curva ROBERVAL, que le dió el nombre de *galand* (antiguo vocablo francés, sinónimo de *noeud* de *ruband) ó flor de jazmín;* FERMAT, en carta dirigida también al P. Mersenne, recientemente publicada en el *Journal de Mathématiques Spéciales,* 1883, p. 16, donde determinó las tangentes por dos distintos métodos; JUAN BERNOULLI *(Opera omnia,* t. III, p. 403), que precisó la posición de su asíntota y halló los valores de las áreas; el Marqués de L'HÔPITAL, en carta á Huygens, de 1693, á propósito asimismo del último de estos problemas; MACLAURIN, en su *Treatise of Fluxions (p. 198 del tomo* I *de la traducción francesa del P. Pesenas)*, que la comparó con la trisectriz, considerada en el número 34; etc., etc.

**58.** Como la ecuación del *folium* no se altera cuando se cambian $x$ por $y$

é $y$ por $x$, resulta que la bisectriz del ángulo de los ejes coordenados es un eje de simetría de la curva. Conviene, pues, efectuar un cambio de aquellos ejes, tomando la bisectriz como nuevo eje de las abscisas. Para lo cual sirven las fórmulas

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} \quad \text{é} \quad y = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}},$$

que transforman la primitiva ecuación de la curva en esta otra:

$$Y^2 = \frac{X^2 (3a - \sqrt{2}\, X)}{3 (a + \sqrt{2}\, X)}.$$

De cuya consideración fácilmente se desprende que la curva tiene la forma indicada en la fig. 12; con un *punto doble* en $O$; con la recta $DL$, cuya ecuación es

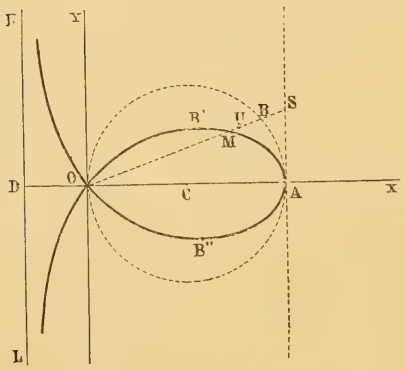


Figura 12.

$$X = OD = -\frac{a}{\sqrt{2}},$$

como asíntota; y el vértice $A$, situado á la distancia del origen $O$, igual á $\frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Poniendo $Y' = 0$ en la ecuación

$$2 Y Y' (a + \sqrt{2}\, X) + \sqrt{2}\, Y^2 = X (2a - \sqrt{2}\, X),$$

y eliminando después $Y$ por medio de la ecuación de la curva, hállase que

$$X = \pm a \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Al primero de estos valores de $X$ corresponden los puntos $B'$ y $B''$, cuya ordenada $Y$ es máxima, en absoluto; y al segundo corresponden valores imaginarios de $Y$.

Y si en la ecuación anterior ponemos por $Y$ su valor en $X$, y hacemos luego $X = 0$, nos resultará $Y' = \pm 1$: lo cual prueba que las tangentes á la curva, en el punto doble $O$, forman ángulos de $45^0$ y $-45^0$ con el eje de la misma curva, y coinciden, por lo tanto, con los ejes de las coordenadas á que antes se hallaba referida. (N.° **57**).

ROBERVAL fué el primer geómetra que procuró definir la forma del folium de Descartes; pero, conforme advierte P. TANNERY *(Intermédiaire des Mathématiciens*, t. IV, p. 126), ni él ni Descartes echaron de ver que la curva se extiende hasta lo infinito: circunstancia notada, no sabemos si con antelación á los demás geómetras, por JUAN BERNOULLI *(l. c)*, quien logró determinar también su asíntota real.

**59**. La ecuación del *folium*, referida á coordenadas polares, es

$$\rho = \frac{3a\,(2\cos^2\theta - 1)}{\sqrt{2}\,(3\cos\theta - 2\cos^3\theta)}.$$

De la cual se deduce un procedimiento sencillo de construir la curva, escribiéndola del modo siguiente:

$$\rho = \frac{\dfrac{b}{\cos\theta}\left(2b\cos\theta - \dfrac{b}{\cos\theta}\right)}{\dfrac{3b}{\cos\theta} - 2b\cos\theta},$$

donde $b = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$.

Tracemos, en efecto, una circunferencia de centro $C$ (fig. 12) y radio igual á $\frac{1}{2}\,b$; una tangente á esta circunferencia en el punto $A$; y la recta variable $OS$. Y tomando después sobre esta recta el segmento $BU$, igual á $BS$, hallaremos, representando por $\theta$ el ángulo $SOA$, que

$$OS = \frac{b}{\cos\theta} \quad \text{y} \quad OB = b\cos\theta.$$

En consecuencia:

$$OU = OB - (OS - OB) = 2b\cos\theta - \frac{b}{\cos\theta}, \quad \text{y}$$

$$OS + US = OS + 2(OS - OB) = \frac{3b}{\cos\theta} - 2b\cos\theta.$$

Luego

$$\rho = \frac{OS \cdot OU}{OS + US}.$$

Para construir, pues, el punto $M$ de la curva, contenido en la recta $OS$, basta construir una cuarta proporcional á las tres rectas

$$OS,\ OU \quad \text{y} \quad OS + US.$$

**60.** A cada *folium de Descartes* corresponde una *trisectriz de Maclaurin*, cuyas ordenadas guardan con las del folium la relación constante de $\sqrt{3}$ á 1. (MACLAURIN, *l. c.)*

En efecto, si en la ecuación (Núm. **35**) de la *trisectriz*,

$$y^2 = X^2 \frac{3a_1 + X}{a_1 - X},$$

ponemos

$$a_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}},$$

se deduce esta otra:

$$y^2 = \frac{X^2(3a - \sqrt{2}\,X)}{a + \sqrt{2}\,X}.$$

Y, comparando esta ecuación con la del *folium*, renglones antes considerada, concluye también que

$$\frac{Y^2}{y^2} = \frac{1}{3}, \quad \text{ó} \quad y = \sqrt{3}\,Y.$$

El folium y la trisectriz que acabamos de considerar poseen la misma asíntota y el mismo eje, siendo además la subnormal de la segunda triple de la subnormal de la primera.

**61.** El folium de Descartes es una curva *unicursal*. Poniendo en (1) $y = tx$, obtiénense las fórmulas que dan los valores de $x$ é $y$ en función del parámetro $t$:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3} \quad \text{é} \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

Y por medio de estas fórmulas vese, como en el número **32**, que los valores de $t$, en los puntos en que la recta, cuya ecuación es

$$ux + vy = 1,$$

corta al folium, satisfacen á la condición

$$t_1 t_2 t_3 = -1.$$

Si la recta pasa por un punto de inflexión de la curva, en este punto se verificará que $t_1 = t_2 = t_3$; y, en consecuencia, $t_1^3 + 1 = 0$. Ecuación de que se desprenden tres distintos valores para $t_1$, á los cuales corresponden tres puntos de inflexión: uno real y dos imaginarios, situados todos en lo infinito.

**62.** Para hallar el área limitada por un arco del folium, por el eje de la curva, y por las paralelas al eje de las ordenadas que pasan por los puntos cuyas abscisas son $X_0$ y $X_1$, emplearemos la expresión

$$A = \int_{X_0}^{X_1} X \sqrt{\frac{3a - \sqrt{2}\,X}{a + \sqrt{2}\,X}}\, dX;$$

de la cual, poniendo

$$\frac{3a - \sqrt{2}\,X}{a + \sqrt{2}\,X} = z,$$

é integrando, resulta que

$$A = -\frac{4a^2}{\sqrt{3}} \left[ \frac{{x_1}^3}{(1 + {x_1}^2)^2} - \frac{{x_0}^3}{(1 + {x_0}^2)^2} \right],$$

representando por $z_0$ y $z_1$ los valores de $z$ en los puntos cuyas abscisas son $X_0$ y $X_1$.

Si $X_0 = 0$ y $X_1 = \frac{3a}{\sqrt{2}}$, y, por tanto, $z_0 = \sqrt{3}$ y $z_1 = 0$, multiplicando el resultado obtenido por 2, se hallará el valor del área $A_1$, limitada por la parte cerrada de la curva

$$A_1 = \frac{3a^2}{2}.$$

Y poniendo $X_0 = 0$ y $X_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, lo cual exige que sean $z_0 = \sqrt{3}$ y $z_1 = \infty$, con sólo doblar el resultado se verá que el valor del área comprendida entre la curva y su asíntota es también igual á $\frac{3}{2}a^2$.

**63.** Partiendo de la ecuación (1), obtiénese también fácilmente el área $B$, limitada por un arco del folium; por una de las tangentes á la misma curva, en el punto doble 0; y por dos paralelas á la otra.

Poniendo, en efecto, $y = \frac{x^2}{u^2}$ en la ecuación (1), hállase que

$$x^3 + u^6 = 3au^4; \quad \text{y} \quad 2u^5\,du + x^2\,dx = 4au^3\,du$$

Con lo cual

$$\int y\,dx = \int \frac{x^2}{u^2}\,dx = \int (4au\,du - 2u^3\,du) = 2au^2 - \frac{1}{2}u^4 =$$

$$= 2\frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{y^2} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}a\frac{x^2}{y}.$$

De manera que, representando por $x_0$ é $y_0$, y $x_1$ é $y_1$ las coordenadas de las extremidades del arco considerado, hállase, en fin, que

$$B = \frac{1}{2}(x_1 y_1 - x_0 y_0) + \frac{1}{2}a\left(\frac{{x_1}^2}{y_1} - \frac{{x_0}^2}{y_0}\right).$$

Resultado obtenido por JUAN BERNOULLI *(l. c.)* y el Marqués de L'HÔPITAL *(l. c.)*.

## II

### LA ANGUINEA DE NEWTON

64. Newton, en su *Enumeratio linearum tertii ordinis*, publicada en 1701, dió el nombre de *anguinea, ó serpentina,* á la curva que tiene por ecuación

$$x^2 y + aby - a^2 x = 0:$$

curva que constituye una de las *setenta y dos* especies de cúbicas que el gran geómetra enumera en aquel célebre trabajo.

Para estudiarla, supongamos primeramente que $a$ y $b$ poseen el mismo signo. Escribiendo entonces la ecuación bajo la forma

$$y = \frac{a^2 x}{x^2 + ab},$$

y llevando también en cuenta la igualdad

$$y' = \frac{a^2 (ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2},$$

sin dificultad se concluye que la curva (fig. 13) pasa por el origen de las coordenadas; que se extiende indefinidamente en el sentido de las abscisas positivas y negativas; que $O$ es un centro; que sus ordenadas adquieren un valor *máximo* y otro *mínimo* en los puntos $A$ y $B$, correspondientes á las abscisas $x = \sqrt{ab}$ y $x = -\sqrt{ab}$; y que el eje de las abscisas es asíntota suya.

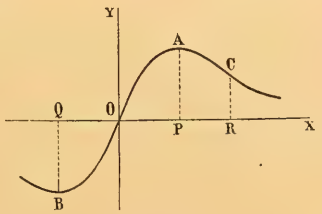


Figura 13.

La igualdad

$$y'' = \frac{2a^2 (x^2 - 3ab)\, x}{(x^2 + ab)^3}$$

muestra parecidamente que son puntos de inflexión de la curva el origen $O$ de las coordenadas, y aquellos otros cuyas abscisas son iguales á $+\sqrt{3ab}$

y $-\sqrt{3ab}$. En el primero de los cuales $y' = \frac{-a}{8b}$, y la tangente á la curva es paralela á la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por vértices el origen de las coordenadas y los puntos $(0, a)$ y $(8b, 0)$.

**65.** La ecuación de la tangente á la curva en el punto $(x, y)$,

$$Y - y = \frac{a^2(ab - x^2)}{(x^2 + ab)^2}(X - x),$$

da, poniendo $X = 0$,

$$Y = \frac{2y^2 x}{a^2}.$$

Y por medio de esta fórmula se puede construir el punto en que la tangente corta el eje de las ordenadas, y, como consecuencia, la tangente.

**66.** La expresión del radio de curvatura es

$$R = \frac{N^3 a^4 x^2}{2(x^2 - 3ab)y^6},$$

representando por $N$ la longitud de la normal á la curva en el punto $(x, y)$.

**67.** El área $A$, limitada por la curva, por el eje de las abscisas y por una recta paralela al eje de las ordenadas, tiene por expresión

$$A = \int_0^x y\,dx = \frac{a^2}{2} \log \frac{x^2 + ab}{ab}.$$

Y, en particular, el área $A_1$, limitada por la curva, por el eje de las abscisas, y por una paralela al de las ordenadas, trazada por el punto donde $y$ es máximo, ó $x = \sqrt{ab}$, se halla representada por la fórmula

$$A_1 = \frac{a^2}{2} \log 2:$$

así como el área, limitada por la curva, por el eje de las abscisas y por la recta paralela al eje de las ordenadas, que pasa por el punto de inflexión, lo está por esta otra:

$$A_2 = a^2 \log 2.$$

Se ve, pues, que el área de $OAP$ es igual á la de $ACRP$.

68. En el caso de que $a$ y $b$ tengan signos contrarios, la forma de la curva será diferente de la hasta ahora considerada, porque entonces $y$ tiende hacia $\infty$ cuando $x$ tiende hacia $\sqrt{-ab}$ y hacia $-\sqrt{-ab}$; y las rectas, dadas por las ecuaciones $x = \sqrt{-ab}$ y $x = -\sqrt{-ab}$, son asíntotas de la curva. Como, además, $y$ es negativa en el intervalo de $x = 0$ á $x = \sqrt{-ab}$ y en el de $x = -\sqrt{-ab}$ á $x = \infty$, y positiva en los otros intervalos, conclúyese sin dificultad que la curva posee la forma indicada en la figura 14, en la cual $OP = \sqrt{-ab}$ y $OQ = -\sqrt{-ab}$, con dos puntos de inflexión imaginarios y uno real en $O$.

69. Cuando $a$ y $b$ sean del mismo signo, hállase ligada la anguinea con el círculo que tiene por ecuación

$$X^2 + Y^2 - \beta X = 0, \quad \text{ó}$$

$$\left(X - \frac{\beta}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{\beta^2}{4},$$

mediante una relación algebraica muy sencilla.

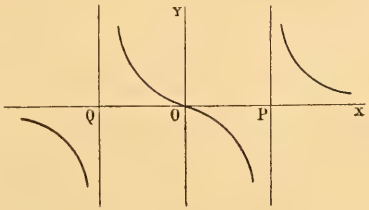



Figura 14.

Supongamos, en efecto, que $\alpha^2 = ab$ y $a^2 = \alpha\beta$, y la ecuación de la anguinea se transformará en esta otra:

$$y = \frac{\alpha\beta x}{x^2 + \alpha^2}.$$

En la cual se transforma asimismo la del círculo, si por $X$ é $Y$ se ponen en ella las siguientes expresiones:

$$(1) \qquad X = \frac{xy}{\alpha} \quad \text{é} \quad Y = y.$$

Luego á cada punto $(X, Y)$ de la circunferencia considerada corresponde otro punto $(x, y)$ de la anguinea, ligado con el primero por medio de las anteriores últimas relaciones.

Además: representando por $KL$ (fig. 15) una recta, dada por la ecuación $y = OL = \alpha$; por $M$ un punto cualquiera de la circunferencia considerada; y por $mP$ y $mB$ otras dos rectas, paralelas á los ejes coordenados, de los triángulos $POM$ y $LOB$, se deduce que

$$\frac{OP}{OL} = \frac{PM}{LB} = \frac{PM}{Pm}; \quad \text{ó} \quad \frac{Y}{\alpha} = \frac{X}{Pm}.$$

Luego las coordenadas, $x = Pm$ é $y = OP = Y$, del punto $m$ satisfacen á las relaciones (1), y, en consecuencia, $m$ será el punto de la anguinea correspondiente al $M$ de la circunferencia. De donde se desprende un procedimiento muy sencillo para construir la primera de estas dos curvas.

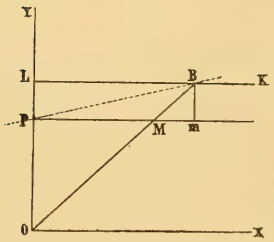


Figura 15.

Más todavía: la ecuación de la tangente á la circunferencia en el $M$ tiene por expresión

$$X_1 - X = \frac{dX}{dy}(Y_1 - y), \quad \text{ó}$$

$$\frac{dX}{dy} = \frac{X_1 - X}{Y_1 - y};$$

y á la anguinea, en el $m$, esta otra:

$$X_1 - x = \frac{dx}{dy}(Y_1 - y), \quad \text{ó} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{X_1 - x}{Y_1 - y}.$$

Y como de la relación $X = \frac{xy}{\alpha}$ se deduce parecidamente que

$$\alpha \frac{dX}{dy} = x + y\frac{dx}{dy},$$

por eliminación de la $X$ y de los coeficientes diferenciales $\frac{dX}{dy}$ y $\frac{dx}{dy}$ entre estas varias ecuaciones, se desprende, finalmente, la que sigue:

$$\frac{y - \alpha}{xy} X_1 + \frac{Y_1}{y} = 1:$$

á la cual deben satisfacer las coordenadas $X_1$ é $Y_1$ del punto de intersección de las dos tangentes consideradas, á la circunferencia en $M$, y en $m$ á la anguinea. Pero la ecuación de la recta que pasa por $P\,(0, y)$ y por $B\,(x, z)$ tiene por ecuación precisamente la que se acaba de deducir: luego aquellas dos tangentes se cortan sobre esta recta. Y, por lo tanto, uniendo con el punto $m$ el de intersección de la tangente á la circunferencia con la recta $PB$, se obtendrá la tangente á la anguinea.

## III

### EL TRIDENTE DE NEWTON

**70.** También comprendió Newton esta curva en su ya mencionada *Enumeratio linearum tertii ordinis*, asignándola por ecuación ésta:

$$y = \frac{x^3 + Bx^2 + Cx + D}{m\,x}.$$

Para hallar la forma del *tridente*, supongamos primeramente que $m$ y $D$ son positivas. En este caso $y$ tiende hacia $\infty$ cuando $x$ tiende hacia 0, pasando por valores positivos; y hacia $-\infty$ cuando $x$ se aproxima á 0, pasando por valores negativos. Luego la curva tiene por asíntota el eje de las

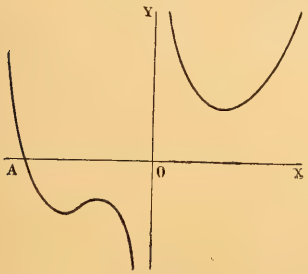



Figura 16.

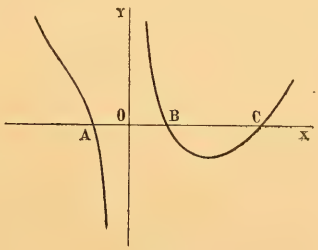



Figura 17.

ordenadas, y, por relación á esta asíntota, la disposición indicada en las figuras 16 y 17.

Cuando $x$ tiende hacia $\pm\infty$, $y$ tiende hacia $+\infty$. Luego las dos ramas

de la curva se extienden indefinidamente, en el sentido de las ordenadas positivas y de las abscisas *positivas* también, la rama de la derecha; y en el sentido de las ordenadas positivas y de las abscisas *negativas*, la rama de la izquierda.

A las rectas paralelas al eje de las abscisas, que tienen por ecuación $y = k$, corta la curva en *un punto* ó en *tres*. Uno de estos puntos hállase siempre situado en la rama izquierda del *tridente*, y los otros dos, simultáneamente, en la misma rama, ó en la opuesta de la derecha. La ecuación que determina las abscisas de estos puntos,

$$x^3 + Bx^2 + (C - mk)\,x + D = 0,$$

tiene, en efecto, por ser $-D$ el producto *negativo* de sus tres raíces, ó dos de éstas imaginarias y una real negativa; ó las tres negativas; ó dos positivas y una negativa.

De análogo modo: las abscisas de los puntos de la curva, donde $y$ es *máxima ó mínima*, dependen de la ecuación

$$y' = \frac{2x^3 + Bx^2 - D}{mx^2} = 0; \quad \text{ó} \quad 2x^3 + Bx^2 - D = 0.$$

La cual, por ser *positivo* el producto de sus tres raíces, y nula la suma de los productos de las mismas, tomadas de dos en dos, ó tiene dos raíces imaginarias y una positiva, ó dos negativas y positiva la restante. Luego uno de aquellos puntos pertenece siempre á la rama colocada á la derecha del eje de las ordenadas; y los otros, cuando existen, pertenecen ambos á la rama situada á la izquierda del eje.

Por ser

$$y'' = \frac{2(x^3 + D)}{mx^3},$$

vese que la curva tiene un punto de inflexión real, cuyas coordenadas son

$$x = -\sqrt[3]{D} \quad \text{é} \quad y = \frac{C - B\sqrt[3]{D}}{m}.$$

En cuanto precede hemos supuesto que $m$ y $D$ eran positivas. Pero, si

una ó ambas cantidades son negativas, fácil es ver que la curva conserva la misma forma, y que únicamente varía su posición por referencia á los ejes coordenados.

**71.** Para concluir, expondremos en dos palabras el procedimiento discurrido por LONGCHAMPS *(Essai sur la Géométrie de la Règle, etc.*, París, 1890, pág. 110) para construir fácilmente la curva de que se trata.

En primer lugar, advirtamos que la ecuación del tridente puede escribirse de este modo:

$$y - \frac{C}{m} = \frac{x^3 + Bx^2 + D}{m\,x}.$$

La cual, mediante un simple cambio del origen de las coordenadas, se reduce á la siguiente, algo más sencilla:

$$y = \frac{x^3 + Bx^2 + D}{m\,x}.$$

Hecho esto, tracemos la parábola (fig. 18), cuya ecuación sea

$$X^2 = mY;$$

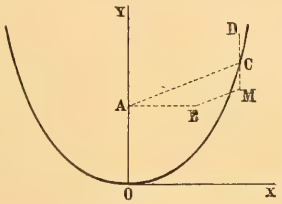


Figura 18.

y en el plano de la curva señalemos un punto $B$, que tenga por coordenadas $a$ y $b$, siendo

$$a = -B \qquad \text{y} \qquad b = \frac{D}{ma}.$$

Tracemos después la recta $AB$, paralela al eje de las abscisas; la recta, de posición variable, $AC$; la paralela al eje de las ordenadas $CM$; y la recta $BM$, paralela á la $AC$. Y el lugar geométrico descrito por $M$, cuando $AC$ varíe de posición, será la curva pedida.

En efecto: representando por $x'$ é $y'$ las coordenadas del punto $C$, y por $x$ é $y$ las del $M$; y expresando, además, que este punto $M$ corresponde á la recta $BM$, y el $C$ á la parábola, hallaremos que

$$x = x'; \quad x'^2 = my'; \quad \text{é} \quad y - b = \frac{y' - b}{x'}(x - a).$$

De donde, por eliminación de $x'$ é $y'$, se desprende la ecuación del *tridente*

$$y = \frac{x^3 - ax^2 + abm}{mx} = \frac{x^3 + Bx^2 + D}{mx}.$$

## IV

### LA CONCOIDE PARABÓLICA DE DESCARTES

**72.** Consideremos una parábola (fig. 19) $BAC$, cuyo vértice $A$ se mueva sobre una recta fija (el mismo eje de la parábola), que tomaremos por eje de las abscisas; un punto fijo $D$, situado en el eje de las ordenadas; y otro $E$, móvil con la parábola, de tal manera que la distancia $AE$ se conserve constante. La recta $DE$, cualquiera que sea su posición variable, cortará á la parábola en dos puntos $M$ y $N$, generadores de una curva á que DESCARTES, en su *Geometría*, publicada en 1637, donde la consideró y mostró el papel que representa en la construcción de las curvas del 5.° y del 6.° grado, dió el nombre de *concoide parabólica*, por la analogía de su generación con uno de los modos de generación de la *concoide de Nicomedes*.

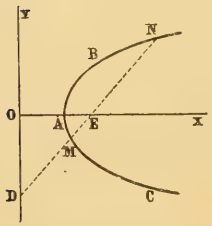


Figura 19.

**73.** Para hallar la ecuación de la concoide parabólica, póngase

$$OA = b, \quad AE = h, \quad \text{y} \quad OD = -c;$$

y sean además

$$y^2 = a(x - b) \quad \text{é} \quad Y = \frac{c}{b + h} X - c$$

las ecuaciones de la parábola y de la recta $DE$.

La condición para que la parábola y la recta se corten es

$$y = \frac{c}{b + h} x - c;$$

y la ecuación de la curva considerada se obtendrá por eliminación del parámetro variable, $b$, entre esta ecuación y la de la parábola. Operación que da por resultado el que á continuación se expresa:

$$x = \frac{(y + c)(y^2 - ah)}{ay};$$

del cual se deduce fácilmente que la *concoide parabólica* es un *tridente*, como los representados en las figs. 16 y 17, aunque en distinta situación con respecto á los ejes coordenados; que corta al de las $y$ en los puntos $(0, -c)$, $(0, \sqrt{ah})$ y $(0, -\sqrt{ah})$; tiene por asíntota el eje de las abscisas; y posee una *inflexión* en el punto real, correspondiente á la ordenada $\sqrt[3]{ach}$.

**74.** Algunos autores, como, por ejemplo, A. Conte (V. *Nouvelles Annales de Math.*, 1894, pág. 414), designan también con el nombre de la curva de que tratamos á la obtenida, trazando un haz de rectas divergentes, que pasen por el *foco* de una parábola cualquiera, y señalando sobre todas ellas, á partir de sus intersecciones con la misma parábola, segmentos de longitud constante.

Pero la curva así formada, cuya ecuación *polar* es

$$\rho = \frac{a}{2(1 - \cos\theta)} + k,$$

y la *cartesiana*

$$4(x^2 + y^2 + kx)^2 = (a + 2k + 2x)^2 (x^2 + y^2),$$

no coincide con la estudiada por el célebre fundador de la *Geometría Analítica*, y á la cual aplicó Montucla el nombre de *concoide parabólica de* Descartes, en su *Histoire des Mathématiques* (t. II, p. 340), y Chasles simplemente el de *parábola* de Descartes, en su *Aperçu historique* (2.ª ed., p. 60).

## V

### LA CÚBICA DE AGNESI

**75.** Tracemos una recta fija $OA$ (fig. 20); una circunferencia de radio igual á $\frac{1}{2}\,a$, con el centro $C$ sobre esta recta; y una perpendicular $AK$ á la misma recta. Tírense después la recta variable $ON$ y las paralelas á los ejes de las coordenadas, $Nm$ y $Mm$. Cuando, pasando siempre por $O$, la recta $ON$ varía de situación, el punto $m$ describe una curva, cuya ecuación, representando por $x$ é $y$ las coordenadas $OP$ y $mP$, es la siguiente:

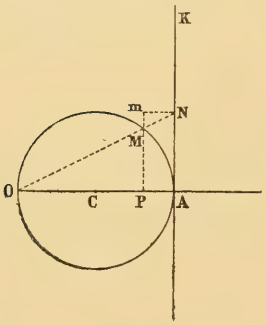


Figura 20.

$$\frac{mP}{MP} = \frac{a}{OP}, \quad \text{ó} \quad \frac{y}{\sqrt{x\,(a-x)}} = \frac{a}{x}, \quad \text{ó}$$

$$(1) \qquad x y^2 = a^2\,(a - x).$$

Denomínase esta curva *cúbica de Agnesi*, por haber sido estudiada por esta mujer ilustre con el nombre de *versiera* *, en sus *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana. Milano*, 1748 (*t.* I, *páginas* 380-381 *y* 391-393). Aun cuando, según recientemente advirtió AUBRY *(Journal des Mathématiques spéciales*, 1896, *p.* 180), la misma curva había ya sido considerada anteriormente por FERMAT *(Oeuvres, t.* I, *París*, 1891, *p.* 279; *t.* III, 1896, *p.* 233), quien determinó su área; por JAMES GREGORY *(Geometriæ pars universalis. Padua*, 1668); por BARROW *(Lectiones geometricæ. Londres*, 1669); etc.

**76.** Por medio de la ecuación de la curva, resuelta con relación á $y$, y de su derivada

$$y' = -\frac{a^2 + y^2}{2xy} = -\frac{a^3}{2x^2\,y},$$

* De *vertere*, ó *versura*, en latín, según CANTOR. PEIRCE denomina en inglés la misma curva *The Witch of Agnesi*.—La *hechicera*, en castellano.

fácil es ver que la curva tiene la forma indicada en la figura 21, línea $A_1 A A_1$. En efecto, el eje de las ordenadas es asíntota de la curva, y el de las abscisas un eje de simetría. En el punto $A$, cuya distancia á $O$ es igual á $a$, la tangente á la curva es perpendicular al eje de las abscisas. Y de la ecuación $y'' = 0$ se concluye que la curva tiene dos puntos de inflexión, determinados por la abscisa común $\frac{3}{4}a$, y por las ordenadas á esta abscisa correspondientes, $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

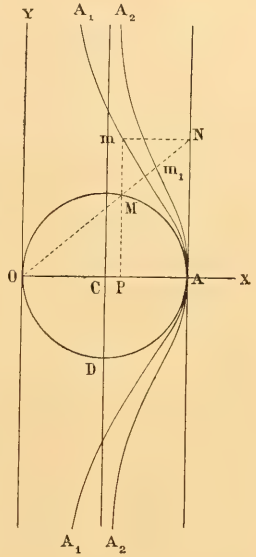


Figura 21.

**77.** La subnormal en un punto $(x, y)$ de la cúbica de Agnesi se expresa por la fórmula

$$S_n = yy' = -\frac{a^3}{2x^2}:$$

de la cual se desprende, por procedimiento muy sencillo, la construcción de la normal en el mismo punto.

**78.** Represéntese por $y_1$ la ordenada del punto $M$, y por $y$ la ordenada del punto $m$ (fig. 20), correspondiente al $M$. La ecuación de la tangente á la circunferencia en el punto $M$ es

$$Y - y_1 = \frac{dy_1}{dx}(X - x);$$

y la ecuación de la tangente á la cúbica en el punto $m$ esta otra:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Además, $ay_1 = xy$; y, por lo tanto,

$$a\,dy_1 = x\,dy + y\,dx.$$

Pues eliminando $y_1$, $dy_1$ y $dy$ en la última ecuación con auxilio de las tres anteriores, obtiénese esta otra:

$$\frac{x-a}{xy}\,Y+\frac{X}{x}=1,$$

á la cual deben satisfacer las coordenadas de los puntos de intersección de las dos tangentes consideradas. Y como esta ecuación representa, cuando se consideran $X$ é $Y$ como variables, una recta que pasa por los puntos $N$ y $P$, cuyas coordenadas son $(a, y)$ y $(x, 0)$, el punto de intersección de las dos tangentes debe hallarse en la recta $PN$. Para construir la tangente á la cúbica de Agnesi en el punto $m$, basta, pues, trazar la tangente á la circunferencia en el punto $M$ y unir el punto en que esta tangente corta á la recta $PN$ con el punto $m$. (Godefroy.)

**79.** El área limitada por un arco de la *cúbica de Agnesi*, por el eje de las ordenadas, y por dos paralelas al eje de las abscisas, que pasan por los puntos cuyas ordenadas sean $y_0$ é $y_1$, está determinada por la fórmula

$$A=a^3\int_{y_0}^{y_1}\frac{dy}{y^2+a^2}=a^2\left[\text{arc tang}\,\frac{y_1}{a}-\text{arc tang}\,\frac{y_0}{a}\right].$$

Para hallar el área $A_1$, comprendida entre la curva y su asíntota, basta suponer que $y_1=+\infty$ é $y_0=-\infty$. Y entonces, de la fórmula general anterior se deduce que

$$A_1=\pi a^2:$$

*igual á cuatro veces la del círculo director de la misma curva.*

**80.** El volumen del sólido engendrado por la *cúbica de Agnesi*, cuando la curva gira alrededor de la asíntota, ó eje de las ordenadas, se halla expresado por esta fórmula:

$$V=\pi\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,dy=\frac{\pi^2 a^3}{2}.$$

**81.** Como inseparables de la curva que acabamos de examinar, son otras dos, con ella en su generación estrechamente relacionadas.

Una de estas curvas, denominada también *cúbica de Agnesi*, aun cuando tan sutil geómetra no fijase su atención en ella, tiene por ecuación

$$xy^2 = a^2(2a - x),$$

y ha sido recientemente considerada por LONGCHAMPS en su *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l'Equerre (Paris*, 1890).

Y la otra, definida por la ecuación

$$(2x - a)(x^2 + y^2) = ax^2,$$

y representada en la fig.ª 21 por la línea $A_2 A A_2$, lo fué por PEANO, que la denominó *visiera*, en sus *Applicazioni del Calcolo Infinitesimale (Torino*, 1897, p. 7).

GINO LORIA, que llamó la atención de los geómetras sobre las relaciones de ambas curvas con la de AGNESI, renglones antes estudiada, aplicó á la primera el nombre de *pseudoversiera;* siendo de advertir que ya ésta había sido mencionada por LEIBNITZ en sus cartas á HUYGENS, año 1673, conforme, muy poco há, anunció AUBRY *(Journal de Mathématiques Spéciales*, 1896, *p.* 180); y que la *visiera* de PEANO es, simplemente, una *concoide de* SLUSE (Núm.° 18), que tiene un *punto aislado* en el origen de las coordenadas, y por asíntota la recta que pasa por el centro *C* del círculo director, y es perpendicular al eje *Ox* de las abscisas. Curva, por otra parte, que resulta engendrada por el punto medio del segmento *MN* (fig. 20), conforme el *m* engendra la *versiera:* así como la pseudoversiera de LONGCHAMPS resulta también de la misma versiera con sólo doblar las abscisas de sus puntos, sin alterar la longitud de las ordenadas.

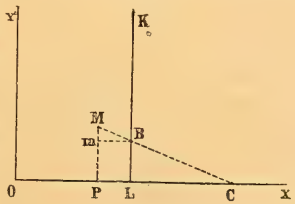


Figura 22.

**82.** La *pseudoversiera* hállase además muy de cerca relacionada con la *cisoide de* DIOCLES.

Sean, en efecto (fig. 22), *m* un punto de la pseudoversiera; *KL* una recta fija, cuya distancia al origen de las coordenadas y al punto fijo *C* supondremos igual á *a; MC* una recta variable que gira alrededor de *C;* y *mM* y

$mB$ dos rectas paralelas á los ejes. Y con esto tendremos, suponiendo que $mP = y$, $MP = Y$, $OP = x$,

$$\frac{y}{Y} = \frac{a}{2a - x}.$$

Por medio de esta igualdad, la ecuación de la pseudoversiera transfórmase en esta otra:

$$Y^2 = \frac{(2a - x)^3}{x},$$

que corresponde también á una *cisoide de Diocles.*

Para convencerse de esto último, pongamos el origen de las coordenadas en el punto $C$, de manera que $x + X = 2a$, y hallaremos entonces

$$Y^2 = \frac{X^3}{2a - X};$$

con lo cual la coincidencia de una curva con otra es evidente.

**83.** El método de transformación acabado de aplicar débese á MACLAURIN. Y puede ser también empleado para derivar de la pseudoversiera el folium de Descartes.

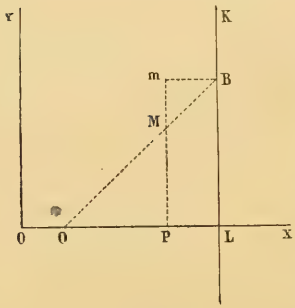


Figura 23.

Designemos por $m$ un punto de la pseudoversiera; por $KL$ (fig. 23) una paralela al eje de las ordenadas, cuya distancia, $OL$, á este eje sea igual á $\frac{1}{2}\, a + \sqrt{3}\, a$; y por $O'$ un punto cuya distancia á $O$ lo sea á $\frac{1}{2}\, a$. Trazando la recta $mB$, paralela á $Ox$; después la recta $O'B$; y, por último la $mM$, paralela al eje de las ordenadas, obtiénese un punto $M$, que pertenece al *folium* de Descartes. En efecto, poniendo $mP = y$, $MP = Y$, y $OP = x$, resulta que

$$\frac{Y}{y} = \frac{x - \frac{1}{2}a}{a\sqrt{3}};$$

y, en consecuencia, contando con la ecuación de la pseudoversiera, poco antes consignada,

$$Y = \frac{2x - a}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2a - x}{x}}.$$

Ecuación ésta que representa un *folium* de Descartes, conforme puede verse con sólo llevar el origen de las coordenadas al punto $O'$, poniendo para ello $x = X + \frac{1}{2}a$. Porque entonces resulta

$$Y = \frac{X}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3a - 2X}{2X + a}} = \frac{X}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3b - \sqrt{2}X}{b + \sqrt{2}X}},$$

donde $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

84. De la *pseudoversiera* se puede también derivar una *anguinea de Newton* por medio de la *transformación de Maclaurin*.

La ecuación de la pseudoversiera

$$x = \frac{2a^3}{y^2 + a^2},$$

y esta otra,

$$X = \frac{2x^2 Y}{Y^2 + a^2},$$

que representa una anguinea, dan, en efecto, poniendo $Y = y$, y dividiéndolas luego miembro por miembro, la siguiente relación entre las abscisas, correspondientes á la misma ordenada:

$$\frac{x}{X} = \frac{a^3}{a^2 Y}.$$

Por consiguiente, si $KL$ es la recta (fig. 15), que corresponde á la ecuación

$$Y = LA = \frac{a^3}{a^2},$$

$m$ un punto de la pseudoversiera; y $mB$ y $mM$ rectas paralelas á los ejes de las coordenadas, $M$ es un punto de la anguinea considerada.

La interesante correspondencia aquí establecida entre la *pseudoversiera*, la *cisoide*, el *folium* de Descartes y la *anguinea*, no sabemos que antes de ahora haya sido puesta bien de relieve por nadie.

## VI

### LA CURVA DE ROLLE

**85.** Dase el nombre de *curva de Rolle* á la cúbica que tiene por ecuación

$$(1) \qquad xy^2 = a(y+x)^2, \quad a > 0.$$

La cual, resuelta con relación á $y$, se convierte en esta otra:

$$(2) \qquad y = \frac{ax \pm x\sqrt{ax}}{x-a} = \frac{a^{\frac{1}{2}}x}{\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}.$$

Con cuyo auxilio y el de las dos siguientes, derivadas suyas,

$$(3) \quad y' = \frac{a^{\frac{1}{2}}(\pm x^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}})}{2(\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^2} \quad \text{é} \quad y'' = \frac{a^{\frac{1}{2}}(-1 \pm 3a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}})}{4(\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}})^3},$$

vamos á determinar la forma de la curva.

En primer lugar advirtamos que, según la ecuación (2), la curva debe hallarse situada por completo del lado de las abscisas positivas (fig. 24).

Las ecuaciones (2) y (3), poniendo en ellas $x = 0$, muestran además que

el origen de las coordenadas constituye un *punto de retroceso* de primera especie, formando la tangente en este punto un ángulo de $(-45°)$ con el eje de las abscisas.

Al signo superior de la expresión de $y$ corresponde una rama infinita $OC$, cuyas ordenadas son negativas y crecientes, constante é indefinidamente, en valor absoluto, cuando $x$ varía desde 0 hasta $a$; y una rama infinita, $EGM$, cuyas coordenadas son positivas y crecientes hasta lo infinito, lo mismo cuando $x$ se aproxima al valor de $a$ que cuando propende luego hacia $\infty$. La recta $AB$, que tiene por ecuación $x = a$, es una asíntota de estas ramas.

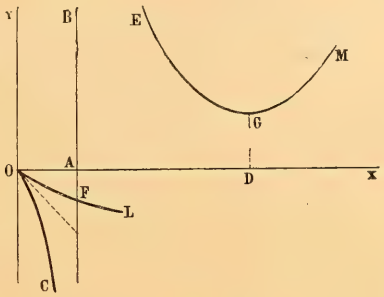



Figura 24.

La expresión de $y'$, correspondiente al signo superior, es nula cuando $x = 4a$: luego la curva posee un punto $G$, cuyas coordenadas $OD$ y $DG$, son $x = 4a$ é $y = 4a$, donde $y$ adquiere un valor mínimo.

Consideremos ahora la rama de la curva correspondiente al signo inferior de la expresión de $y$.

Como en este caso es $y$ negativa, cualquiera que sea $x$, esta rama se halla por completo debajo del eje de las abscisas; y, como es $y = -\frac{1}{2}a$, cuando $x = a$, vese que corta á la asíntota en el punto cuyas coordenadas son $x = a$ é $y = -\frac{1}{2}a$. El coeficiente angular de la tangente en este punto es igual á $-\frac{3}{8}$, y, por tanto, independiente de $a$.

En la rama de la curva que estamos considerando no existe punto alguno en que la ordenada sea máxima ó mínima; y como $y$ tiende hacia $-\infty$ cuando $x$ tiende hacia $+\infty$, conclúyese que aquella rama se extiende indefinidamente en el sentido de las abscisas positivas, alejándose cada vez más del eje de las abscisas.

La expresión de $y''$ muestra que en las ramas que corresponden al signo

inferior de la expresión de $y$ no existe punto alguno de inflexión á distancia finita; pero que sí existe uno en la rama $EGM$, correspondiente al signo superior de la misma expresión. Las coordenadas de este punto son $x = 9a$ é $y = \frac{9}{2}a$.

**86.** La ecuación de la tangente á la curva de Rolle es

$$Y - y = \frac{a^{\frac{1}{2}}\left(\pm\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\right)^2}(X - x).$$

Y la ordenada del punto, en que esta recta corta al eje de las ordenadas, tiene por expresión

$$Y = \frac{\pm x^{\frac{1}{2}}y}{\pm x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{y^2}{2\sqrt{ax}}.$$

**87.** La cuadratura de la superficie, limitada por un arco de la curva de Rolle, por el eje de las abscisas, y por dos paralelas al eje de las ordenadas, trazada por los puntos cuyas abscisas son $x_0$ y $x_1$, se obtiene por medio de la fórmula

$$A = 2\sqrt{a}\left[\pm\frac{x_1\sqrt{x_1} - x_0\sqrt{x_0}}{3} + \frac{(x_1 - x_0)\sqrt{a}}{2} \pm a\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}\right)\right.$$
$$\left. + a^{\frac{3}{2}}\log\frac{\sqrt{x_1} \mp \sqrt{a}}{\sqrt{x_0} \mp \sqrt{a}}\right].$$

**88.** La ecuación (1), que acabamos de considerar, está comprendida en la ecuación más general

$$xy^2 = a(y - mx)^2,$$

estudiada por Elgé en un artículo *Sur la courbe de Rolle*, publicado en el *Journal de Mathématiques Spéciales* (1896, p. 32), en el cual se expone un método para construir la curva de Rolle por medio de una parábola.

## VII

### LA CÚBICA MIXTA

89. Fué dado por LONGCHAMPS *(Essai de la Géométrie de la Règle et de l'Équerre, Paris,* 1890, *p.* 116) el nombre de *cúbica mixta* á la curva que tiene por ecuación

$$y^2 x = ax^2 + by^2,$$

y cuya forma se determina fijando la consideración en las siguientes expresiones:

$$y = x\sqrt{\frac{a}{x-b}},\quad y' = \sqrt{\frac{a}{x-b}}\cdot\frac{x-2b}{2(x-b)},\quad y'' = \sqrt{\frac{a}{x-b}}\cdot\frac{4b-x}{4(x-b)^2}.$$

Sean, primeramente, $a > 0$, y $b > 0$. La forma de la curva será en este caso la indicada en la figura 25, compuesta de dos ramas, simétricamente dispuestas con relación al eje de las abscisas.

La recta $AB$, definida por la ecuación $x = b$, es asíntota de la curva; y, por ser $y' = 0$ cuando $x = \infty$, tiene ésta además una asíntota paralela al eje de las abscisas, á distancia infinita. Luego cada rama de la curva presenta forma hiperbólica por una de sus extremidades, y forma parabólica por la otra: circunstancia que dió origen al nombre por el cual la curva en conjunto es conocida.

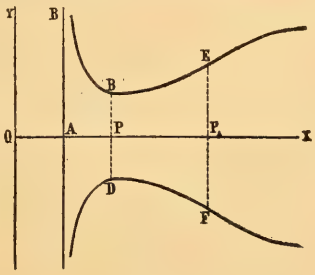


Figura 25.

Las ordenadas adquieren además dos valores, máximo y mínimo, en los puntos $B$ y $D$, donde $x = 2b$ é $y = \pm 2\sqrt{ab}$. En tanto que los puntos $E$ y $F$, cuyas coordenadas son $(4b, \frac{4}{3}\sqrt{3}\sqrt{ab})$, son *puntos de inflexión*, y el $O$ punto *aislado* de la misma curva.

En el caso de ser $a < 0$ y $b > 0$, la curva tiene la forma indicada en la figura 26: convirtiéndose entonces los puntos de inflexión y los de ordenada máxima y mínima en *puntos imaginarios*, y el antes *aislado O* en un *nodo*.

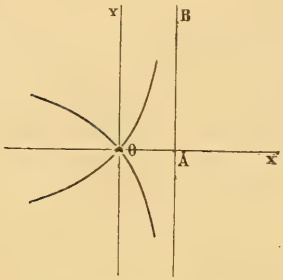


Figura 26.

Y cuando sean $a < 0$ y $b < 0$, ó $a > 0$ y $b < 0$, hállanse curvas de las mismas formas en los anteriores supuestos ya consideradas.

**90.** La cúbica mixta puede construirse por medio de una parábola (LONGCHAMPS: *l. c.)*, conforme ahora veremos.

Sea $AB$ (fig. 27) una recta que tiene por ecuación $x = b$; y $M$ un punto de la parábola, cuya ecuación es $y^2 = ax$. Tomando sobre la recta $OM$, á partir del punto $M$, una longitud $MN$ igual á $OC$, $N$ será un punto de la cúbica mixta á que nos referimos. En efecto: supongamos que $COB = \theta$, y $ON = \rho$; y hallaremos que

$$OC = \frac{b}{\cos\theta}, \quad \text{y} \quad OM = \frac{a\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta};$$

y, por lo tanto,

$$\rho = \frac{b}{\cos\theta} + \frac{a\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

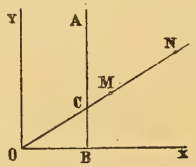


Figura 27.

Ecuación polar ésta de la curva descrita por $N$, cuando $OM$ varía de posición, girando alrededor de $O$; y que, expresada en coordenadas cartesianas, concuerda con la de la cúbica de que se trata.

**91.** La rectificación de las cúbicas mixtas depende de las integrales elípticas. En efecto, suponiendo que $y = tx$, la curva puede ser representada por las ecuaciones

$$x = \frac{a + bt^2}{t^2}, \quad y = \frac{a + bt^2}{t}.$$

De manera que

$$ds = \sqrt{\frac{b^2 t^6 - 2abt^4 + a^2 t^2 + 4a^2}{t^6}}\, dt;$$

ó, poniendo $t^2 = x$,

$$ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 x - 2ab + \frac{a^2}{x} + \frac{4a^2}{x^2}}{\sqrt{b^2 x^3 - 2abx^2 + a^2 x + 4a^2}}\, dx.$$

Sabido es además, y fácil de verificar ó comprobar por diferenciación, que

$$\frac{4a^2\, dx}{x^2\sqrt{F(x)}} = -\, d\left[\frac{\sqrt{F(x)}}{x}\right] - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{F(x)}} + \frac{b^2}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

donde

$$F(x) = b^2 x^3 - 2abx^2 + a^2 x + 4a^2.$$

Luego

$$ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 x - \left(2ab - \frac{b^2}{2}\right) + \frac{a^2}{2x}}{\sqrt{F(x)}} - \frac{1}{2}\, d\left[\frac{\sqrt{F(x)}}{x}\right].$$

Y, poniendo ahora

$$x = u + h, \quad h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b},$$

de la expresión anterior se deduce la que sigue:

$$ds = b\, \frac{u\, du}{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}} - \left(\frac{4}{3}\, a - \frac{1}{2}\, b\right) \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}}$$

$$+ \frac{a^2}{2b} \cdot \frac{du}{(u+h)\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}} - \frac{b}{4}\, d\left[\frac{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}}{u+h}\right]:$$

designando por $g_1$ y $g_2$ estas otras expresiones:

$$g_1 = \frac{4}{3}\, \frac{a^2}{b^2} \quad \text{y} \quad g_2 = -\, 8\left(\frac{a^3}{27\, b^3} + 2\, \frac{a^2}{b^2}\right).$$

Luego *la rectificación de las cúbicas mixtas depende de las integrales elípticas de 1.ª, 2.ª y 3.ª especie*

$$\int \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}}, \quad \int \frac{u\, du}{\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}}, \quad \text{é} \quad \int \frac{du}{(u+h)\sqrt{4u^3 - g_1 u - g_2}},$$

reducidas á la forma normal adoptada por WEIERSTRASS.

## VIII

### EL FOLIUM PARABÓLICO

**92.** Con el nombre de *folium parabólico* se designa la curva dada por la ecuación (LONGCHAMPS: *Géométrie de la Règle et de l'Équerre, París*, 1890, *p.* 120)

$$x^3 - a\,(x^2 - y^2) - b\,x\,y = 0.$$

Cuando es $b = 0$, la curva resulta simétrica relativamente al eje de las abscisas, y el *folium* se denomina *recto;* y cuando $b$ es diferente de 0, el *folium* se llama *oblicuo.*

Fácil es ver, por medio del método de las asíntotas, que el folium parabólico carece de asíntotas á distancia finita, y que, como la parábola, tiene una dirección asintótica única, que coincide con la dirección del eje de las ordenadas.

**93.** Escribiendo la ecuación del folium parabólico bajo la forma

$$y = x\,\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,(x - a)}}{2a},$$

y atendiendo á la igualdad

$$y' = \frac{b}{2a} \pm \frac{b^2 - 6ax + 4a^2}{2a\sqrt{b^2 - 4a(x - a)}},$$

también se ve fácilmente que la curva es de la forma indicada en la figura 28, con un *punto doble, O,* en el origen de las coordenadas, donde las tangentes á las dos ramas de la curva que allí se cruzan son perpendiculares una á otra, según demuestra la fórmula

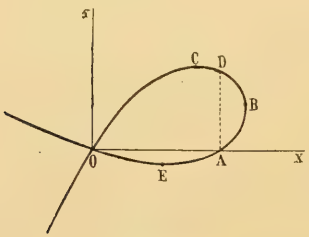



Figura 28.

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2}}{2a}.$$

En el punto $A$, donde la curva corta el eje de las abscisas, es $x = a$; y en el punto $D$, correspondiente á la misma abscisa, $y = b$.

**94.** El *folium parabólico* es una curva *unicursal*. Poniendo en su ecuación $y = tx$, se desprenden estas otras:

$$x = a(1 - t^2) + bt, \quad y = a(1 - t^2)t + bt^2.$$

De las cuales se concluye la siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3at^2 - 2bt - a}{2at - b}.$$

Luego los valores de $t$ en los puntos $C$ y $E$, donde las ordenadas adquieren un valor máximo y otro mínimo, serán éstos:

$$t = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 3a^2}}{3a};$$

y el de $t$ también, en el punto $B$, donde $x$ pasa por un valor máximo, y la tangente á la curva es paralela al eje de las ordenadas, este otro:

$$t = \frac{b}{2a}.$$

**95.** Y, por último, es de advertir que la curva de que se trata, puede ser construída por el sencillo método que sigue (LONGCHAMPS, *l. c.*):

Sea $OABC$ (fig. 29) un rectángulo, cuyos lados $OA$ y $AB$ sean iguales á $a$ y $b$. Por el punto $O$ trácese la recta arbitraria $OD$, y por el $D$ la perpendicular $DE$ á esta recta; por el $E$ luego la perpendicular $EF$ á $DE$; y por el $F$, finalmente, la perpendicular $FM$ á $OD$.

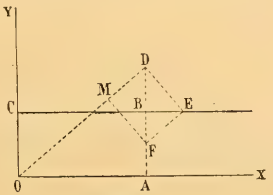


Figura 29.

El lugar descrito por $M$, cuando $OD$ varíe, será el folium parabólico que se trata de construir.

Representando, en efecto, por $\theta$ y $\rho$ las coordenadas polares $MOA$ y $OM$ del punto $M$, serán

$$OD = \frac{a}{\cos\theta}; \quad DB = DA - BA = a\,\mathrm{tang}\,\theta - b, \quad \text{y}$$

$$MD = FE = DE\,\mathrm{tang}\,\theta = \frac{DB}{\cos\theta}\,\mathrm{tang}\,\theta = \frac{a\,\mathrm{tang}\,\theta - b}{\cos\theta}\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

Y de estas igualdades y de la siguiente

$$\rho = OM = OD - MD$$

resulta la ecuación de la curva, referida á coordenadas polares:

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} - \frac{a\,\mathrm{tang}\,\theta - b}{\cos\theta}\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

De la cual sencillísimamente se deduce la ecuación del *folium*, expresada en coordenadas cartesianas, renglones antes expuesta y discutida.

## IX

### LAS PARÁBOLAS DIVERGENTES

**96.** Así denominó NEWTON en su *Enumeratio linearum tertii ordinis* las curvas comprendidas en la ecuación

$$(1) \qquad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d:$$

las cuales, según el mismo gran geómetra nos enseñó, desempeñan importante papel en la teoría general de las *cúbicas:* como que la *misma ecuación* (1) *puede representar la perspectiva de todas las curvas de este último nombre.*

Por qué camino logró NEWTON descubrir tan interesante propiedad, nadie lo sabe, ni es fácil adivinarlo. En la obra citada encuéntrase, sí, enunciada la proposición bien explícitamente; pero no formulada su de-

mostración, que discurrieron antes que nadie, y publicaron por separado, los geómetras CLAIRAUT y NICOLE, en el volumen de las *Memorias de la Academia de Ciencias de París*, correspondiente al año 1731.

El bello teorema de Newton á que nos referimos equivale al que ahora procuraremos demostrar, enunciado en estos términos:

*A cualquier cúbica corresponde una parábola divergente, deducida de la misma cúbica por transformación homográfica.*

Designemos por $f(X, Y) = 0$ la ecuación de una cúbica cualquiera; y, aplicando á ella la fórmula de Plucker (SALMON, *Hygher plane curves*, 3.ª ed., n.º 82),

$$\iota = 3m(m - 2) - 6\delta - 8\nu,$$

en la cual $m$ representa el *orden* ó grado de la curva, $\delta$ el número de sus *nodos*, y $\nu$ el de los puntos de *retroceso*, desde luego se concluye que, por referencia á las cúbicas, el de *puntos*, $\iota$, *de inflexión* es siempre *impar:* por lo cual ha de ser *real* uno de ellos, cuando menos.

Sentado esto, concibamos en el plano de la cúbica un triángulo, cuyos lados $\Delta$, $\Delta'$ y $\Delta''$ sean respectivamente segmentos de recta, tangente el primero á la cúbica en un punto de inflexión real; de dirección arbitraria el otro, pero sujeto á pasar por el mismo punto; y el tercero de posición, que nos reservamos determinar ó definir más adelante. Y designemos por $(X, Y)$ un punto de la cúbica en particular considerada; y por $z_1$, $x_1$ é $y_1$ las distancias respectivas de aquel punto á los tres lados del triángulo, ó las coordenadas *trilineales* del punto $(X, Y)$, por referencia al triángulo de que se trata. En tales supuestos, podremos escribir que

$$x_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1; \quad y_1 = a_2 X + b_2 Y + c_2; \quad z_1 = a_3 X + b_3 Y + c_3:$$

designando por las letras $a_1$, $b_1$ y $c_1$; $a_2$, $b_2$ y $c_2$; y $a_3$, $b_3$ y $c_3$, cantidades independientes de $X$ é $Y$, y dependientes de las ecuaciones de las rectas $\Delta'$, $\Delta''$ y $\Delta$, conforme se consigna y explica en los tratados corrientes de Geometría Analítica, y nos consideramos dispensados de reproducir en este lugar.

Sustituyendo los valores de $X$ é $Y$, desprendidos de estas ecuaciones, en la ecuación de la cúbica considerada, obtiénese otra ecuación homogé-

nea en *coordenadas trilineales,* también de tercer grado, y de forma fácil de precisar. Para lo cual basta advertir que la recta $\Delta$ corta á la cúbica en tres puntos, reunidos en el de intersección de las $\Delta$ y $\Delta'$, y cuyas distancias á $\Delta'$ son, en consecuencia, nulas; y que la ecuación de la cúbica así deducida debe, por lo mismo, ser de forma tal que de ella se desprendan tres valores de $x_1$, iguales á cero, cuando á la vez se suponga que $z_1 = 0$: de la siguiente, en suma:

$$ax_1^3 = z_1(y_1^2 + Ax_1^2 + Cz_1^2 + Dx_1y_1 + Ex_1z_1 + Fy_1z_1), \quad \text{ó}$$
$$ax_1^3 = z_1(Ax_1^2 + Ex_1z_1 + Cz_1^2) + y_1z_1(y_1 + Dx_1 + Fz_1).$$

Advirtamos ahora que, aplicando á esta curva la ecuación

$$x_0f'_{x_1} + y_0f'_{y_1} + z_0f'_{z_1} = 0,$$

representativa de la *polar* del punto $(x_0, y_0, z_0)$, relativamente á la curva $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, y tomando para punto $(x_0, y_0, z_0)$ el de intersección de las rectas $\Delta$ y $\Delta'$, en el cual se verifica que $x_0 = 0$ y $z_0 = 0$, dedúcese que

$$z_1y_0(2y_1 + Dx_1 + Fz_1) = 0.$$

Luego la recta $z_1 = 0$ y la $2y_1 + Dx_1 + Fz_1 = 0$ constituyen la *polar* del punto considerado. Pues si para completar la definición del sistema adoptado de *coordenadas trilineales* convenimos en que el segmento $\Delta''$ corresponde á la recta representada por la última ecuación, que debe reducirse entonces á $y_1 = 0$, hallaremos finalmente que $D = 0$ y $F = 0$.

Luego, referida á los ejes así establecidos, la anterior ecuación de la cúbica podrá escribirse de este modo:

$$(2) \qquad ax_1^3 + bx_1^2z_1 + cx_1z_1^2 + dz_1^3 = y_1^2z_1.$$

De la cual se deducirá otra en coordenadas cartesianas, $x$ é $y$, ligadas con las $X$ é $Y$ por las relaciones

$$(3) \quad x = \frac{x_1}{z_1} = \frac{a_1X + b_1Y + c_1}{a_3X + b_3Y + c_3} \quad \text{é} \quad y = \frac{y_1}{z_1} = \frac{a_2X + b_2Y + c_2}{a_3X + b_3Y + c_3},$$

con sólo poner en ella $xz_1$ por $x_1$, é $yz_1$ por $y_1$: encontrándose entonces precisamente la de partida (1).

Luego á cada punto $(X, Y)$ de una cúbica cualquiera corresponde otro punto $(x, y)$ de alguna de las cúbicas comprendidas en la ecuación (1), hallándose ligadas las coordenadas de ambas curvas por las relaciones (3), que definen la *transformación homográfica* de una curva en otra, conforme nos propusimos demostrar.

De este género de transformación trató profundamente CHASLES en su importante producción matemática, titulada *Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie:* en la cual aquel tan ilustre geómetra enseña que la transformada homográfica de cualquier curva representa una perspectiva de la misma curva. Proposición que al final de este libro demostraremos, para completar así, con lo ya en este párrafo expuesto, la demostración del teorema de NEWTON, renglones antes enunciado.

**97.** La ecuación (1) puede simplificarse desde luego, ó reducirse á la forma

$$y^2 = ax^3 + cx + d, \tag{4}$$

con solamente trasladar el origen de las coordenadas al punto $\left(-\frac{b}{3a}, 0\right)$.

Para ver cuál es la forma de las curvas contenidas en esta ecuación, habremos de considerar diferentes casos, comenzando por advertir que el eje de las abscisas es siempre un eje de simetría de la curva de que se trata; y para fijar las ideas, supondremos también siempre que $a > 0$.

CASO 1.°—Admitamos que las tres raíces $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ de la ecuación

$$ax^3 + cx + d = 0$$

sean reales y desiguales, y que $\alpha > \beta > \gamma$.

La curva corta en este caso al eje de las abscisas en los puntos $A$, $B$ y $C$, cuyas abscisas son iguales á $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$. Y entonces las ordenadas serán reales y crecerán indefinidamente con $x$, cuando sea $x > \alpha$; imaginarias, por el contrario, cuando $x$ esté comprendida entre $\alpha$ y $\beta$; reales y finitas, cuando $x$ se halle comprendido entre $\beta$ y $\gamma$; é imaginarias de

nuevo cuando $x < \gamma$. Luego la curva se compondrá de una rama cerrada (fig. 30) $CLBM$ y de una rama infinita $NAP$.

Por medio de la derivada

$$y' = \frac{3ax^2 + c}{2y}, \tag{5}$$

vese que las tangentes en los puntos $A$, $B$, $C$ son perpendiculares al eje de las abscisas. Y, valiéndonos de la ecuación

$$3ax^2 + c = 0,$$

que, en virtud del teorema de Rolle, debe tener una raíz, comprendida entre $\beta$ y $\alpha$, á que corresponde un valor imaginario de $y$, y otra, comprendida entre $\beta$ y $\gamma$, á que corresponde un valor real de $y$, determinaremos la abscisa de los puntos $L$ y $M$, donde el valor absoluto de las ordenadas es máximo.

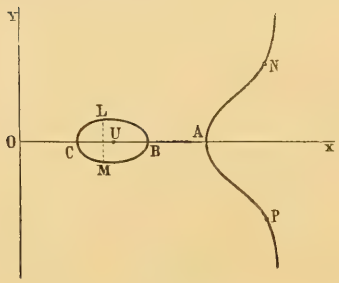


Figura 30.

Advirtamos aún, antes de abandonar este asunto, que, escribiendo la ecuación de la curva del modo siguiente:

$$y^2 = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

se obtiene, para determinar $y'$, la igualdad

$$y' = \frac{a[3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma]}{2y};$$

y, para determinar la abscisa de los puntos $L$ y $M$, la ecuación

$$3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0.$$

Sustituyendo en el primer miembro de esta ecuación $x$ por $\gamma$, y luego por $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, hállanse resultados de signos contrarios: lo que prueba

que los puntos $L$ y $M$ se proyectan sobre el eje de las abscisas, entre el medio, $U$, de $AB$ y el vértice $C$.

Caso 2.°—Si es $\alpha = \beta$, ó

$$y^2 = a\,(x - \alpha)^2\,(x - \gamma),$$

$y$ será real y crecerá indefinidamente cuando sea $x > \alpha$; real y finita en el intervalo de $x = \alpha$ á $x = \gamma$; é imaginaria cuando $x < \gamma$. La curva es en este caso *unicursal*, y de la forma indicada en la figura 31. A los puntos $C$ y $B$ ó $A$ corresponden los valores de $x = \gamma$ y $x = \alpha$. En los $L$ y $M$, cuya abscisa es igual á $\frac{2\gamma + \alpha}{3}$, el valor absoluto de $y$ es máximo. Y el $B$ ó $A$ será un *punto doble*, en el cual las tangentes forman con el eje de las abscisas ángulos cuyas tangentes trigonométricas son iguales á $\pm \sqrt{a\,(\alpha - \gamma)}$.

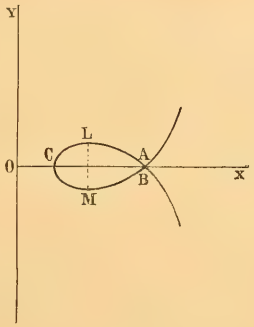



Figura 31.

Caso 3.°—Si $\beta = \gamma$, ó

$$y^2 = a\,(x - \alpha)\,(x - \beta)^2,$$

$y$ será real cuando sea $x > \alpha$, é imaginaria cuando $x < \alpha$. En este caso la curva es también unicursal, y tiene un punto aislado $C$ ó $B$, cuyas coordenadas son $(\beta, 0)$, y una rama infinita que parte del punto $(\alpha, 0)$ (fig. 32).

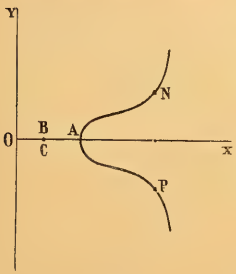



Figura 32.

Caso 4.°—Si las raíces $\alpha$ y $\beta$ son imaginarias, poniendo $\alpha = p + iq$ y $\beta = p - iq$, hallaremos que

$$y^2 = a\,[(x - p)^2 + q^2]\,(x - \gamma);$$

y la curva poseerá solamente una rama infinita, que pasa por el punto $(\gamma, 0)$, parecida á la rama, infinita también, de la fig. 30, y carecerá de puntos singulares.

Caso 5.°—Si $\alpha = \beta = \gamma$, la curva se reduce á una *parábola semicúbica*, que estudiaremos por separado más adelante, cuando especialmente tratemos de las *parábolas* en general. Por el momento, basta advertir que la parábola de tercer orden, al último supuesto correspondiente, según se deduce de las expresiones

$$y = a^{\frac{1}{2}} (x - \alpha)^{\frac{3}{2}} \quad \text{é}$$

$$y' = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} (x - \alpha)^{\frac{1}{2}},$$

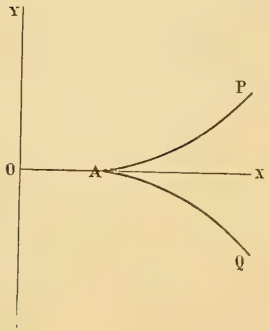


Figura 33.

es de la forma indicada en la fig.ª 33, con un *punto de retroceso* $(\alpha, 0)$ en *A;* y una *asíntota* en lo infinito, paralela al eje de las ordenadas.

98. Tratemos ahora de cuanto á los *puntos de inflexión* de las parábolas divergentes concierne, comenzando por considerar las curvas de este nombre *que no son unicursales.*

Derivando la ecuación (5), adviértese sin dificultad que será $y'' = 0$, cuando $x$ sea igual á $\infty$, y además cuando

$$(6) \qquad (3ax^2 + c)^2 - 12ax\,(ax^3 + cx + d) = 0.$$

A $x = \infty$ corresponde un punto de inflexión, situado en lo infinito. Y como la ecuación (5) muestra también que será $y' = \infty$, cuando sea ésta asimismo la expresión de $x$, conclúyese que la tangente á la curva en aquel punto será paralela al eje de las ordenadas.

De la ecuación (6) se desprenden *cuatro* valores de $x$, á cada uno de los cuales corresponden *dos* de $y$, deducidos de la (4). Luego la curva admite, además del que acaba de indicarse, otros *ocho* puntos de inflexión, reales ó imaginarios, situados á distancia finita.

Poniendo sucesivamente en la ecuación (6), $x = \alpha$ y $x = \infty$, obtiénense resultados de signos contrarios. Luego entre $\alpha$ é $\infty$ existe un valor real de $x$, que satisface á esta ecuación, y al cual corresponden, en consecuencia (figura 30), dos puntos de inflexión de la curva, $N$ y $P$.

Por medio de la misma ecuación (6) podría sencillamente demostrarse que la curva no tiene otros puntos de inflexión reales, fuera de los indicados. Pero más sencillo todavía, y preferible á esto, nos parece deducir la exactitud de la proposición como consecuencia del siguiente importante teorema, publicado por De Gua en 1740 *(Usage de l'Analyse de Descartes, etc.)*, y de nuevo por Maclaurin *(De linearum geometricarum proprietatibus generalibus)*, en 1748, que á continuación demostraremos, por referencia exclusiva á la clase de curvas que estudiamos ahora:

*Cualquier recta que pase por dos puntos de inflexión de una cúbica, cortará á esta curva en un tercer punto del mismo nombre.*

Para ello, comencemos por escribir la ecuación (6) de este modo:

$$x^4 + 2\frac{c}{a}x^2 + 4\frac{d}{a}x - \frac{c^2}{3a^2} = 0; \tag{7}$$

y designemos por $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ y $\alpha_4$ sus raíces.

Pues para que la recta que tiene por ecuación

$$y = Ax + B$$

pase por los puntos de la cúbica, cuyas abscisas son $\alpha_2$, $\alpha_3$ y $\alpha_4$, es menester, y basta, que estas raíces satisfagan á la ecuación

$$x^3 - \frac{A^2}{a}x^2 + \frac{c - 2AB}{a}x + \frac{d - B^2}{a} = 0; \tag{8}$$

y, por lo tanto, que los primeros miembros de las ecuaciones (7) y (8) satisfagan á la siguiente identidad:

$$x^4 + 2\frac{c}{a}x^2 + 4\frac{d}{a}x - \frac{c^2}{3a^2} =$$

$$(x - \alpha_1)\left(x^3 - \frac{A^2}{a}x^2 + \frac{c - 2AB}{a}x + \frac{d - B^2}{a}\right);$$

de la cual, por igualación de los coeficientes de las mismas potencias de $x$ en ambos miembros, se desprenden las siguientes ecuaciones condicionales

para que tres puntos de inflexión correspondan á la línea recta considerada:

$$A^2 = -a\alpha_1; \quad c = -2AB - a\alpha_1^2;$$
$$3d = -B^2 - \alpha_1 c + 2\alpha_1 AB; \quad \text{y} \quad c^2 = 3a\alpha_1 (d - B^2).$$

Dos de estas ecuaciones servirán para determinar los valores, $A$ y $B$, de los parámetros de la línea recta; y los otros dos para decidir si los *tres puntos de inflexión* se hallan ó no sobre esta recta, conforme aquellos valores concuerden ó no con los de los mismos parámetros que de ellas se deduzcan.

Pues bien: si de la *primera* ecuación se toma el valor de $A$, y el de $B$ de la *cuarta*, y ambos se sustituyen en la *segunda*, hállase este resultado:

$$\alpha_1^4 + 2\frac{c}{a}\alpha_1^2 + 4\frac{d}{a}\alpha_1 - \frac{c^2}{3a^2} = 0;$$

que igualmente se obtendría poniendo en la *tercera* los valores de $AB$ y de $B^2$, procedentes de la *segunda* y de la *cuarta*. Y basta advertir que este resultado coincide con el que se deduce de la (7), poniendo en ella $x$ por $\alpha_1$, para concluir que los tres puntos de inflexión, determinados por $\alpha_2$, $\alpha_3$ y $\alpha_4$, se encuentran situados sobre la misma línea recta.

La demostración precedente no es aplicable á las rectas paralelas al eje de las ordenadas. Pero basta advertir que cualquiera de estas rectas, sobre la cual existan dos puntos de inflexión, corta á la curva en un punto situado en lo infinito, y que este punto lo es de inflexión también, para concluir que asimismo se halla comprendida dentro del enunciado y condiciones del teorema á que la demostración expuesta se refiere.

Del cual teorema se desprende además que *la cúbica considerada solamente posee dos puntos de inflexión reales á distancia finita.*

Porque, en efecto: si poseyese cuatro puntos de este nombre, podríanse por ellos trazar cuatro rectas distintas, no paralelas al eje de las ordenadas, que cortarían á la curva en cuatro puntos reales, de inflexión también, en virtud del teorema anterior. Luego todos los puntos de inflexión de la curva serían reales: conclusión absurda, porque, poniendo en la ecuación (7) $x = \gamma$ y $x = \infty$, sucesivamente, hállanse resultados de signos

contrarios: señal de que la ecuación posee, por lo menos, una *raíz* real entre $\gamma$ é $\infty$ comprendida. Y precisamente á estas raíces ó valores reales de $x$ corresponden, conforme ya anteriormente se vió, valores imaginarios de $y$.

**99.** La doctrina referente á los puntos de inflexión, que acabamos de exponer, debe modificarse cuando se trate de aplicarla á una curva *unicursal.*

En efecto: como las coordenadas de un *punto doble* deben satisfacer á las ecuaciones

$$y = 0 \quad \text{y} \quad 3ax^2 + c = 0,$$

á la ecuación (6) satisfarán en este caso, no solamente las abscisas de los puntos de inflexión, sino también las de los puntos del primer nombre. Pero, aun entonces, es, sin embargo, fácil obtener una ecuación, apropiada solamente á la resolución exclusiva del problema de que ahora se trata, conforme pasamos á indicar.

1.° Sea $\alpha = \beta$, ó

$$y^2 = a\,(x - \alpha)^2\,(x - \gamma).$$

Por ser

$$y'' = \sqrt{a}\,\frac{3x - 4\gamma + \alpha}{4\,(x - \gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

disponemos, para determinar los puntos de inflexión de la curva, de las igualdades $x = \infty$, y también

$$x = \frac{1}{3}\,(4\gamma - \alpha) \quad \text{é} \quad y^2 = \frac{16}{27}\,a\,(\gamma - \alpha)^3:$$

las cuales, como $\alpha > \gamma$, muestran que la *curva posee dos puntos de inflexión imaginarios y uno real en lo infinito.*

2.° Si $\beta = \gamma$, como en el caso anterior, dispondremos, para determinar los puntos de inflexión, de las ecuaciones $x = \infty$, y de estas otras dos además:

$$x = \frac{1}{3}\,(4\alpha - \beta) \quad \text{é} \quad y^2 = \frac{16}{27}\,a\,(\alpha - \beta)^3:$$

de las cuales se deduce que *la curva tiene dos puntos de inflexión reales,* á distancia finita, y *otro, real asimismo, en lo infinito.*

Y 3.° Si $\alpha = \beta = \gamma$, resulta que

$$y'' = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{a}}{(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Según lo cual, la curva posee *un punto único de inflexión, correspondiente á* $x = \infty$.

**100.** La cuadratura de las áreas limitadas por un arco de la curva, por el eje de las abscisas, y por dos paralelas al eje de las coordenadas, depende, en los casos 2.° y 3.°, de las integrales

$$\int (x-\alpha)(x-\gamma)^{\frac{1}{2}}\,dx \quad \text{é} \quad \int (x-\alpha)^{\frac{1}{2}}(x-\beta)\,dx:$$

iguales á

$$2\left[\frac{(x-\gamma)^{\frac{5}{2}}}{5} + (\gamma-\alpha)\frac{(x-\gamma)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] \text{ y } 2\left[\frac{(x-\alpha)^{\frac{5}{2}}}{5} + (\alpha-\beta)\frac{(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}}{3}\right].$$

En el 2.° caso, el área $A$ de la parte cerrada de la curva se halla expresada por la fórmula

$$A = \frac{8}{15}(\alpha-\gamma)^{\frac{5}{2}}.$$

Pero, en el caso de no ser la curva unicursal, la cuadratura del área considerada depende de las integrales elípticas, como vamos á indicar ahora.

Efectivamente, en aquel caso

$$A = \int y\,dx = \int \sqrt{ax^3 + cx + d}\,.\,dx:$$

ó, poniendo

$$g_1 = -4\frac{c}{a} \quad \text{y} \quad g_2 = -4\frac{d}{a},$$

$$A = \frac{\sqrt{a}}{2}\int \sqrt{4x^3 - g_1 x - g_2}\,.\,dx.$$

Pero

$$\int \sqrt{4x^3 - g_1 x - g_2}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{12x^3 - 3g_1 x - 3g_2}{\sqrt{4x^3 - g_1 x - g_2}}\, dx;$$

ó, poniendo también

$$4x^3 - g_1 x - g_2 = F(x),$$

$$\int \sqrt{F(x)}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{x F'(x) - 2g_1 x - 3g_2}{\sqrt{F(x)}}\, dx.$$

Si advertimos ahora que la integración por partes da

$$\int x \frac{F'(x)}{F(x)}\, dx = 2x\sqrt{F(x)} - 2\int \sqrt{F(x)}\, dx,$$

nos resultará que

$$\int \sqrt{F(x)}\, dx = \frac{2}{3} x \sqrt{F(x)} - \frac{2}{3}\int \sqrt{F(x)}\, dx$$

$$-\frac{2}{3} g_1 \int \frac{x\, dx}{\sqrt{F(x)}} - g_2 \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Luego

$$\int \sqrt{F(x)}\, dx = \frac{2}{5} x\sqrt{F(x)} - \frac{2}{5} g_1 \int \frac{x\, dx}{\sqrt{F(x)}} - \frac{3}{5} g_2 \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Vese, pues, que *A depende de dos integrales elípticas, una de 1.ª especie y otra de 2.ª, que hemos reducido á la forma normal, adoptada por* WEIERSTRASS.

**101.** Reduciendo la ecuación (4) de la cúbica considerada á la forma

$$y^2 = \frac{a}{4}(4x^3 - g_1 x - g_2),$$

$x$ é $y$ podrán también representarse por funciones elípticas; y, empleando la función $p(u)$ de Weierstrass, se hallará que

$$x = p(u) \quad \text{é} \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{a}\, p'(u).$$

Y, partiendo de esta representación de las coordenadas, lógrase construir la teoría de las *cúbicas parabólicas* por un método ingenioso, ideado por CLEBSCH *(Vorlesungen über Geometrie,* II), y extender luego los teoremas obtenidos en este caso á las cúbicas de cualquier otro nombre, fundándose en la propiedad que posee la primera curva de poder representar la perspectiva de todas las demás.

Respecto á esta tan interesante materia, en cuya detallada exposición no podemos detenernos en la ocasión presente, deben consultarse la obra citada de CLEBSCH y el tomo II del *Traité des Fonctions Elliptiques* de HALPHEN. En la primera de estas obras utilízanse las notaciones de Jacobi; y en la segunda, como en otras muchas, las de Weierstrass. También puede verse el tomo III de nuestro *Curso de Analyse Infinitesimal,* 1892, p.ª 245 y 254.

## X

### LAS CÚBICAS DE CHASLES

**102.** Las *parábolas divergentes* no constituyen el único grupo de cúbicas, que pueden representar las perspectivas de todas las curvas de este nombre. La misma interesante propiedad posee otro grupo de cúbicas, indicado por CHASLES en su *Aperçu historique* (2.ª ed., p.ªs 146 y 348), cuya ecuación general se desprende de la deducida en el Núm. **96**

$$a x_1^3 + b x_1^2 z_1 + c x_1 z_1^2 + d z_1^3 = y_1^2 z_1,$$

poniendo en ella

$$x = \frac{x_1}{y_1} = \frac{a_1 X + b_1 Y + c_1}{a_2 X + b_2 Y + c_2} \quad \text{é} \quad y = \frac{z_1}{y_1} = \frac{a_3 X + b_3 Y + c_3}{a_2 X + b_2 Y + c_2}:$$

con lo cual se obtiene esta otra, que es la buscada:

$$(1) \qquad y = ax^3 + bx^2 y + cxy^2 + dy^3.$$

Entre las *parábolas divergentes* de NEWTON y las *cúbicas con centro* de CHASLES, aunque de muy distintas apariencias, existe una relación analítica sencillísima. Pónganse, efectivamente, en la (1), en vez de $x$ é $y$, estos otros valores

$$(2) \qquad x = \frac{X_1}{Y_1} \quad \text{é} \quad y = \frac{1}{Y_1};$$

é inmediatamente aquella ecuación, del segundo grupo de curvas, se transforma en la que corresponde al primero mencionado:

$$(3) \qquad Y_1^2 = aX_1^3 + bX_1^2 + cX_1 + d.$$

Las ecuaciones (2) definen una transformación homográfica, designada por el nombre de *transformación de Newton*, ya empleada, y en parte también estudiada, en el Núm.° 48. Tanto que, aplicando ahora lo que ya entonces se dijo, podemos concluir que cualquiera de las curvas, representadas por la ecuación (1), no tendrá ningún *punto múltiplo*, si la curva correspondiente, comprendida en la (3), no le tiene tampoco; y, por el contrario, que si la curva definida por la (3) posee un *nodo*, ó un *punto de retroceso*, asimismo le poseerá, de igual nombre, la curva á que la ecuación (1) se refiera. Á lo cual podemos además agregar que los puntos de inflexión de la curva representada por (1), corresponden á los de inflexión, también de la curva, en la (3) contenida: proposición esta última, que se demuestra tomando la ecuación, calcada en la (3) del Núm. 48,

$$\frac{dx}{dy} = X_1 - Y_1 \frac{dX_1}{dY_1},$$

y combinándola con la segunda de las ecuaciones (2): lo cual da por resultado

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = Y_1^3 \frac{d^2 X_1}{dY_1^2}.$$

Vese, pues, que los puntos de inflexión de la curva (1), se deducirán de los de la (3), poniendo en las ecuaciones (2) los valores encontrados de $X_1$ é $Y_1$, de donde se desprenden los de $x$ é $y$.

**103.** Representando por $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ las raíces de la ecuación

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0,$$

la (1) puede escribirse de este modo:

$$y = a\,(x - \alpha y)\,(x - \beta y)\,(x - \gamma y). \tag{4}$$

Por medio de la cual se determina fácilmente la forma de las cúbicas de Chasles, considerando los mismos casos que en el estudio análogo de las varias figuras parabólicas, poco antes (núm. **96**), consideradas. Mereciendo, por de pronto, advertirse que todas las cúbicas de Chasles poseen un *centro*, en coincidencia con el origen de las coordenadas, y un *punto de inflexión* en el mismo centro, y que la tangente á la curva en este punto se confunde con el eje de las abscisas.

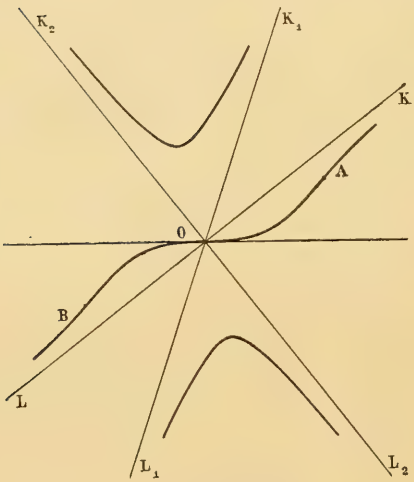


Figura 34.

Caso 1.°—Si las raíces $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son reales y desiguales, la curva consta de tres distintas ramas, como las representadas en la fig. 34. Las rectas $KL$, $K_1 L_1$ y $K_2 L_2$, que tienen respectivamente por ecuaciones

$$x - \alpha y = 0, \quad x - \beta y = 0, \quad x - \gamma y = 0,$$

serán asíntotas de la curva. La rama $AOB$ tendrá tres puntos de inflexión, en $A$, $O$ y $B$, situados en línea recta. Pero las otras dos ramas carecerán de puntos de este nombre.

Caso 2.°—Si $\alpha = \beta$ y $\alpha > \gamma$, también la curva poseerá tres asíntotas reales, dos de las cuales serán una á otra paralelas, y estarán determinadas las tres por estas ecuaciones:

$$x = \gamma y \quad \text{y} \quad x = \alpha y \pm \sqrt{\frac{1}{a(\alpha - \gamma)}}.$$

Corresponde este caso al segundo de los considerados en el estudio de las formas de las parábolas divergentes: por lo cual la curva posee *un punto de inflexión real* en el origen de las coordenadas; *dos imaginarios;* y un *nodo* en lo infinito. Hállase su forma indicada en la fig. 35.

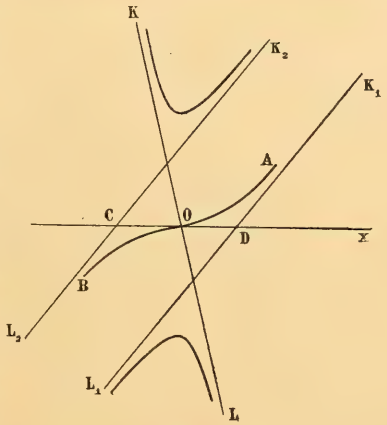



Figura 35.

Caso 3.°—Si $\alpha = \beta$ y $\alpha < \gamma$, la curva tiene una *asíntota real* y dos *imaginarias;* un *nodo* también en lo infinito; y *tres puntos de inflexión reales:* conforme indica la rama única $AOB$ de la primera figura antecedente, á que substancialmente se reduce la cúbica en el caso de que se trata.

Caso 4.°—Si $\alpha = \beta = \gamma$, la curva carece de asíntota á distancia finita, y posee un *punto de inflexión* en $O$, y otro de *retroceso* en lo infinito: asemejándose su forma á la de la rama $AOB$ de la figura segunda.

Caso 5.°—Y si $\alpha$ y $\beta$ fuesen raíces imaginarias, la curva correspondiente tendría *dos asíntotas* de este nombre, y *una real* además, determinada por la ecuación $x = \gamma y$; y constaría de una sola rama, sin *puntos dobles*, y con *tres de inflexión* en línea recta, como la $AOB$ de la fig. 34.

A las cinco formas de las cúbicas de CHASLES, que acabamos de considerar, y á las otras cinco de las parábolas divergentes, poco antes también consideradas, corresponden cinco distintos conos, sobre los cuales, en virtud de los teoremas de NEWTON y del mismo CHASLES, pueden adaptarse todas las cúbicas. Las propiedades de estos conos fueron expuestas y analizadas por MÖBIUS en el volumen, correspondiente al año 1853, de las *Abhand. der K. Süchs Ges. zu Leipzig;* y por CAYLEY en el correspondiente al 1866, de las *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.*

## XI

### CONCLUSIÓN.—SUCINTA NOTICIA BIBLIOGRÁFICA SOBRE LAS CÚBICAS EN GENERAL

**104.** Con lo expuesto en los dos últimos párrafos, á propósito de las *parábolas divergentes* y de las *cúbicas de Chasles*, damos por terminada la parte de este libro, referente al estudio de las curvas de tercer orden, individualmente consideradas, más notables.

A la exposición de la *Teoría* general de las *cúbicas* abren camino, y pueden servir como de introducción, las propiedades apuntadas de ambos grupos especiales de curvas, apoyándose para ello en el teorema de NEWTON, ampliado por CHASLES, que permite pasar de lo particular á lo general, ó extender á todas las cúbicas, en su importante y fecundo concepto de *perspectivas* de las parábolas divergentes, ó de las cúbicas del mismo CHASLES, los resultados más salientes del estudio de aquellos dos tan interesantes grupos.

Con el plan de nuestro modesto trabajo es incompatible el intento de exponer la *Teoría general* de las cúbicas, ni en somero esbozo siquiera. Limitémonos, por lo mismo, para concluir, á la consignación de algunos nombres y fechas, de sumo interés en la historia del asunto.

NEWTON, en primer término, estableció las bases de la *Teoría* en su obra fundamental, ya en las anteriores páginas varias veces mencionada, que tiene por título *Enumeratio linearum tertii ordinis,* 1706, en la cual se encuentran consignadas las diversas formas que pueden presentar las *cúbicas.* Libro, poco después, continuado y completado por STIRLING con otro

que tituló *Linecæ tertii ordinis newtonianæ,* 1717; por MACLAURIN, en su *Geometría orgánica, etc.,* 1720; por NICOLE, en su *Traité des Lignes du troisième degré,* 1729 y 1731; por EULER, en su *Introductio in analysin infinitorum,* 1748; por CRAMER, en su *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes,* 1750, etc., etc.: los cuales fueron sucesivamente completando y demostrando los resultados descubiertos por NEWTON, y enriquecieron la doctrina matemática de estas curvas con nuevas y muy interesantes proposiciones. En la magistral *Historia de las Matemáticas,* por M. CANTOR *(Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Leipzig,* t. III, 1898), puede verse la parte que á cada uno de los hombres eminentes mencionados corresponde en el desenvolvimiento de tan bello y fecundo capítulo de la *Geometría de las Curvas planas.*

Mucho más tarde, PLUCKER, en su *System der analytischen Geometrie,* 1835, propuso una nueva y más completa enumeración razonada de las curvas de tercer orden, estudiada de nuevo por CAYLEY en el lugar renglones antes mencionado, donde se halla consignada su *Classification of cubic Curves.* En la sutil y minuciosa consideración de estas curvas se ocuparon con posterioridad SALMON, en su ya clásico libro titulado *Higher plane Curves;* DUREGE, en su obra titulada *Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig,* 1871; y CLEBSCH, en sus *Vorlesungen über Geometrie,* traducidas al francés, y distribuídas en tres tomos con el título de *Léçons de Géométrie* (1879-80-83), en el segundo de los cuales se trata ampliamente de la materia á que ahora nos referimos.

De estos y de otros muchos trabajos, de empeño y transcendencia, sobre la *Teoría de las Curvas,* hallará el curioso lector muy numerosas y bien digeridas noticias en la obra del insigne profesor italiano G. LORIA, titulada *Il Passato ed il Presente delle principale Teorie Geometriche* (Torino, 1896, p. 61).

# CAPÍTULO TERCERO

## CUARTICAS NOTABLES

### I

### LAS ESPÍRICAS DE PERSEO *

**105.** Desígnanse con el nombre de *espíricas de Perseo* las curvas resultantes de cortar el *toro* ** por planos paralelos al eje de la superficie: curvas en que por primera vez, según testimonio de PROCLO, en cuyos *Comentarios* se mencionan *(ed. Taylor, p.* 139 *y p.* 146), fijó la atención PERSEO, geómetra que se supone haber vivido cerca de 130 años antes de J. C. En un *Vocabulario de términos geométricos,* más antiguo que la obra de PROCLO, atribuído á HERÓN DE ALEJANDRÍA, advirtió CHASLES, en su *Aperçu historique* (1875, p. 271), que se citan también estas curvas; pero sin expresar quién fué el primer matemático que las inventó ó dió á conocer á sus sucesores.

La ecuación del *toro,* ó del sólido engendrado por un círculo, cuando

---

* Raíz común de los vocablos *espírica* y *espirales* parece ser la palabra griega σπεῖρα: *espira* en castellano, derivada del latín *spira,* que significa «línea curva á modo de caracol; adorno de mujer para la cabeza; torta ó rosca; rosca de la culebra; nudo de los árboles; cinta ó cordón para asegurar el sombrero; basa de columna...»

Pero, aun cuando aquellas dos palabras procedan del mismo origen, los dos conceptos geométricos á que corresponden son uno de otro muy distintos, por más que, confundiendo las especies, no han faltado autores, según CHASLES y MONTUCLA, que atribuyeran sin fundamento á PERSEO la invención de las *espirales.*

** Del griego τορος, en latín *torus,* que, entre otras muchas y muy variadas acepciones, tiene las de *cuerda delgada ó cordón,* y de *moldura,* relevada en redondo, en las *basas de las columnas: bocel.*

gira y da una vuelta completa alrededor de una línea recta *(eje* del toro), situada en su mismo plano, es la siguiente:

$$\left(l \pm \sqrt{x^2 + z^2}\right)^2 = R^2 - y^2,$$

suponiendo que por eje de revolución se haya tomado el de las $y$, y que $R$ represente el radio del círculo generador, y $l$ la distancia del centro de este círculo al eje de la superficie.

La sección producida en ésta por un plano paralelo á su eje conserva siempre, por definición, la misma forma, cualquiera que sea la posición del plano, mientras su distancia al eje permanezca constante.

Suponiendo, pues, el plano secante paralelo al de las $xy$, ó $z = c$, para ecuación de la sección, referida á un sistema de coordenadas, trazadas en aquel plano, paralelamente á los ejes de las $x$ y de las $y$, y cuyo origen sea el punto de intersección del mismo plano con el eje de las $z$, hallaremos

$$(1) \qquad \left(l \pm \sqrt{x^2 + c^2}\right)^2 = R^2 - y^2: \quad ó$$

$$(2) \qquad (x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 + c^2).$$

Las *espíricas de Perseo* son, pues, curvas de *cuarto orden*, cuya forma es fácil determinar.

**106.** De su ecuación, ó de su definición geométrica, resulta, en primer lugar, que las curvas consideradas no tienen ramas infinitas.

Y las ecuaciones

$$(y^2 + x^2 - l^2 + c^2 - R^2)\,x = 0, \quad (y^2 + x^2 + l^2 + c^2 - R^2)\,y = 0,$$

obtenidas por derivación de la ecuación anterior, relativamente á $x$ y á $y$, muestran además que el origen de las coordenadas es un punto *doble* cuando se verifica la condición

$$(3) \qquad l \pm c = \pm R,$$

y que este caso es el único en que las espíricas admiten puntos de aquel nombre á distancia finita. En cualquiera de estos supuestos, los planos secantes, generadores de las espíricas, son tangentes al toro; y, no conside-

rando el caso de ser $c = -l - R$, porque $c$ debe ser positiva, ni el de ser $c = l + R$, porque entonces no existe curva, la ecuación (2) adquiere la forma

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2,$$

en la cual

$$a^2 = 4lc \quad \text{y} \quad b^2 = 4l(l + c), \text{ cuando } l + c = R;$$

y la forma

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2,$$

donde

$$a^2 = 4lc, \quad b^2 = 4l(l - c), \text{ cuando es } l - c = R.$$

En estos casos, que más adelante estudiaremos con mayor detenimiento, las *espíricas* reciben el nombre de *lemniscatas* *.

**107.** Cuando no se verifica la condición (3), las espíricas se componen de una ó de dos ramas cerradas, completamente separadas una de otra, y simétricas relativamente á los ejes coordenados. Para determinar la forma y la posición de estas ramas procuraremos, ante todo, hallar los puntos en que las abscisas ó las ordenadas adquieren valores máximos ó mínimos.

La ecuación, *derivada* de la (2),

$$(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)\, y\,dy + (x^2 + y^2 - l^2 + c^2 - R^2)\, x\,dx = 0$$

muestra que el valor de $y$ será máximo ó mínimo cuando sea $x = 0$, y también cuando $x^2 + y^2 - l^2 + c^2 - R^2 = 0$. Ó, en otros términos, cuando se verifique alguna de las igualdades

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = \pm\sqrt{l^2 - c^2},$$

á las cuales corresponden los siguientes valores de $y$, desprendidos de la ecuación (1), por sustitución en ella de estos valores de $x$:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - (l \pm c)^2} \quad \text{é} \quad y = \pm R,$$

---

* De λημνίσκος, ó *lemniscus:* faja ó banda; ó cinta estrecha, anudada en figura de *ocho;* etc.

excluyendo los de $y = \pm\sqrt{R^2 - 4l^2}$, que no satisfacen á la ecuación $y' = 0$.

Y la misma ecuación muestra que $x$ adquirirá valores máximos ó mínimos cuando $y = 0$, ó $x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2 = 0$: ecuación que, combinada con la (1), produce para $x$ valores imaginarios. Luego las espíricas sólo admiten abscisas máximas ó mínimas en los puntos determinados por las coordenadas

$$x = \pm\sqrt{(\pm R - l)^2 - c^2}, \quad \text{é} \quad y = 0.$$

Esto sentado, consideremos diferentes casos, correspondientes á las diferentes distancias del plano secante al eje del toro: los tres primeros en el supuesto de que el toro sea *abierto*, ó $l > R$; y los otros en el de ser *cerrado*, ó $l < R$.

Caso 1.°—Sea $l > R$ *(toro abierto)* y $l \gtrless c < l + R$.

De los puntos en que las ordenadas son máximas ó mínimas, sólo resultan reales los siguientes:

$$\left[x = 0, \quad y = \pm\sqrt{R^2 - (l - c)^2}\right];$$

y de aquellos en que las abscisas son máximas ó mínimas, estos otros por junto:

$$\left[x = \pm\sqrt{(R + l)^2 - c^2}, \quad y = 0\right].$$

La curva presenta, pues, entonces la forma de un óvalo (fig. 36), cuyos ejes, $DB$ y $EC$, son iguales á

$$2\sqrt{R^2 - (l - c)^2} \quad \text{y}$$

$$2\sqrt{(R + l)^2 - c^2}$$

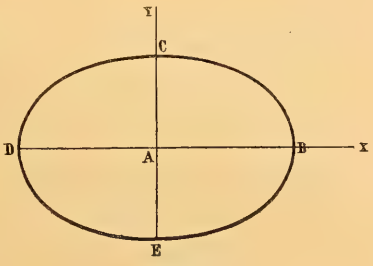


Figura 36.

Caso 2.° — Cuando sean $l > R$ y $l - R < c < l$, de los puntos en que $y$ es máxima ó mínima resultan reales los determinados por estas expresiones:

$$\left[x=0,\quad y=\pm\sqrt{R^2-(l-c)^2}\right],\quad \left[x=\pm\sqrt{l^2-c^2},\quad y=\pm R\right].$$

Y de los puntos en que $x$ es máxima ó mínima, son reales los siguientes:

$$\left[x=\pm\sqrt{(R+l)^2-c^2},\quad y=0\right].$$

La curva tiene, pues, la forma indicada en la figura 37, en la cual

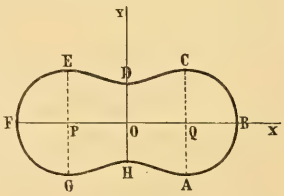


Figura 37.

$$FB=2\sqrt{(R+l)^2-c^2},$$

$$HD=2\sqrt{R^2-(l-c)^2},$$

$$PQ=2\sqrt{l^2-c^2},\ \text{y}\ \ AC=2R.$$

Caso 3.°—Si son $l>R$ y $c<l-R$, $y$ resultará máxima ó mínima en los puntos

$$\left[x=\pm\sqrt{l^2-c^2},\quad y=\pm R\right];$$

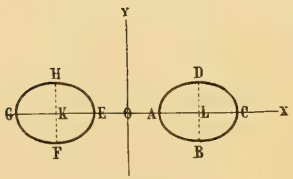


Figura 38.

y $x$, análogamente, máxima ó mínima en los que tienen por coordenadas

$$\left[x=\pm\sqrt{(\pm R-l)^2-c^2},\quad y=0\right].$$

Luego la curva será de la forma indicada en la figura 38, en la cual

$$OA=\sqrt{(R-l)^2-c^2};\ OC=\sqrt{(R+l)^2-c^2};\ DB=2R;\ \text{y}\ OL=\sqrt{l^2-c^2}.$$

Caso 4.°—Supongamos ahora que $l<R$ *(toro cerrado)*, y $l<c<R+l$. En este caso $y$ es máxima ó mínima en los puntos

$$\left[x=0,\quad y=\pm\sqrt{R^2-(l-c)^2}\right],$$

cuando es $c > R - l$; y también en los mismos puntos, y en estos otros además:

$$\left[x = 0, \quad y = \pm\sqrt{R^2 - (l+c)^2}\right],$$

cuando sea $c < R - l$.

Y, de análogo modo, $x$ será máxima ó mínima en los puntos

$$\left[x = \pm\sqrt{(R+l)^2 - c^2}, \quad y = 0\right],$$

cuando sea $c > R - l$; y máxima y mínima también en estos mismos puntos, y en los siguientes además,

$$\left[x = \pm\sqrt{(R-l)^2 - c^2}, \quad y = 0\right],$$

cuando sea $c < R - l$.

En el primero de estos casos, la curva se compone de un óvalo único, cuyos ejes son iguales á

$$2\sqrt{R^2 - (l-c)^2} \quad \text{y} \quad 2\sqrt{(R+l)^2 - c^2};$$

y, en el segundo, de dos óvalos, uno dentro de otro, cuyos ejes son respectivamente iguales á

$$2\sqrt{R^2 - (l-c)^2}, \quad 2\sqrt{(R+l)^2 - c^2}; \quad \text{y}$$
$$2\sqrt{R^2 - (l+c)^2}, \quad 2\sqrt{(R-l)^2 - c^2}.$$

Caso 5.°—Si son $l < R$ y $R - l < c < l$, las ordenadas serán máximas ó mínimas en los puntos

$$\left[x = \pm\sqrt{l^2 - c^2}, \quad y = \pm R\right], \quad \left[x = 0, \quad y = \pm\sqrt{R^2 - (l-c)^2}\right];$$

y máximas ó mínimas las abscisas en los puntos

$$\left[x = \pm\sqrt{(R+l)^2 - c^2}, \quad y = 0\right].$$

La curva tendrá, pues, una forma parecida á la que tenía en el segundo caso.

Caso 6.°—Y, por último: si $l < R$, $c < R - l$, y $c < l$, la ordenada $y$ será máxima ó mínima en los puntos

$$\left[x = 0, \quad y = \pm\sqrt{R^2 - (l \pm c)^2}\right], \quad \left[x = \pm\sqrt{l^2 - c^2}, \quad y = \pm R\right];$$

y la abscisa, $x$, máxima ó mínima también en los puntos

$$\left[x = \pm\sqrt{(\pm R - l)^2 - c^2}, \quad y = 0\right].$$

La curva se compone, pues, entonces de una rama, semejante á la curva considerada en el segundo caso; y de un óvalo, colocado en el interior de aquella rama, cuyos ejes tienen por expresión

$$2\sqrt{R^2 - (l + c)^2} \quad \text{y} \quad 2\sqrt{(R - l)^2 - c^2}.$$

**108.** Investigando las asíntotas de las espíricas por el método conocido, hállase que estas asíntotas son imaginarias, y están definidas por las ecuaciones

$$y = ix \pm il \quad \text{é} \quad y = -ix \pm il.$$

Las cuales enseñan que *las espíricas poseen dos puntos dobles en lo infinito.*

**109.** Para determinar los *focos* de las espíricas, comenzaremos, tras de esto, por advertir que las asíntotas, cuyas ecuaciones acabamos de hallar, se cortan en cuatro puntos, que son (Núm. 48) *focos singulares* de la curva á que las asíntotas se refieren. Dos de estos focos serán *reales*, y tienen por expresión analítica la siguiente: $(x = \pm l, \ y = 0)$; y los otros dos *imaginarios*, determinados por las coordenadas $(x = 0, \ y = \pm i\, l)$.

Los *focos ordinarios* (Núm. 48), también pueden determinarse fácilmente. Para lo cual propusimos recientemente un procedimiento elemental y sencillo en el volumen correspondiente al año 1900 de *El Progreso Matemático*, que publica en Zaragoza el profesor Sr. Galdeano. Pero el método que á continuación vamos á exponer, de carácter elemental asimismo, nos parece todavía más sencillo.

Consideremos, en efecto, la recta, representada por la ecuación

$$y = ix + k,$$

que debe tener con la curva definida por la (2) dos puntos de intersección, cuyas abscisas se desprenden de esta otra:

$$4\,(k^2 + l^2)\,x^2 - 4ki\,(k^2 + l^2 + c^2 - R^2)\,x$$
$$+ 4l^2\,c^2 - (k^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 0.$$

Para que la recta en cuestión sea tangente á la curva, los puntos de intersección de ambas líneas deben coincidir uno con otro, ó ser iguales, en consecuencia, las dos raíces de la ecuación anterior. Luego deberá verificarse que

$$k^2\,(k^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 + (k^2 + l^2)\,[4l^2\,c^2 - (k^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2] = 0,$$

ó

$$(k^2 + l^2)^2 - 2\,(k^2 + l^2)\,(c^2 + R^2) + (c^2 - R^2)^2 = 0:$$

ó, como fácilmente se desprende de aquí,

$$k^2 = (c \pm R)^2 - l^2.$$

La ecuación de las tangentes á la curva considerada, de coeficiente angular igual á $+ i$, tendrá, según esto, por expresión

$$y = + ix \pm \sqrt{(c \pm R)^2 - l^2}.$$

Y si el coeficiente angular fuese $- i$, hallaríase, para ecuación de las tangentes, esta otra:

$$y = - ix \pm \sqrt{(c \pm R)^2 - l^2}.$$

Todas estas tangentes constituyen, pues, dos grupos de cuatro rectas cada uno; y las intersecciones de las rectas de un grupo con las del otro determinan *diez y seis* puntos, que son precisamente los *focos ordinarios* de la espírica considerada.

De estos *diez y seis focos* habrá *reales cuatro*, correspondientes á las intersecciones de las rectas de un grupo con sus respectivas *conjugadas* del otro. Siendo menester, para precisar sus coordenadas, distinguir en la discusión diversos casos.

1.° Si es $l^2 < (R - c)^2$, los radicales que figuran en las ecuaciones de los dos grupos de rectas serán *reales*, y los cuatro focos de este nombre tendrán por coordenadas

$$\left[x = 0, \quad y = \pm\sqrt{(c \pm R)^2 - l^2}\right].$$

2.° Si $l^2 > (R + c)^2$, los mencionados radicales serán *imaginarios;* y, escribiendo las ecuaciones de las rectas á que corresponden de este modo,

$$y = i\left[x \pm \sqrt{l^2 - (c \pm R)^2}\right], \quad \text{é}$$
$$y = -i\left[x \pm \sqrt{l^2 - (c \pm R)^2}\right],$$

adviértese inmediatamente que las coordenadas de los focos *reales* serán éstas:

$$\left[x = \pm\sqrt{l^2 - (c \pm R)^2}, \quad y = 0\right].$$

3.° Y si $(R - c)^2 < l^2 < (R + c)^2$, de análogo modo se concluye que las coordenadas de los focos reales serán

$$\left[x = \pm\sqrt{l^2 - (R - c)^2}, \quad y = 0\right], \text{ y } \left[x = 0, \quad y = \pm\sqrt{(R + c)^2 - l^2}\right].$$

**110.** Las precedentes conclusiones deben modificarse cuando sea $l = R \pm c$, ó cuando (Núm. **106**) el origen de las coordenadas constituya un *punto doble* de la curva.

Porque, en efecto: si $l = R - c$, las ecuaciones de las rectas, *secantes* á la curva en dos puntos coincidentes uno con otro, y que tienen por coeficientes angulares $i$ ó $-i$, se reducen á las siguientes:

$$y = ix, \quad y = ix \pm 2\sqrt{Rc}; \quad \text{ó}$$
$$y = -ix, \quad y = -ix \pm 2\sqrt{Rc}.$$

De las cuales las $y = ix$ é $y = -ix$ pasan por el *punto doble*, donde tienen dos puntos comunes con la curva, sin ser á ésta tangentes, por lo cual no determinan ningún foco. Mientras que las otras rectas se cortan en cuatro distintos puntos y determinan *cuatro focos ordinarios*, de los cuales son *reales* dos, definidos por las coordenadas

$$\left[x = 0, \quad y = \pm 2\sqrt{Rc}\right].$$

Y del propio modo se concluirá que, cuando sea $l = R + c$, la curva posee también *cuatro focos*, y entre ellos *dos reales*, cuyas coordenadas tienen por expresión

$$\left[x = \pm 2\sqrt{Rc}, \quad y = 0\right].$$

**111.** Las *espíricas de Perseo* son caso particular de muy extensa clase de curvas, denominadas también *espíricas*, que comprende todas las secciones planas del toro: curvas estudiadas por PAGANI en una Memoria premiada en 1824 por la Academia de Bruselas, y después por DARBOUX *(Nouvelles Annales,* 1864, *p.* 156); por LA GOURNERIE *(Journal de Liouville,* 1869, *p.* 9); etc. Siendo de advertir que las espíricas, en general, se hallan á su vez contenidas en otra clase más amplia de curvas, de que trataremos más adelante.

## II

### LAS CASSÍNICAS

**112.** Pertenecen á la clase de las *espíricas de Perseo* las curvas planas, engendradas por un punto móvil, de tal modo que el producto de sus distancias á dos puntos fijos, situados en el mismo plano de la curva, sea constante. Distínguense en particular estas curvas con el nombre de *óvalos de Cassini*, ó simplemente de *cassínicas*, por haber sido consideradas por el célebre astrónomo Dominico CASSINI, que pretendió sustituirlas á las elipses de KEPLER en el estudio del movimiento de los astros.

Sean $2l$ la distancia de los puntos fijos considerados, $F$ y $F'$ (fig. 39), y $m$ la constante dada. Designando por $M$ el punto generador de la curva, por definición resulta que

$$MF \times MF' = m.$$

Y tomando la recta $F\,F'$ para eje de las abscisas, y su punto medio como origen de las coordenadas,

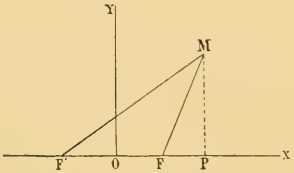


Figura 39.

$$\sqrt{(x-l)^2+y^2} \times \sqrt{(x+l)^2+y^2} = m:$$

ó

$$(x^2 + y^2 + l^2)^2 = m^2 + 4l^2\,x^2:$$

ó, poniendo $m^2 = 4l^2\,c^2$,

$$(x^2 + y^2 + l^2)^2 = 4l^2\,(x^2 + c^2).$$

**113.** Comparando esta ecuación con la (2) del Núm. **105**, vese que las *cassínicas* coinciden con las *espíricas* resultantes de cortar el toro por un plano paralelo al eje, y cuya distancia á este eje sea igual al radio del círculo generador de la superficie.

Poniendo, pues, $R = c$ en los resultados obtenidos en el Núm. **107**, por referencia á las espíricas, conclúyese sin dificultad que las curvas de Cassini, desprovistas de puntos *duplos*, á distancia finita, admiten tres formas diferentes.

Caso 1.°—Si $l > 2c$ (caso 3.° de las espíricas), la curva se compondrá de dos óvalos, como en la figura 33.

Caso 2.°—Si $2c > l > c$ (caso 2.° de las espíricas), la curva tendrá la forma indicada en la figura 32.

Caso 3.°—Si es $l \leqq e$ (caso 4.° de las espíricas), la curva presentará la forma de una elipse. Tanto, que algunos autores aplican entonces á la curva el nombre de *elipse de Cassini* (fig. 36).

En el caso de ser $l = 2c$, la curva se reduce á la llamada *lemniscata de Bernoulli*, que más adelante especialmente estudiaremos, y la cual tiene por ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 8c^2\,(x^2 - y^2).$$

**114.** La ecuación de las *cassínicas*, en coordenadas polares, es

$$\rho^4 - 2l^2\rho^2\cos 2\theta + l^4 = 4l^2c^2.$$

Y, partiendo de ella y apoyándose en las fórmulas conocidas

$$\operatorname{sen} V = \rho\frac{d\theta}{ds}, \quad \cos V = \frac{d\rho}{ds},$$

en las cuales $s$ representa la longitud de los arcos de la curva, y $V$ el ángulo de la tangente con el radio vector del punto de contacto, se obtendrá fácilmente la expresión del *radio de curvatura* de las curvas consideradas por el método siguiente (Cesàro: *Lezioni di Geometria intrinseca, Napoli*, 1896, *p.* 42).

Derivando la ecuación de la curva relativamente á $s$, y contando con las anteriores igualdades, dedúcese que

$$(A) \qquad \rho^2\cos V = l^2\cos(2\theta - V).$$

Y, eliminando $\rho$ entre esta ecuación y la de la curva, se hallará la siguiente:

$$(B) \qquad l\operatorname{sen} 2\theta = 2c\cos V.$$

Derivando de nuevo esta ecuación, relativamente á $s$, obtiénese

$$l\cos 2\theta\,\frac{d\theta}{ds} = -c\operatorname{sen} V\,\frac{dV}{ds};$$

y, por lo tanto,

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{l}{c}\cdot\frac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen} V}\cdot\frac{d\theta}{ds} = -\frac{l}{c}\cdot\frac{\cos 2\theta}{\rho}.$$

Advirtamos ahora que, si por $\varphi$ se representa el ángulo formado por la tangente á la curva con el eje de las abscisas,

$$\theta = \varphi + V.$$

Y, en consecuencia, recordando la igualdad conocida $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}$, en la cual $R$ representa el radio de curvatura,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} - \frac{l}{c\rho}\cos 2\theta.$$

Notemos, asimismo, que de las expresiones $(A)$ y $(B)$ se desprende esta otra

$$\rho^2 = \frac{l^2(\cos 2\theta \cos V + \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} V)}{\cos V} = l^2 \cos 2\theta + 2cl \operatorname{sen} V.$$

La cual, combinada con la ecuación de la curva, produce los siguientes resultados:

$$\cos 2\theta = \frac{\rho^4 + l^4 - 4l^2c^2}{2l^2\rho^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} V = \frac{\rho^4 - l^4 + 4l^2c^2}{4cl\rho^2}.$$

Luego, finalmente:

$$\frac{1}{R} = \frac{\operatorname{sen} V}{\rho} + \frac{l}{c\rho}\cos 2\theta = \frac{3\rho^4 + l^4 - 4l^2c^2}{4cl\rho^3}.$$

Igualdad ésta que determina el radio de curvatura de las cassínicas, en función del radio vector, $\rho$, del punto á que se refiere.

**115.** Aplicando á las *cassínicas* el procedimiento de investigación de los *focos*, explicado en el núm. **109** al tratar de las *espíricas*, en cuya clase se hallan comprendidas, encuéntranse los mismos resultados de entonces, con la simplificación consiguiente al supuesto de ser ahora $R = c$.

É inmediatamente se infiere que las cassínicas tienen *dos focos singulares reales*, definidos por las coordenadas $(\pm l, 0)$. Y *cuatro más ordinarios, reales* también, cuyas coordenadas son

$$(x = \pm l, \quad y = 0) \quad \text{y} \quad (x = \pm\sqrt{l^2 - 4c^2}, \quad y = 0),$$

cuando $l > 2c$; y

$$(x = \pm l, \quad y = 0) \quad \text{y} \quad (x = 0, \quad y = \pm\sqrt{4c^2 - l^2}),$$

cuando $l < 2c$.

De donde se concluye que los puntos $F$ y $F'$ (figura 39), que tienen por coordenadas $x = \pm l$ é $y = 0$, pueden considerarse á la vez como *focos singulares y ordinarios de la misma curva.*

**116.** Por medio de la expresión de $R$, renglones antes obtenida (Número **114**), determínase fácilmente la condición para que la curva tenga *puntos de inflexión reales*, así como se determinan también las coordenadas de estos puntos. Buscando, en efecto, los valores de $\rho$ que corresponden á los de $R = \infty$, hállase que los puntos reales de inflexión de la curva son los de intersección de ésta con la circunferencia definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = \sqrt{\frac{1}{3}(4l^2c^2 - l^4)};$$

siempre que se verifique la condición de ser $l \gtrless 2c$, y que al mismo tiempo corte la circunferencia á la curva de que se trata. Condición esta última que se determina eliminando $y^2$ entre las ecuaciones de ambas curvas consideradas (Núms. **112** y **116**), y expresando luego que el valor de $x^2$, que satisface á la *resultante*, es positivo. De donde se desprende que ha de ser

$$\sqrt{\frac{1}{3}(4l^2c^2 - l^4)} + l^2 > 2lc, \quad \text{ó}$$

$$(l - 2c)(l - c) < 0,$$

ó, simultáneamente, $l \lesssim 2c$ y $l > c$: como en el caso segundo de los considerados en el Núm. **113**, y también en el de la *lemniscata*.

**117.** La rectificación de las curvas de Cassini se obtiene por intermedio de las integrales elípticas de primera especie, conforme mostró *Serret* en el *Journal de Liouville, t.* VIII, *p.* 145, y en su *Cours de Calcul Dif. et Integral, t.* II, 1880, *p.* 260: de donde procede el análisis á continuación empleado para hallar las fórmulas de resolución de tan interesante problema.

Sea, en primer lugar, $l > 2c$; en cuyo caso la curva se compone de dos óvalos iguales. Considerando uno de estos óvalos, tracemos por el origen de las coordenadas dos rectas que le corten; y sean $\theta_0$ y $\theta_1$ los ángulos que estas rectas forman con el eje de las abscisas. Entre ambas rectas quedan

comprendidos dos arcos del óvalo considerado, cuyas longitudes, $s$ y $s_1$, vamos á determinar.

Poniendo en la ecuación polar de la curva $2c = l \operatorname{sen} 2\alpha$, hallaremos que

$$\rho^2 = l^2 \left[\cos 2\theta \pm \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}\right].$$

De donde se deduce que

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \mp \frac{\rho \operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}}, \quad \text{y}$$

$$\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2} = \rho^2 \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha} = \frac{4c^2 \rho^2}{l^2 (\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha)}.$$

Las longitudes de los arcos considerados se hallan, pues, determinadas por las expresiones siguientes:

$$s = 2c \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}} d\theta, \quad \text{y}$$

$$s_1 = 2c \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\theta - \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}} d\theta.$$

De las cuales, por adición y substracción ordenadas de ambos miembros y llevando en cuenta la identidad

$$\left[\sqrt{\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}} \pm \sqrt{\cos 2\theta - \sqrt{\cos^2 2\theta - \cos^2 2\alpha}}\right]^2 = 2 (\cos 2\theta \pm \cos 2\alpha),$$

se desprenden, por de pronto, estos resultados:

$$s + s_1 = 2c \sqrt{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}} \quad \text{y}$$

$$s - s_1 = 2c \sqrt{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta + \cos 2\alpha}},$$

que fácilmente se transforman luego en los que siguen, poniendo en el primero $\operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi$, y en el segundo $\operatorname{sen}\vartheta = \cos\alpha \operatorname{sen}\psi$, y representando por $\varphi_0$ y $\varphi_1$, y por $\psi_0$ y $\psi_1$ los valores de $\varphi$ y de $\psi$, cuando sean $\vartheta = \vartheta_0$ y $\vartheta = \vartheta_1$:

$$s + s_1 = 2c \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{l - \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\varphi}}, \quad \text{y}$$

$$s - s_1 = 2c \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{l - \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\psi}}.$$

De donde se deducirán los valores de $s$ y $s_1$, mediante el cálculo de dos *integrales elípticas de primera especie.*

En el supuesto de ser $l < 2c$, pondremos $l = 2c \operatorname{sen} 2\alpha$; y, representando por $s$ y $s_1$ las longitudes de dos arcos tales que los radios vectores de las extremidades del uno sean perpendiculares á los radios vectores de las extremidades del otro, encontraremos

$$s = 2c \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\sqrt{\cos 2\vartheta + \sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha}} d\vartheta \quad \text{y}$$

$$s_1 = 2c \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\sqrt{-\cos 2\vartheta + \sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha}} d\vartheta;$$

y, por lo tanto, hallándose $\vartheta_0$ y $\vartheta_1$ comprendidos entre 0 y $\frac{\pi}{4}$,

$$s + s_1 = 2c\sqrt{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\sqrt{\cot 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha}} d\vartheta, \quad \text{y}$$

$$s - s_1 = 2c\sqrt{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\sqrt{-\cot 2\alpha + \sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha}}}{\sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha}} d\vartheta.$$

Poniendo ahora

$$\sqrt{\cos^2 2\vartheta + \cot^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen} 2\alpha},$$

en la primera de estas integrales, y

$$\sqrt{\cos^2 2\theta + \cot^2 2\alpha} = \frac{1 - 2\cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\psi}{\operatorname{sen} 2\alpha},$$

en la segunda, conclúyese, finalmente, que

$$s + s_1 = \sqrt{2cl} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\varphi}}, \quad \text{y}$$

$$s - s_1 = \sqrt{2cl} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\psi}}.$$

De manera que también en este caso $s$ y $s_1$ *dependen de integrales elípticas de 1.ª especie.*

**118.** Para hallar el área $A$, limitada por un arco de las curvas de Cassini y por los radios vectores correspondientes á los puntos extremos del arco, partiremos de la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2\, d\theta = \frac{l^2}{4}(\operatorname{sen} 2\theta_1 - \operatorname{sen} 2\theta_0) \pm \frac{l^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} - \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta.$$

Cuando sea $l < 2c$ (fig. 36 y 37), se empleará en esta fórmula el signo $+$. Pero cuando $l > 2c$ (fig. 38), adviértase que entre las rectas que forman con el eje de las abscisas los ángulos $\theta_0$ y $\theta_1$ se hallan comprendidos dos arcos de cada óvalo; debiendo entonces emplearse el signo $-$, cuando se consideren los arcos más próximos del origen, y el $+$, cuando se atienda á los más distantes.

En cualquier caso, la integral que figura en la expresión de $A$ depende de las integrales elípticas, como pasamos á demostrar ahora.

Supongamos primeramente $l < 2c$, ó $\frac{l}{2c} < 1$. Pues en este caso,

$$\int \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} - \operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta = \frac{2c}{l}\int \sqrt{l - \frac{l^2}{4c^2}\operatorname{sen}^2 2\theta}\, d\theta.$$

*Y el área depende de una integral elíptica de segunda especie.*

Pero si $l > 2c$, poniendo

$$\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2c}{\sqrt{l^2 - 4c^2}} \sec\varphi, \quad \text{y} \quad \frac{l^2 - 4c^2}{l^2} = k^2,$$

nos resultará la igualdad

$$\int \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} - \operatorname{sen}^2 2\vartheta}\; d\vartheta = \int \sqrt{\frac{4c^2}{l^2}\cos^2 2\vartheta - k^2 \operatorname{sen}^2 2\vartheta}\; d\vartheta$$

$$= -\frac{2c^2 k^2}{l^2} \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{[1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2c^2}{l^2}\left[\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} - \int \frac{d\varphi}{[1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Por la teoría de las integrales elípticas sábese además que

$$\int \frac{d\varphi}{(1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - k^2}\left[\int \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\; d\varphi - \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right];$$

expresión de certidumbre comprobable por diferenciación.

Luego

$$\int \sqrt{\frac{4c^2}{l^2} - \operatorname{sen}^2 2\vartheta}\; d\vartheta = \frac{2c^2}{l^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} - \frac{1}{2}\int \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\; d\varphi + \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{2\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Y, en este caso, claramente se ve que el valor de $A$ depende *de las integrales elípticas de 1.ª y 2.ª especie.*

**119.** Los óvalos de Cassini desempeñan un papel importante en la teoría de las funciones analíticas, porque limitan las áreas de representación de los puntos en que aquellas funciones pueden ser desarrolladas

en serie, ordenada según las potencias enteras y positivas de un producto $(x - a)(x - b)$, en el cual $a$ y $b$ son dos números complejos, figurados por los focos de la curva, y $x$ la variable. (Véase, por ejemplo, HOÜEL: *Cours de Calcul Infinitésimal, t.* IV, 1881, *p.* 42.)

**120.** De los óvalos de Cassini han tratado varios distinguidos geómetras. Primeramente los estudió, en 1781, por medio de la Geometría pura, *Malfatti*, en un trabajo titulado *Della curva casseniana.* Y más tarde ahondaron mucho más en el análisis de las mismas curvas GARLIN *(Nouvelles Annales des Mathématiques,* 1855, p. 305); LAGUERRE *(Bulletin de la Société Phylomatique de Paris,* 1868, *p.* 40); DARBOUX *(Sur une Classe remarquable de Courbes, etc., Paris,* 1873, *p.* 78); SERRET *(l. c.);* etc., etc.

## III

### LAS LEMNISCATAS

**121.** Dicho queda poco antes que el nombre de *lemniscatas* se aplica á las *espíricas,* representadas por una ú otra de estas ecuaciones:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2,$$
$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2.$$

La primera de las cuales, según se demostrará poco más adelante, representa las curvas *inversas* y las *podarias centrales* de la elipse; y la segunda las *inversas* también y *podarias centrales* de la hipérbola. Por eso J. BOOTH *(A Treatise on some New Geometrical Methods, London, t.* II, 1877, *p.* 163) dió á las primeras el nombre de *lemniscatas elípticas,* y el de *lemniscatas hiperbólicas* á las segundas.

En la primera de las dos ecuaciones precedentes se puede siempre suponer que $b > a$; y, por medio de las fórmulas (Núm. **106**)

$$R = l + c, \quad l = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}, \quad \text{y} \quad c = \frac{a^2}{4l},$$

se determinan el *toro* y la posición del plano paralelo á su eje, que produ-

ce, por su intersección con aquel sólido, una lemniscata elíptica dada. Y, por medio de estas otras,

$$R = l - c, \quad l = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{y} \quad c = \frac{a^2}{4l},$$

se resuelve la misma cuestión, cuando se trata de la lemniscata hiperbólica.

En el primero de estos casos el toro será *cerrado,* y en el segundo *abierto;* siendo en ambos tangente al toro el plano secante.

**122.** Las lemniscatas pueden obtenerse también buscando las curvas que satisfacen á la condición. (Booth, *l. c.)*

$$\rho^2 \rho_1^2 = e^4 \pm f^2 r^2: \tag{1}$$

en la cual $\rho$, $\rho_1$ y $r$ representan las distancias de cualquiera de sus puntos á otros tres puntos fijos, $F$, $F'$ y $O$, colocados en la misma recta, á igual distancia, $e$, del $O$ el $F$ que el $F'$; y $f$ una constante dada (fig. 39).

Por ser, tomando el punto $O$ como origen de las coordenadas, y la recta $FF'$ como eje de las abscisas,

$$\rho^2 = y^2 + (x - e)^2, \quad \rho_1^2 = y^2 + (x + e)^2 \quad \text{y} \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

la ecuación cartesiana de las curvas consideradas será ésta:

$$(x^2 + y^2)^2 = (f^2 + 2e^2)\, x^2 + (f^2 - 2e^2)\, y^2.$$

Ecuación que representa una lemniscata *elíptica,* cuyos parámetros son

$$a^2 = f^2 - 2e^2 \quad \text{y} \quad b^2 = f^2 + 2e^2,$$

cuando $f^2 > 2e^2$; y, si $f^2 < 2e^2$, una lemniscata *hiperbólica,* con estos otros parámetros:

$$b^2 = f^2 + 2e^2 \quad \text{y} \quad a^2 = 2e^2 - f^2.$$

Previas estas nociones generales, estudiaremos ahora separadamente cada una de las lemniscatas mencionadas.

**123.** *Lemniscata elíptica.*—La ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$$

de la lemniscata elíptica muestra inmediatamente que la curva es simétrica relativamente á los ejes de las coordenadas; que corta al de las abscisas en los puntos $(\pm b, 0)$, y al de las ordenadas en los puntos $(0, \pm a)$; que el origen es un *punto aislado* de la misma curva; que no posee ésta ramas infinitas reales; y que cualquier recta, trazada por el origen de las coordenadas, la corta en dos puntos reales, diferentes del punto aislado $O$ (fig. 40).

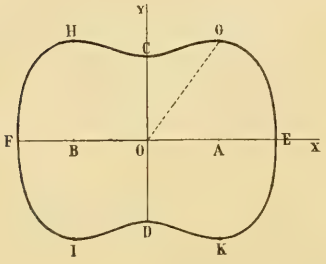


Figura 40.

La ecuación

$$y' = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]\, x}{[2(x^2 + y^2) - a^2]\, y}$$

muestra además que las tangentes en los puntos $C$ y $D$ son paralelas al eje de las abscisas, y que las correspondientes á los puntos $E$ y $F$ lo son asimismo al eje de las ordenadas.

**124.** La determinación de $x$ é $y$ por medio de la ecuación

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} a^2,$$

combinada con la ecuación de la curva, produce resultados imaginarios. Luego no existen más puntos en que la tangente sea paralela al eje de las ordenadas que los ya encontrados: $(y = 0, x = \pm b)$, ó los $E$ y $F$.

La circunferencia $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} b^2$ corta á la curva en cuatro puntos, cuyas coordenadas se deducen de estas ecuaciones:

$$x^2 = \frac{b^2(b^2 - 2a^2)}{4(b^2 - a^2)} \quad \text{é} \quad y^2 = \frac{b^4}{4(b^2 - a^2)}.$$

Luego, cuando sea $b^2 > 2a^2$, existen cuatro puntos, $G$, $H$, $J$, $K$, colocados sobre aquella circunferencia, en los cuales la tangente es paralela al eje de las abscisas.

Por ser $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{b^2 - 2a^2}$ cuando es $y = a$, vese que las pa-

ralelas al eje de las abscisas, trazadas por los puntos $C$ y $D$, cortan á la curva en otros dos puntos reales, cuyas abscisas son iguales á $\pm\sqrt{b^2-2a^2}$, siempre en el supuesto de ser $b^2 > 2a$.

Y en el caso de ser $b^2 < 2a^2$, no existen aquellos cuatro puntos en que la tangente es paralela al eje de las abscisas; ni tampoco las paralelas al eje de las abscisas, trazadas por los puntos $C$ y $D$, cortan á la curva en puntos reales. La lemniscata se asemeja entonces por su forma á la elipse.

**125.** En los núms. **106** y **108** quedó advertido que la curva de que tratamos posee un *punto doble* en el origen de las coordenadas, y otros dos del mismo nombre en lo infinito. De manera que esta curva de *cuarto orden*, con *tres puntos singulares*, pertenece á la categoría de las *unicursales*. Y, efectivamente, poniendo en su ecuación $y = tx$, y luego

$$\sqrt{a^2 t^2 + b^2} = at + z,$$

encuéntranse las expresiones

$$x = \frac{2a^2 z\,(z^2 + b^2)}{z^4 + 2\,(2a^2 - b^2)\,z^2 + b^4} \quad \text{é} \quad y = \frac{a\,(z^2 + b^2)\,(b^2 - z^2)}{z^4 + 2\,(2a^2 - b^2)\,z^2 + b^4},$$

para determinar los valores de $x$ é $y$ en función racional de $z$.

**126.** La ecuación polar de la *lemniscata elíptica* es

$$\rho = \pm\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta}.$$

De la cual se deduce, para expresión del radio de curvatura $R$, la siguiente:

$$R = \frac{[(a^2 + b^2)\,\rho^2 - a^2 b^2]^{\frac{3}{2}}}{[2\,(a^2 + b^2)\,\rho^2 - 3a^2 b^2]\,\rho}.$$

Y de aquí se concluye que la curva tiene un punto de inflexión *doble aislado* en el origen de las coordenadas, y otros cuatro, de inflexión también, sobre la circunferencia de radio igual á

$$\rho = \sqrt{\frac{3a^2 b^2}{2\,(a^2 + b^2)}}.$$

Buscando los valores de $\theta$, correspondientes á éste de $\rho$, obtiénese la igualdad

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{b^2(2b^2 - a^2)}{2(b^4 - a^4)};$$

la cual, combinada con las desigualdades $0 < \operatorname{sen}^2\theta < 1$, muestra que los valores buscados de $\theta$ solamente serán reales cuando sea $b^2 > 2a^2$. En este supuesto, la curva tendrá, sí, los cuatro puntos de inflexión reales que acabamos de determinar (fig. 40); pero no cuando sea $b^2 < 2a^2$, en cuyo caso no poseerá ninguno.

**127.** Los *focos ordinarios* de la lemniscata elíptica se determinan inmediatamente por las fórmulas del Núm. **110**, sustituyendo en ellas $R$ y $c$ por sus valores

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \quad \text{y} \quad c = \frac{a^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}},$$

que resultan de las igualdades anteriormente establecidas:

$$R = l + c, \quad l = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}, \quad \text{y} \quad c = \frac{a^2}{4l}.$$

De donde se concluye que la curva posee *cuatro focos ordinarios,* determinados por las intersecciones de las rectas

$$\pm\sqrt{b^2 - a^2}\,(Y + iX) + ab = 0, \quad \text{y}$$
$$\pm\sqrt{b^2 - a^2}\,(Y - iX) + ab = 0:$$

dos *imaginarios,* y *reales* los otros dos, definidos éstos por las coordenadas

$$x = 0 \quad \text{é} \quad y = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Y, además, otros dos focos *singulares reales,* cuyas coordenadas son (Número **109**)

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{é} \quad y = 0,$$

en coincidencia con los puntos $F$ y $F'$ de la figura 39.

**128.** *La lemniscata elíptica* es *la podaria* de la elipse,

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2,$$

*relativamente al centro.* (SERRET: *Journal de Liouville*, 1843, *p.* 497.)

En efecto: las ecuaciones de la tangente á la elipse en el punto $(x, y)$ de la curva, y de la perpendicular trazada desde el centro á esta tangente, representando por $X$ é $Y$ las coordenadas de un punto cualquiera, en general, son

$$b^2 yY + a^2 xX = a^2 b^2 \quad \text{y} \quad a^2 xY = b^2 yX;$$

á las cuales satisfacen estos valores de $x$ é $y$:

$$x = \frac{b^2 X}{X^2 + Y^2} \quad \text{é} \quad y = \frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2},$$

que, sustituídos en la ecuación de la elipse, la transforman en la de la lemniscata hasta ahora considerada, primera del núm. **121**, sin más diferencia que el cambio de las $x$ é $y$ por las $X$ é $Y$.

**129.** Entre la elipse y la lemniscata elíptica existe otra relación, no menos notable que la anterior, que pasamos á demostrar.

Aplicando, en efecto, á la ecuación de la elipse,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

la transformación por *radios vectores recíprocos*, definida por las expresiones conocidas

$$x = \frac{abX}{X^2 + Y^2} \quad \text{é} \quad y = \frac{abY}{X^2 + Y^2},$$

hállase precisamente la ecuación de las lemniscatas elípticas. Luego la *lemniscata de este nombre es la curva inversa de la elipse, relativamente á su centro*, conforme, al definirla en el Núm. **121**, ya se adelantó.

**130.** A lo expuesto sobre las lemniscatas elípticas, consideramos procedente agregar en este libro la deducción, en coordenadas tangenciales, de la ecuación de estas curvas.

Para ello advirtamos ante todo que, por ser

$$y' = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]\,x}{[2(x^2 + y^2) - a^2]\,y},$$

la ecuación de la tangente á la lemniscata en el punto $(x, y)$,

$$Y = y'\,X + y - y'\,x,$$

podrá escribirse de este modo

$$Y = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]\,x\,X + (x^2 + y^2)^2}{[2(x^2 + y^2) - a^2]\,y},$$

ó

$$u\,Y + v\,X + 1 = 0:$$

en la cual

$$u = -\frac{[2(x^2 + y^2) - a^2]\,y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{y} \quad v = \frac{[b^2 - 2(x^2 + y^2)]\,x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Mas, poniendo $x^2 + y^2 = r^2$, de esta ecuación y de la correspondiente á la curva se deduce que

$$x^2 = \frac{r^2(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2} \quad \text{é} \quad y^2 = \frac{r^2(b^2 - r^2)}{b^2 - a^2}.$$

Luego

$$u^2 = \frac{(2r^2 - a^2)^2(b^2 - r^2)}{(b^2 - a^2)\,r^6} \quad \text{y} \quad v^2 = \frac{(b^2 - 2r^2)^2(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)\,r^6};$$

y, por lo tanto,

$$(a^2 v^2 + b^2 u^2 + 4)\,r^4 = 4(a^2 + b^2)\,r^2 - 3a^2 b^2, \quad \text{y}$$

$$(u^2 + v^2)\,r^6 = (a^2 + b^2)\,r^2 - a^2 b^2.$$

Y, eliminando $r$ entre estas ecuaciones, se hallará, para ecuación en coordenadas tangenciales de la lemniscata elíptica (Booth, *l. c.*, *t.* I, *p.* 145),

$$a^2 b^2 (a^2 v^2 + b^2 u^2 + 4)^3 - (a^2 + b^2)^2 (a^2 v^2 + b^2 u^2 + 4)^2$$
$$- 18 a^2 b^2 (u^2 + v^2) (a^2 v^2 + b^2 u^2 + 4) + 16 (a^2 + b^2) (u^2 + v^2)$$
$$+ 27 a^4 b^4 (u^2 + v^2)^2 = 0.$$

**131.** Con auxilio de esta ecuación puédense también determinar de nuevo los *focos* de la curva, conforme se indica á continuación.

La recta, en general, á que corresponde la ecuación

$$uY + vX + 1 = 0$$

será tangente á la curva y tendrá por coeficiente angular $\pm i$, si $u$ y $v$ satisfacen á la ecuación tangencial de la misma curva, y si además se establece entre ellas la relación $v = \pm iu$.

Mas, poniendo en la ecuación de la curva, renglones antes deducida, $\pm iu$ en vez de $v$, obtiénese otra, que inmediatamente se descompone en las dos siguientes:

$$(b^2 - a^2) u^2 + 4 = 0, \quad \text{y}$$
$$a^2 b^2 (4 - a^2 u^2 + b^2 u^2) - (a^2 + b^2)^2 = 0.$$

A los valores de $u$ que se desprenden de la primera, y á los de $v$, deducidos de la $v = \pm iu$, corresponden las rectas

$$2Y \pm i \left(2X \pm \sqrt{b^2 - a^2}\right) = 0,$$

que coinciden con las asíntotas de la curva, y determinan por sus intersecciones los *focos singulares* de la misma.

Y á los de $u$, desprendidos de la segunda, y de $v$, sometidos á la misma condición, $v = \pm iu$, corresponden las rectas

$$\pm \sqrt{b^2 - a^2} (Y \pm iX) + ab = 0,$$

que, por sus intersecciones, determinan los *focos ordinarios*.

**132.** Para rectificar la lemniscata elíptica, tenemos la fórmula

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^4 \operatorname{sen}^2\theta + b^4 \cos^2\theta}{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta};$$

ó, poniendo $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$,

$$\frac{ds^2}{d\omega^2} = \frac{a^4 \cos^2\omega + b^4 \operatorname{sen}^2\omega}{a^2 \cos^2\omega + b^2 \operatorname{sen}^2\omega}.$$

Si además suponemos que

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang}\lambda,$$

de donde se desprende esta otra igualdad

$$d\omega = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^4\, d\lambda}{a^4 \operatorname{sen}^2\lambda + b^4 \cos^2\lambda},$$

nos resultará

$$ds = \frac{a^3}{b^2} \cdot \frac{d\lambda}{\left[1 - \frac{b^4 - a^4}{b^4} \operatorname{sen}^2\lambda\right] \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \operatorname{sen}^2\lambda}}.$$

De manera que el valor buscado de $s$ depende de *una integral elíptica de tercera especie.* (Booth, *l. c.*, *t.* I, *p.* 196.)

**133.** El área limitada por la lemniscata elíptica se obtiene por medio de la fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta)\, d\theta = \frac{a^2 + b^2}{2} \pi.$$

Area, como se ve, *igual á la mitad de la suma de las áreas de los círculos cuyos radios son iguales á los semiejes de la curva.*

**134.** *Lemniscata hiperbólica.* — Consideremos ahora la curva cuya ecuación es

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2.$$

Y comparando esta ecuación con la de la lemniscata elíptica, inmediatamente se concluye que las fórmulas referentes á esta curva serán aplicables á la segunda, ó lemniscata hiperbólica, con sólo poner en ellas $-a^2$ en vez de $+a^2$.

La lemniscata hiperbólica tiene la forma indicada en la figura 41: simétrica relativamente á los ejes de las coordenadas; sin ramas infinitas, ni posibilidad de ser cortada en más de dos puntos, diferentes del $O$, por las rectas que pasan por el de origen $O$, perteneciente también á la curva; y secante al eje de las abscisas en los $E$ y $E'$, á las distancias $\pm b$ del mismo $O$. *Punto doble* este último de la curva, en el cual se reunen dos puntos de inflexión y se cruzan dos tangentes, cuyos ángulos, $\omega$ y $180° - \omega$, se hallan definidos por la expresión $\text{tang}\,\omega = \pm \frac{b}{a}$.

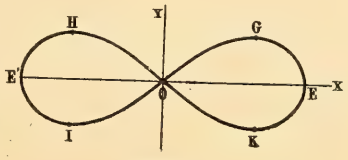


Figura 41.

Por ser ahora

$$y' = \frac{[b^2 - 2\,(x^2 + y^2)]\,x}{[2\,(x^2 + y^2) + a^2]\,y},$$

vese que las tangentes á la curva son paralelas al eje de las ordenadas en los puntos $E$ y $E'$, y al eje de las abscisas en los $G$, $H$, $J$, $K$, de intersección de la curva con la circunferencia $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\,b^2$. Las coordenadas de estos puntos se hallan determinadas por las ecuaciones

$$x^2 = \frac{b^2\,(b^2 + 2\,a^2)}{4\,(b^2 + a^2)} \quad \text{ó} \quad y^2 = \frac{b^4}{4\,(b^2 + a^2)}.$$

El radio de curvatura, en coordenadas polares, tiene por expresión

$$R = \frac{[(b^2 - a^2)\,\rho^2 + a^2\,b^2]^{\frac{3}{2}}}{[2\,(b^2 - a^2)\,\rho^2 + 3\,a^2\,b^2]\,\rho}.$$

De la cual, contando con la ecuación polar de la misma curva, se des-

prende que las lemniscatas hiperbólicas no poseen puntos de inflexión reales, fuera de los dos que están reunidos en el origen de las coordenadas. Lo que sí poseen es cuatro puntos de inflexión *imaginarios*, que propenden hacia lo *infinito*, conforme el valor de $b$ tiende al de $a$.

Pero, además del *punto doble* en el mismo origen, *las lemniscatas hiperbólicas tienen otros dos puntos dobles en lo infinito, y son, por lo tanto, unicursales:* pudiendo obtenerse la expresión de sus coordenadas, $x$ é $y$, en función racional de la variable $z$, con solamente cambiar en las fórmulas del núm. **125**, $a^2$ en $-a^2$. Pero las fórmulas así obtenidas contienen coeficientes imaginarios, y, por lo mismo, es preferible deducir otras, poniendo en la ecuación de la curva $y = tx$, y luego $\sqrt{b^2 - a^2 t^2} = (b + \alpha t)\, z$: de todo lo cual resulta

$$x = \frac{2\, b a^2 z\, (1 + z^2)}{(a^2 + b^2)\, z^4 + 2\, (a^2 - b^2)\, z^2 + a^2 + b^2}, \quad \text{é}$$

$$y = \frac{2\, b^2 a z\, (1 - z^2)}{(a^2 + b^2)\, z^4 + 2\, (a^2 - b^2)\, z^2 + a^2 + b^2}.$$

**135.** Para rectificar las lemniscatas hiperbólicas, partiremos de la ecuación de la curva, referida á coordenadas polares,

$$\rho = b^2 \cos^2 \theta - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta:$$

de la cual se deduce esta otra:

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^4 \operatorname{sen}^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta}{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Y, sustituyendo en ésta (Booth: *l. c., t.* II, *p.* 164) por $\theta$ una nueva variable, $\omega$, ligada con $\theta$ por la relación

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{b^4 \operatorname{sen}^2 \omega}{a^2 b^2 + b^4 \operatorname{sen}^2 \omega + a^4 \cos^2 \omega},$$

obtiénese, en primer lugar,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{b}{\cos \omega} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{d\omega} = \frac{b^2 a\, (a^2 + b^2) \cos \omega}{(a^2 b^2 + b^4 \operatorname{sen}^2 \omega + a^4 \cos^2 \omega) \sqrt{b^2 + a^2 \cos^2 \omega}};$$

y, después,

$$ds = \frac{b^3}{a\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{d\omega}{\left[1+\frac{b^2-a^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\omega\right]\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\operatorname{sen}^2\omega}}.$$

*La longitud de los arcos de las lemniscatas hiperbólicas depende, según esto, de una integral elíptica de tercera especie, cuando es* $b \gtrless a$*; y de otra, de primera, cuando* $a = b$. (Booth: *l. c.)*.

**136.** Para obtener el área limitada por la mitad *OKEGO* de la curva, empléase la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\theta_1}^{+\theta_1}(b^2\cos^2\theta - a^2\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = \frac{b^2-a^2}{2}\theta_1 + \frac{a^2+b^2}{4}\operatorname{sen}2\theta_1:$$

en la cual $\theta_1 = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}$.

O, en otra forma:

$$A = \frac{b^2-a^2}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} + \frac{1}{2}ab.$$

**137.** La lemniscata hiperbólica considerada es la *podaria central*, y la *curva inversa* también, con relación á su centro, de la hipérbola

$$b^2y^2 - a^2x^2 = -a^2b^2:$$

cuyas asíntotas forman un ángulo igual al de las tangentes á la misma lemniscata en el mencionado centro.

**138.** Cambiando $a^2$ en $-a^2$, en las ecuaciones de los Núms. **127** y **130**, obtiénese la ecuación *tangencial* de la lemniscata hiperbólica y cuanto al número y posición de sus focos se refiere: deduciéndose, en particular, que las coordenadas de los *focos ordinarios reales* de la curva son

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{é} \quad y = 0.$$

Y que las coordenadas de los *focos singulares reales*,

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{é} \quad y = 0,$$

asimismo corresponden á los puntos $F$ y $F'$ de la figura 39.

## IV

### LA LEMNISCATA DE BERNOULLI

**139.** Entre las lemniscatas hiperbólicas existe una que ha recibido nombre especial: la correspondiente al caso de ser $a = b$, denominada *lemniscata de* BERNOULLI por haber sido encontrada por uno de los geómetras de este nombre *(Jacobo)* al resolver el problema de Leibnitz, que tiene por objeto determinar la curva descrita por un punto grave, que se aproxima uniformemente á un punto fijo dado. *(Acta eruditorum,* 1694, *p.* 336; *Opera, t.* I, *p.* 609.) Las principales propiedades de esta curva fueron después descubiertas por FAGNANO en 1750 *(Produzione matematica, t.* II, *p.* 317), por métodos geométricos; y en seguida por EULER, que expuso su teoría analítica. *(Mem. Acad. Petrop., t.* V, *p.* 351.)

**140.** La ecuación de la lemniscata de Bernoulli, referida á coordenadas cartesianas, es

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Y en coordenadas polares, la ecuación de la misma curva tiene por expresión:

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Directamente, por medio de estas ecuaciones, ó poniendo $b = a$ en los resultados anteriormente obtenidos, por referencia á las lemniscatas hiperbólicas en general, dedúcense las siguientes propiedades de la lemniscata de Bernoulli.

La curva tiene, como todas las lemniscatas hiperbólicas, la forma seña-

lada en la figura 42, en la cual el valor de $a$ se halla representado por $OE$. Y las tangentes en el *punto doble* $O$ forman ángulos de 45° con el eje de las abscisas, según de la fórmula $\text{tang}\omega = \pm \frac{b}{a}$ se deduce, por ser ahora $b = a$.

Poniendo en la igualdad (1) del Núm. **122** $f = 0$ y $a^2 = 2e^2$, hállase que $\rho\,\rho_1 = \frac{1}{2}a^2$. Luego, la lemniscata de Bernoulli pertenece á la clase de las *cassínicas*, existiendo en su plano dos puntos fijos, $F$ y $F'$, tales que el producto de las distancias á ellos de cualquiera de los puntos de la curva permanece constante. Las coordenadas de los puntos fijos considerados, ó focos de la curva, al propio tiempo *ordinarios* y *singulares*, son $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$, y 0.

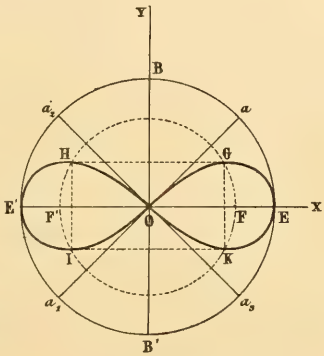


Figura 42.

Los puntos $G$, $H$, $I$, $K$, donde la ordenada $y$ es máxima (en valor absoluto), corresponden á la circunferencia de radio igual á $\frac{a}{\sqrt{2}}$, con el centro en el punto $O$: luego *los puntos de ordenada máxima y los focos se encuentran sobre la misma circunferencia.* Aquellos *cuatro* primeros puntos tienen por coordenadas

$$\pm \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \text{y} \quad \pm \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

**141.** Partiendo de la ecuación polar de la curva, obtiénese el valor del ángulo $V$, que la tangente á la misma curva forma con el radio vector del punto de contacto, por medio de la fórmula

$$\text{tang}\,V = -\frac{\rho d\theta}{d\rho} = \cot 2\theta:$$

de la cual se infiere la siguiente

$$V = \frac{\pi}{2} - 2\theta,$$

que permite construir por fácil procedimiento la tangente.

**142.** El radio de curvatura de la lemniscata de Bernoulli tiene por expresión

$$R = \frac{a^2}{3\rho}.$$

Y como $\operatorname{sen} V = \cos 2\theta = \frac{\rho^2}{a^2}$, resulta que

$$\rho = 3R \operatorname{sen} V.$$

Luego *la proyección del radio de curvatura sobre la dirección del radio vector correspondiente es igual á la tercera parte del mismo segundo radio.* Lo cual permite determinar fácilmente el centro de curvatura de la curva de que ahora se trata.

**143.** La lemniscata de Bernoulli es *unicursal*, y por eso $x$ é $y$ pueden expresarse en función racional de una tercera variable. Expresión de la cual dedujeron Em. Weyr y Schoute algunas propiedades importantes, relativas á sus tangentes.

Si, en efecto, se pone en la ecuación de la curva $y = tx$, y después $\sqrt{1-t^2} = (1+t)x$, hállase, por de pronto, que

$$x = a\frac{x^3 + x}{x^4 + 1} \quad \text{é} \quad y = a\frac{x - x^3}{x^4 + 1}.$$

Y sustituyendo estos valores en la ecuación de la tangente,

$$Y - y = y'(X - x),$$

hállase, en función de $x$, el siguiente resultado:

$$Y = \frac{(x^4 - 4x^2 + 1)(x^2 + 1)}{(x^4 + 4x^2 + 1)(1 - x^2)} X + \frac{4ax^3}{(1 - x^2)(x^4 + 4x^2 + 1)}.$$

Luego, si por un punto $(\alpha, \beta)$ trazamos tangentes á la lemniscata considerada, los valores de $x$ en los puntos de contacto deben satisfacer á la ecuación

$$(1) \quad (\beta+\alpha)x^6 + 3(\beta-\alpha)x^4 + 4ax^3 - 3(\beta+\alpha)x^2 - (\beta-\alpha) = 0;$$

y las seis raíces de esta ecuación, ó los seis valores de $x$, prueban que, por el punto dado, pueden trazarse seis tangentes á la curva, *reales* ó *imaginarias*.

Esto sabido, busquemos ahora la condición para que cuatro de los puntos de contacto se encuentren en línea recta.

La definida por esta ecuación

$$ux + vy + 1 = 0$$

corta á la curva en cuatro puntos, á los cuales corresponden los valores de $x$ dados por esta otra

$$(2) \qquad x^4 + a(u-v)x^3 + a(u+v)x + 1 = 0.$$

Expresando, pues, que el resto de la división del polinomio (1) por el polinomio (2) es idénticamente nulo, hallaremos las condiciones para que las ecuaciones (1) y (2) tengan cuatro raíces comunes, y, por lo tanto, para que cuatro de los puntos de contacto estén en línea recta.

Pero el resto de que se trata, tiene por expresión

$$\left\{\left[\frac{4a}{\beta+\alpha} - a(u+v) - 3\,\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\,a(u-v) - a^3(u-v)^3\right]x^3\right.$$

$$+\left[a^2(u^2-v^2)-4\right]z^2+\left[a(u-v)-3\,\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\,a(u+v) - a^3(u-v)^2(u+v)\right]x$$

$$\left.+\left[4\,\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} + a^2(u-v)^2\right]\right\}(\beta+\alpha).$$

Luego, para que las raíces de la ecuación (2) lo sean también de la (1), será menester que se verifiquen estas condiciones:

$$\frac{4}{\beta+\alpha} - (u+v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}(u-v) - a^2(u-v)^3 = 0;$$

$$a^2(u^2-v^2) - 4 = 0;$$

$$(u-v) - 3\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}(u+v) - a^2(u-v)^2(u+v) = 0; \quad \text{y}$$

$$4\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} + a^2(u-v)^2 = 0:$$

ó, eliminando de la primera y de la tercera $(u-v)^2$ por medio de la última,

$$\frac{4}{\beta+\alpha} - (u+v) + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}(u-v) = 0; \quad a^2(u^2-v^2) = 4;$$

$$u - v + \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}(u+v) = 0; \quad \text{y} \quad 4\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} + a^2(u-v)^2 = 0.$$

De la primera y la tercera se deduce que

$$(3) \qquad u+v = \frac{2(\beta+\alpha)}{\beta^2+\alpha^2} \quad \text{y} \quad u-v = -\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta^2+\alpha^2}.$$

Y, sustituyendo estos valores en la segunda y la cuarta, obtiénese por resultado, idéntico en ambos casos, el que sigue:

$$(\beta^2+\alpha^2)^2 = a^2(\alpha^2-\beta^2).$$

El cual nos enseña que el punto $(\alpha, \beta)$ debe corresponder á la lemniscata considerada.

Luego *los puntos por los cuales se pueden trazar cuatro tangentes á la lemniscata, de manera que los de contacto resulten todos en línea recta, son puntos de la misma lemniscata considerada.*

Este teorema fué encontrado y demostrado por Em. Weyr, en un trabajo titulado *Die Lemniscate in rationaler Behandlung. (Abhandl. der K. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Prag,* 1873.) Y á Schoute pertenece la demostración geométrica del mismo, inserta en los *Verslagen* de la Academia de Ciencias de Amsterdam (*serie* 2.ª, *t.* XIX, 1883, p. 220).

La ecuación condicional

$$a^2(u^2 - v^2) = 4$$

representa la envolvente de las tangentes á la lemniscata, tiradas por todos los puntos de la curva, referida ésta á coordenadas tangenciales, $u$ y $v$. Para hallar la misma ecuación, referida á coordenadas cartesianas, habrá, pues, que procurarse la de la envolvente de todas las posiciones que pueda tomar en un plano la recta

$$ux + vy + 1 = 0,$$

llevando en cuenta la condicional anterior. Y con esto, eliminando $v, u$ y $\frac{dv}{du}$ entre ambas ecuaciones y las

$$x + y\frac{dv}{du} = 0 \quad \text{y} \quad u - v\frac{dv}{du} = 0,$$

se hallará la que sigue:

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}a^2.$$

Expresión abreviada de este otro teorema, también de Em. Weyr:

*La envolvente de las tangentes á la lemniscata, traxadas por todos los puntos de la curva, y que además tocan á ésta en otros puntos distintos de los primeros, ó de origen, es una hipérbola equilátera.*

144. Las condiciones para que los puntos de contacto de las tangentes á la lemniscata considerada, trazadas por el punto $(\alpha, \beta)$, correspondan á una cónica, se determinan por análogo procedimiento al empleado en el caso anterior, comenzando por reemplazar la ecuación de la línea recta por la siguiente, de una cónica cualquiera:

$$ux^2 + vy^2 + wxy + hx + ky + 1 = 0.$$

Y por los mismos pasos, ya dados en el párrafo precedente, se hallará que los valores de $x$, en los puntos en que esta cónica corta á la lemniscata, deben asimismo satisfacer á esta otra ecuación:

$$x^8 + Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ax^3 + Ex^2 + Cx + 1 = 0:$$

en la cual

$$A = a\,(h - k); \quad B = (u + v - w)\,a^2; \quad C = (h + k)\,a;$$

$$D = 2\,(a^2\,u - a^2\,v + 1); \quad \text{y} \quad E = a\,(u + v + w).$$

Las condiciones, pues, para que los puntos de contacto de las tangentes á la curva, trazadas por el punto arbitrario $(\alpha, \beta)$, correspondan á la cónica, se obtendrán expresando que es idénticamente nulo el resto de la división del primer miembro de la última ecuación, por el primero de la (1); y así hallaremos:

$$C - L - 3AK = 0; \quad D + 3 - AL - 3K\,(B - 3K) = 0;$$

$$4A - L\,(B - 3K) = 0; \quad E + K + 3\,(B - 3K) = 0;$$

$$C + AK = 0; \quad \text{y} \quad 1 + (B - 3K)\,K = 0:$$

en el supuesto de ser también

$$K = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \quad \text{y} \quad L = \frac{4a}{\beta + \alpha}.$$

Eliminando $C$ de la primera ecuación por medio de la quinta, y $B - 3K$ de la tercera, por medio de la última, obtiénese el mismo resultado: luego una de estas ecuaciones no es realmente distinta de las otras.

Las ecuaciones primera y quinta, de las seis condicionales anteriores, determinan los valores de $C$ y $A$; y, conocidos estos valores, de las $A = a\,(h - k)$ y $C = a\,(h + k)$, se concluirán los de $h$ y $k$. Y, asimismo, de las ecuaciones segunda, cuarta y sexta se deducen los de $B$, $D$ y $E$, poco antes expresados por medio de otras tres ecuaciones de primer grado en función de $u$, $v$ y $w$. Luego estos tres coeficientes de la cónica pueden darse también por conocidos; y como determinada por completo, en consecuencia, la ecuación de la cónica.

Dedúcese, pues, de todo lo expuesto el teorema siguiente, debido á Schoute, quien le dió á conocer en su trabajo titulado *Notiz über die Lemniscate*, publicado en los *Sitzungsber. der K. Akad. der Wissenschaften von Wien*, 1883, *p.* 1252:

*Los seis puntos de contacto de las tangentes á la lemniscata de Bernoulli, trazados por un punto exterior á la curva, hállanse situados sobre una cónica, susceptible de fácil determinación.*

**145.** Poniendo $a = b$ en la ecuación, referida á coordenadas tangenciales, de las lemniscatas hiperbólicas, obtiénese la correspondiente á la de Bernoulli:

$$27a^4 (u^2 + v^2)^2 = [4 + a^2 (u^2 - v^2)]^3.$$

**146.** La longitud de los arcos de esta curva hállase también sin dificultad mediante la fórmula

$$s = a \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

después de establecer entre $\varphi$ y $\theta$ la relación

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

De manera que, por referencia á la *lemniscata de Bernoulli, s depende de una integral elíptica de primera especie.* (Fagnano.)

Y todavía con mayor sencillez se demuestra que el área limitada por la mitad de la curva es igual á $\frac{1}{2} a^2$.

**147.** Esta misma lemniscata es la *podaria* de la hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

relativamente al centro. Existiendo además entre ambas curvas algunas relaciones notables, enunciadas por Charpentier en los *Nouvelles Annales de Mathématiques (t.* IV, 1845, *p.* 142), de las cuales reproducimos tres á continuación:

1.ª Entre las coordenadas de la lemniscata, $X$ é $Y$, y de la hipérbola, $x$ é $y$, existen las relaciones

$$x = \frac{a^2 X}{X^2 + Y^2}, \quad y = -\frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2},$$

que se desprenden de las encontradas en el núm. **128**, cambiando para ello $a^2$ en $-a^2$, y poniendo después $b = a$. Y de las cuales se deduce la ecuación

(1) $$(x^2 + y^2)(X^2 + Y^2) = a^4.$$

Luego *el producto de las distancias del centro de la lemniscata á cualquier punto de la hipérbola y al punto correspondiente de la misma lemniscata, es constante.*

2.ª Representando por $\rho$ y $\rho_1$ los radios vectores de la lemniscata y de la hipérbola, sábese que

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}, \quad \text{y} \quad \rho_1 = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}};$$

de donde se deduce esta otra relación:

(2) $$\rho\rho_1 = a^2.$$

Luego *el producto de los radios vectores de la lemniscata y de la hipérbola, que forman el mismo ángulo con el eje polar, es constante.*

3.ª Y, asimismo: de las dos ecuaciones (1) y (2) se deduce también esta otra:

$$\rho_1^2 = X^2 + Y^2.$$

Según la cual *un punto cualquiera de la hipérbola y el correspondiente de la lemniscata están sobre dos rectas simétricas con respecto al eje real de la hipérbola.*

**148.** De la expresión poco antes obtenida de los arcos de lemniscata de Bernoulli, por medio de integrales elípticas, dedúcense, con auxilio de los teoremas referentes á la teoría de estas integrales, consecuencias importantes sobre las propiedades de los mismos arcos, algunas de las cuales pasamos á indicar sucintamente.

Por de pronto, apoyándose en el *teorema de la adición* de las integrales elípticas de 1.ª especie, es fácil deducir que si $s_1$, $s_2$ y $s_3$ representan las longitudes de tres arcos, pertenecientes al primer cuadrante de la curva,

comprendidos entre su vértice y aquellos puntos de la misma curva, donde la *amplitud* $\varphi$ tiene por valores $\varphi_1$, $\varphi_2$ y $\beta$, se verificará que

$$s_3 = s_1 \pm s_2,$$

cuando sea

$$\cos\beta = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \mp \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\beta}.$$

Fórmulas que determinan la amplitud $\beta$ de un arco de lemniscata, igual á la suma ó á la diferencia de otros dos arcos previamente dados.

Y del mismo teorema mencionado, suponiendo que sea $\varphi_1 = \varphi_2$, concluyense estas otras igualdades:

$$s_3 = 2s_1 \quad \text{y} \quad \cos\beta = \cos^2\varphi_1 - \operatorname{sen}^2\varphi_1 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\beta},$$

que determinan la *amplitud*, $\varphi_1$, del arco de lemniscata, de longitud igual á la mitad de la longitud de otro arco dado, cuya amplitud sea $\beta$.

Caso particular interesante del problema que acabamos de considerar es aquel en que se pretende dividir un cuadrante de lemniscata en dos partes iguales. Suponiendo para ello que $\beta = \frac{\pi}{2}$, la amplitud del arco pedido se desprende de la igualdad $\operatorname{tang}\varphi_1 = \sqrt[4]{2}$. Y si, tras de esto, representamos por $\theta_1$ y $\rho_1$ las coordenadas polares del punto que divide por mitad el cuadrante de que se trata, llevando en cuenta la igualdad $\operatorname{sen}^2\theta_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi_1$, dedúcese que

$$\operatorname{sen}^2\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)} \quad \text{y} \quad \cos^2\theta_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)};$$

y, por lo tanto:

$$\rho_1^2 = a^2 \cos 2\theta_1 = \frac{a^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)}.$$

De donde, representando por $x_1$ la abscisa del punto buscado, inmediatamente se infiere que

$$x_1 = \rho_1 \cos\theta_1 = a\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}.$$

Resultado final por primera vez encontrado por el eminente geómetra Fagnano, quien asimismo enseñó á dividir un cuadrante de lemniscata en $2^m$, $3 \cdot 2^m$, y $5 \cdot 2^m$ partes iguales, cuando $m$ sea número entero, con auxilio simplemente de la regla y el compás.

Los estudios de Fagnano sobre las propiedades de los arcos de lemniscata ejercieron gran influencia en el progreso de las Ciencias matemáticas, y sirvieron de base para la fundación de la Teoría de las Integrales elípticas. Continuólos más tarde, ampliándolos considerablemente, cuando ya esta teoría se hallaba substancialmente constituída, el gran geómetra Abel *(Œuvres, t.* I, *pág.* 361, 1881), el cual demostró que los cuadrantes de la lemniscata pueden dividirse en $n$ arcos de igual longitud, con auxilio de la regla y del compás, cuando $n$ es un número de la forma $2^m$ (suponiendo entero el exponente $m$), ó un número primo de la forma $2^m + 1$, ó el producto de números de estas formas. Ocupándose más tarde en la misma cuestión Liouville *(Journal des Mathématiques*, 1843, *p.* 507); Kiepert *(Journal de Crelle, t.* CXXV, *p.* 255); etc., etc.

**149.** La lemniscata de Bernoulli posee otras muchas propiedades, cuya detallada exposición sería casi interminable, entre las cuales nos limitaremos á mencionar la que sirve de base á un procedimiento muy sencillo para construir la curva, también á continuación expuesto y demostrado.

Considerando un punto $O$ y una circunferencia tal, que las tangentes á ella trazadas desde el mismo punto formen un ángulo recto; tirando después por $O$ una secante cualquiera, $OP$, á la circunferencia; y tomando luego sobre esta secante, de cada lado del $O$, un segmento $OM = OM'$, igual á la cuerda $QP$ de la circunferencia, que la misma secante determina, obtiénense dos puntos, equidistantes del $O$, que pertenecen á la lemniscata definida por la ecuación

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

en la cual $a$ representa el diámetro de la circunferencia.

Tomemos, en efecto, como origen de las coordenadas el punto $O$ (figura 43), y como eje de las abscisas la recta $OX$ que pasa por el centro $C$ de la circunferencia. Designando por $a$ el diámetro de ésta, será $OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$, y la ecuación cartesiana de la misma

$$\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

ó, en coordenadas polares, la siguiente:

$$\rho_1^2 - a\sqrt{2}\,\rho_1 \cos\theta + \frac{a^2}{4} = 0.$$

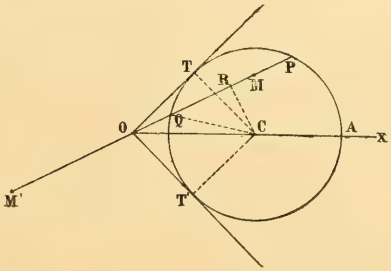



Figura 43.

De la cual se deducen estos dos valores de $\rho_1$, representados en la figura por $OP$ y $OQ$:

$$OP = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{a}{2}\sqrt{2\cos^2\theta - 1} \quad \text{y} \quad OQ = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{a}{2}\sqrt{2\cos^2\theta - 1}.$$

Cuya diferencia, $OP - OQ = QP$, es, por definición, igual á $OM = OM' = \rho$: representando $\rho$ el radio vector del punto $M$, ó del $M'$, correspondiente á la curva buscada, y ángulo $\theta$.

Resulta, pues, que

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}, \quad \text{ó} \quad \rho^2 = a^2 \cos 2\theta \quad \text{(Núm. 140)}.$$

Consecuencia á que puede llegarse también con suma facilidad trazando la perpendicular $CR$ á $OP$, y advirtiendo que

$$QR^2 = QC^2 - CR^2; \quad QR = \frac{1}{2}\rho; \quad QC = \frac{1}{2}a; \quad \text{y} \quad CR = \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta.$$

# CAPÍTULO CUARTO

## CUARTICAS NOTABLES

(Continuación).

### I

### EL CARACOL DE PASCAL

**150.** Consideremos una circunferencia, y en ella un punto fijo, $O$ (figura 44): si por este punto trazamos la recta $OM$, y á partir del punto $M$ tomamos dos segmentos, $MA$ y $MB$, iguales á $h$, el lugar geométrico descrito por los puntos $A$ y $B$, cuando $OM$ varía de posición, girando alrededor del punto fijo $O$, es una *concoide del círculo*, á la cual ROBERVAL aplicó el nombre de *Caracol (limaçon) de Pascal*, en la memoria titulada *Observations sur la Composition des Mouvements et sur le Moyen de trouver les touchantes des Lignes courbes*, inserta en el volumen correspondiente al año 1730 de las *Memorias de la Academia de Ciencias de París, p.* 42. En aquella notable disertación, el mismo Roberval estudió el modo de generación y algunas propiedades de la curva, entre las cuales se encuentra una, cuyo descubrimiento atribuye á Pascal; y además estableció el procedimiento para trazar sus tangentes. Así como con posterioridad, en su *Traité des Indivisibles*, expuso un procedimiento para determinar las áreas limitadas por arcos de la misma curva.

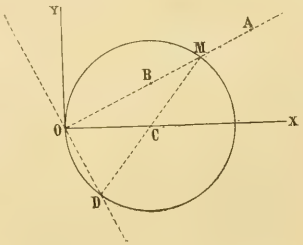


Figura 44.

A lo que precede debe agregarse que, estudiando cuidadosamente P. TANNERY la historia del descubrimiento del *caracol*, advirtió que la doctrina á

esta curva concerniente, no sólo consta en la primera de las dos memorias citadas, sino que también fué expuesta por el mismo ROBERVAL, antes del año 1644, en sus lecciones orales de *Geometría*, apuntadas por uno de sus discípulos, y que dieron origen á la memoria mencionada: con la particularidad de que el apellido PASCAL, que allí se lee, no se refiere al célebre geómetra y filósofo *Blaise*, sino á su padre *Étienne*.

**151.** Fijando de nuevo la atención en la figura 44, designemos por $C$ el centro del círculo considerado; por $a$ la longitud del diámetro del mismo círculo; y por $\theta$ el ángulo $AOC$.

Por ser $OM = a\cos\theta$, la ecuación polar del caracol de Pascal será

$$(1) \qquad \rho = a\cos\theta \pm h; \text{ á condición de ser } -\frac{\pi}{2} \gtrless \theta \gtrless \frac{\pi}{2}.$$

Ó esta otra, en coordenadas cartesianas, tomando el punto $O$ para origen de las coordenadas, y el radio $OC$, prolongado, para eje de las abscisas:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = h^2(x^2 + y^2).$$

**152.** Para determinar la forma de la curva, consideremos tres distintos casos, comenzando por observar que en los tres la curva es simétrica con respecto al eje de las abscisas.

CASO 1.°—Sea $h < a$.

De la expresión

$$\rho = a\cos\theta + h$$

resulta que, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, $\rho$ decrece, desde $OA = a + h$ (fig. 45) hasta $OD = h$, y el punto generador de la curva describe el arco $AMD$.

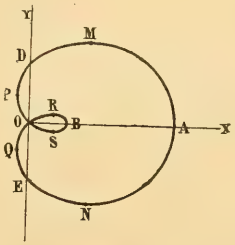


Figura 45.

Considerando después la ecuación

$$\rho = a\cos\theta - h,$$

dedúcese que, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\operatorname{arc\,cos}\frac{h}{a}$, $\rho$ decrece desde

$OB = a - h$ hasta 0, y el punto generador de la curva describe el arco $BRO$. Y cuando, después, $\theta$ varía, desde arc cos $\frac{h}{a}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, el radio vector $\rho$ resulta negativo, y variable desde 0 hasta $-h$: con lo cual el punto generador de la curva describe el arco $OQE$.

Como á los valores de $\theta$, comprendidos entre 0 y $-\frac{\pi}{2}$, corresponden arcos de la curva simétricos de los precedentes, con relación al eje de las abscisas, conclúyese que la curva tiene la forma indicada en la figura 45.

Siendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a\cos 2\theta \pm h\cos\theta}{a\,\mathrm{sen}\,2\theta \pm h\,\mathrm{sen}\,\theta},$$

será $\frac{dy}{dx} = 0$ en los puntos que satisfacen á la ecuación

$$a\cos 2\theta \pm h\cos\theta = 0:$$

de la cual, contando solamente con las soluciones á que corresponden valores de $\theta$, comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, se deducen estos resultados:

$$\cos\theta = \frac{\mp h + \sqrt{h^2 + 8a^2}}{4a} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{1}{4}(\pm 3h + \sqrt{h^2 + 8a^2}).$$

Luego existen en la curva dos puntos, $M$ y $N$, determinados por estas ecuaciones, donde las ordenadas son máximas.

Y por ser $\frac{dy}{dx} = \infty$, cuando

$$a\,\mathrm{sen}\,2\theta \pm h\,\mathrm{sen}\,\theta = 0,$$

escribiendo solamente las soluciones á que corresponden valores de $\theta$, comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, hallaremos

$$\mathrm{sen}\,\theta = 0 \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{h}{2a}:$$

de manera que en los puntos $A$, $B$, $P$, $Q$, cuyas coordenadas son

$$(\theta = 0, \quad \rho = a \pm h) \quad \text{y} \quad \left(\theta = \pm \text{ arc cos}\frac{h}{2a}, \quad \rho = -\frac{1}{2}h\right),$$

las tangentes son paralelas al eje de las ordenadas.

El punto $O$ es un *punto doble* de la curva, y los ángulos de las tangentes en este punto con el eje de las abscisas son iguales á $\pm$ arc cos $\frac{h}{a}$.

Caso 2.°—Supongamos ahora $h > a$.

Por resultado de una discusión, análoga á la que precede, se hallará que la curva es en este caso de la forma indicada en la figura 46, en la cual $OD = h$, $OA = a + h$, $OB = h - a$; existiendo en ella dos puntos, $M$ y $N$, cuyas coordenadas polares se deducen de estas expresiones

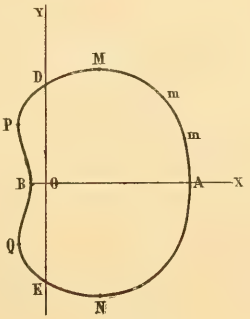


Figura 46.

$$\cos\theta = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 8a^2}}{4a} \quad \text{y}$$

$$\rho = \frac{1}{4}\left(3h + \sqrt{h^2 + 8a^2}\right),$$

y donde la ordenada cartesiana, $y$, adquiere valor máximo, en absoluto.

En los puntos $A$ y $B$ las tangentes son paralelas al eje de las ordenadas. Y, cuando $h < 2a$, existen, además de estos puntos, otros dos, $P$ y $Q$, donde la tangente es también paralela al mismo eje, hallándose sus coordenadas determinadas de este modo:

$$\cos\theta = \frac{h}{2a} \quad \text{y} \quad \rho = -\frac{1}{2}h.$$

La curva tiene además un *punto aislado* en $O$.

Caso 3.°—Sea, finalmente, $h = a$.

La forma de la curva será entonces la representada en la figura 47, con un *punto de retroceso* en $O$, á la distancia $2a$ del $A$. Los puntos $M$ y $N$, en donde las tangentes son paralelas al eje de las abscisas, se hallan definidos por las fórmulas $\theta = \pm \frac{1}{6}\pi$ y $\rho = \frac{3}{2}h$; y los $P$ y $Q$, en donde las tangentes son paralelas al eje de las ordenadas, por estas otras:

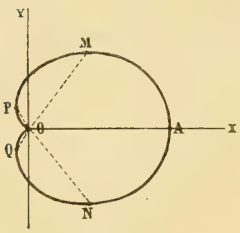


Figura 47.

$$\theta = \pm \frac{1}{6}\pi \quad \text{y} \quad \rho = -\frac{1}{2}a;$$

las cuales, juntamente con las anteriores, muestran que los puntos $P$, $O$ y $N$ se hallan en línea recta, así como los puntos $Q$, $O$ y $M$.

En este caso especial, la curva recibe el nombre de *cardioide* *.

**153.** Aplicando, para determinar los puntos de inflexión del *caracol* en los tres casos considerados, la fórmula conocida

$$\rho^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 0,$$

obtiénense las ecuaciones

$$\cos\theta = \frac{2a^2 + h^2}{3ah} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{2(a^2 - h^2)}{3h},$$

que determinan los valores de $\theta$ y $\rho$ en estos puntos. Pero advirtiendo que, para ser $\theta$ real, debe ser $\cos\theta \gtrless 1$, y, por lo tanto,

$$2a^2 + h^2 - 3ah = (a - h)\left(a - \frac{1}{2}h\right) \gtrless 0,$$

se ve que sólo existen puntos de inflexión *reales* cuando $h > a$, y $h \lesssim 2a$; y que el número de estos puntos será igual á *dos*, separados uno de otro, si $h < 2a$, ó confundidos en uno solo, de *doble inflexión* entonces, cuando sea $h = 2a$.

---

* De καρδια: *corazón*, por analogía remota de figura.

**154.** Por ser (fig. 44) $\rho = OM \pm h$, tenemos $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dOM}{d\theta}$. Luego la subnormal polar del caracol, correspondiente á los puntos $A$ y $B$, es igual á la subnormal polar de la circunferencia, correspondiente al punto $M$. Para construir las normales al caracol en los puntos $A$ y $B$, basta, pues, trazar la recta $OD$, perpendicular á $OM$, y la recta $MC$, que corta á la anterior en el punto $D$. El punto $D$ pertenece á las normales pedidas.

**155.** El *caracol* puede considerarse desde muy diverso punto de vista, conforme el siguiente interesante teorema de ROBERVAL expresa:

*La podaria de la circunferencia, con relación á un punto cualquiera de su plano, es un caracol de Pascal.*

Para demostrarlo, designemos por $h$ el radio de la circunferencia, y por $a$ la distancia de su centro al punto de referencia de que se trate. Pues si por origen de las coordenadas se toma este mismo punto, y por eje de las abscisas la recta que le una al centro, la circunferencia tendrá por ecuación

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = h^2;$$

la tangente en cualquiera de sus puntos $(x_1, y_1)$ esta otra:

$$y_1 y + (x_1 - a) x = y_1^2 + x_1^2 - a x_1 = a x_1 + h^2 - a^2;$$

y la perpendicular á esta tangente, trazada por el origen de las coordenadas, la que sigue:

$$(x_1 - a) y - y_1 x = 0.$$

Eliminando de estas tres ecuaciones los valores de $x_1$ é $y_1$, se hallará la ecuación de la *podaria*, y se verá que concuerda con la del *caracol*, poco antes (Núm. **151**) consignada.

**156.** Demostróse anteriormente (Núm. **152**) que el *caracol* de PASCAL, cualquiera que sea su forma particular, posee en todos los casos un *punto doble á distancia finita*. A lo cual puede agregarse que también posee otros dos en lo infinito.

Probarémoslo comenzando por hallar las asíntotas de la curva, poniendo para ello en su ecuación $y = ux$, y buscando el límite hacia el cual se

aproxima indefinidamente $u$, cuando $x$ tiende hacia $\infty$. Del análisis necesario para esto se desprende con facilidad que, en su límite, $u$ admite dos valores iguales á $+i$, y otros dos á $-i$.

Pues poniendo tras de esto $y = \pm ix + v$, y buscando análogamente el límite de $v$, cuando $x$ tiende hacia $\infty$, hállase la ecuación

$$(\pm 2i \lim v - a)^2 = 0.$$

De donde se deducen para $\lim v$ dos valores iguales á $\frac{1}{2} ai$, y otros dos á $-\frac{1}{2} ai$.

Luego la curva posee dos asíntotas, que coinciden con la recta representada por la ecuación $y = i\left(x - \frac{1}{2} a\right)$, y otras dos con la representada por la $y = -i\left(x - \frac{1}{2} a\right)$. Y, en atención á que cada una de estas rectas es tangente en lo infinito á dos distintas ramas de la curva, conclúyese que ésta tiene asimismo en lo infinito *dos puntos de retroceso*.

**157.** Por tener *tres puntos duplos*, el *caracol de Pascal* es curva *unicursal:* de manera que sus coordenadas pueden expresarse en función racional de un parámetro variable. Para obtener estas expresiones advirtamos, por de pronto, que la ecuación (1), en donde $\theta$ varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, puede sustituirse por esta otra:

$$\rho = a \cos\theta + h,$$

en la cual $h$ posee un solo signo, admitiendo que $\theta$ pueda variar desde 0 hasta $2\pi$.

Esto sentado, póngase $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta = t$, y hallaremos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

valores que, sustituídos en las ecuaciones $x = \rho \cos\theta$ é $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, darán

$$x = \frac{h + a + (h-a)\,t^2}{(1+t^2)^2}(1-t^2) \quad \text{é} \quad y = 2\,\frac{h + a + (h-a)\,t^2}{(1+t^2)^2}\,t.$$

Las últimas fórmulas sirvieron de punto de partida á G. Pittarelli para el estudio, bastante minucioso, que hizo del caracol, en su memoria sobre *Li lumache di Pascal*, publicada en el *Giornale di Matematiche (Napoli, t.* XXI, 1883, *p.* 145 y *p.* 173). Pero aquí nos limitaremos á obtener, por medio de las mismas, la ecuación tangencial de la curva.

Partiendo de la expresión

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{h\cos\theta + a\cos 2\theta}{h\,\mathrm{sen}\,\theta + a\,\mathrm{sen}\,2\theta},$$

la ecuación de la tangente al caracol será

$$(h\cos\theta + a\cos 2\theta)\,X + (h\,\mathrm{sen}\,\theta + a\,\mathrm{sen}\,2\theta)\,Y = (h + a\cos\theta)^2;$$

ó, sustituyendo $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ por sus valores en función de $t$, esta otra:

$$[h + a - 6at^2 - (h - a)\,t^4]\,X + 2\,[h + 2a + (h - 2a)\,t^2]\,t\,Y = [h + a + (h - a)\,t^2]^2.$$

Por medio de la cual se puede obtener la ecuación tangencial de la curva considerada. Comparándola, en efecto, con la ecuación

$$uX + vY + 1 = 0,$$

resulta

$$u = -\frac{h + a - 6at^2 - (h - a)\,t^4}{(h + a + (h - a)\,t^2)^2} \quad \text{y} \quad v = -2\,\frac{h + 2a + (h - 2a)\,t^2}{(h + a + (h - a)\,t^2)^2}\,t.$$

Bastando ahora eliminar $t$ entre estas ecuaciones para obtener la ecuación buscada, que, según Pittarelli (*l. c., p.* 155), es como sigue:

$$(a^2 - b^2)^3\,(u^2 + v^2)^2 + K\,(u^2 + v^2) + L = 0;$$

en la cual designan abreviadamente $K$ y $L$ lo que á continuación se indica:

$$K = 2\,(h^2 - a^2)^2\,b^2\,u^2 - 2\,(h^2 - a^2)\,a\,(4a^2 + 5h^2)\,u + 8\,(h^2 - a^2)^2 - 36h^2\,(h^2 - a^2) + 27h^4, \quad \text{y}$$

$$L = (au + 2)^3\,[a\,(h^2 - a^2)\,u - 2a^2].$$

Mediante esta ecuación pueden hallarse los *focos* del caracol de Pascal por el método general conocido, ya empleado anteriormente para determinar los focos de las lemniscatas. Pero, en el caso de que ahora tratamos, preferible es valerse de otro más elemental y sencillo, que pasamos á exponer.

Consideremos la recta

$$y = ix + k,$$

y busquemos los valores que debe tener $k$ para que la recta sea tangente al caracol, ó para que corte á la curva en dos puntos, coincidentes uno con otro.

Eliminando para esto la $y$ entre las ecuaciones de la recta y de la curva, obtiénese esta otra:

$$(2ki - a)^2 x^2 + 2[(2ki - a)k^2 - h^2 ik]x + k^4 - h^2 k^2 = 0,$$

que determina las abscisas de los puntos de intersección de ambas líneas. Y, expresando ahora que los dos valores de estas abscisas son iguales, obtiénese la condicional siguiente:

$$[(2ki - a)k^2 - h^2 ik]^2 - (2ki - a)^2 (k^4 - h^2 k^2) = 0, \quad \text{ó}$$
$$k^2 (a^2 - h^2 - 2aki) = 0.$$

De donde se deduce:

$$k = 0, \quad \text{y} \quad k = \frac{h^2 - a^2}{2a} i.$$

A la primera de estas soluciones corresponde una recta, que pasa por el *punto doble* de la curva; pero que no es tangente á ésta, y que así no determina foco alguno.

Y á la segunda corresponde la tangente á la curva

$$y = i\left[x + \frac{h^2 - a^2}{2a}\right].$$

Del mismo modo se vería que existe otra tangente á la curva con el

coeficiente angular igual á $-i$, cuya ecuación sólo difiere de la anterior por el signo de $i$.

Y buscando la intersección de ambas rectas, se concluye que la curva posee un *foco ordinario*, cuyas coordenadas son

$$x = \frac{a^2 - h^2}{2a}, \quad \text{é} \quad y = 0.$$

Debiendo agregar á esto que las asíntotas, cuyas ecuaciones renglones antes se obtuvieron, determinan también por su intersección un *foco singular* de la curva, definido por las coordenadas

$$x = \frac{1}{2}a, \quad \text{é} \quad y = 0.$$

**158.** Entre las distancias $r$ y $r'$ de los puntos del caracol al origen de las coordenadas y á su *foco ordinario*, existe la siguiente relación notable:

$$2hr + 2ar' = h^2 - a^2,$$

de fácil comprobación, sustituyendo en ella $r$ y $r'$ por sus valores respectivos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad r' = \sqrt{\left(x - \frac{a^2 - h^2}{2a}\right)^2 + y^2},$$

y advirtiendo que con esto resulta una ecuación que coincide con la cartesiana de la curva.

De la relación anterior, y de la que sigue

$$x^2 + y^2 - ax = hr,$$

desprendida de la ecuación cartesiana de la curva, infiérese también sin dificultad que las distancias $r$ y $r'$ *del origen y del foco ordinario á los puntos* $(x, y)$ *de la curva son funciones racionales de las coordenadas de estos puntos.*

**159.** El *caracol de Pascal*, puede ser engendrado por un punto situado en el plano de una circunferencia, á la cual se supone invariablemente unido, cuando ésta rueda sobre otra fija, de radio igual á la primera.

Si el punto generador de la curva es exterior á la circunferencia móvil, obtiénese el *caracol de punto doble* (fig. 45); si interior, el *caracol de punto aislado* (fig. 46); y la *cardiode* (fig. 47), cuando corresponda á la misma circunferencia. El *caracol* pertenece, pues, al grupo de las curvas denominadas *epicicloides*, de las cuales trataremos más adelante, y entonces se demostrará la exactitud de la interesante proposición que acaba de enunciarse.

**160.** La longitud de los arcos del *caracol* depende, cuando $h \gtrless a$, de una integral elíptica de segunda especie. Pues, en efecto,

$$s = \int_0^{\theta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = (a+h)\int_0^{\theta} \sqrt{1 - \frac{4ha}{(a+h)^2}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}\cdot d\theta.$$

Ó, poniendo $\frac{1}{2}\theta = \varphi$,

$$s = 2\,(a+h)\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \frac{4ha}{(a+h)^2}\operatorname{sen}^2\varphi}\cdot d\varphi.$$

**161.** De la fórmula precedente pueden deducirse, por referencia á los arcos del *caracol*, teoremas análogos á los demostrados en la teoría de las integrales elípticas, por referencia á los de la elipse. Como ejemplo, fijemos la atención en el *teorema* llamado de *Fagnano*.

En el supuesto de ser

$$k^2 = \frac{4ha}{(a+h)^2} \quad \text{é} \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi = E(k,\varphi),$$

enséñanos la teoría de las integrales elípticas que

$$E(k,\varphi) + E(k,\psi) - E\left(k,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{k^2\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}},$$

cuando entre $\varphi$ y $\psi$ existe además la relación siguiente:

$$\cos\varphi\cos\psi = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\sqrt{1-k^2}.$$

En la fig.ª 46 señalemos dos puntos del *caracol*, $m$ y $m'$, cuyas amplitudes satisfagan á la igualdad anterior, y tendremos

$$\text{arc } Am = 2\,(a+h)\,E(k,\varphi); \quad \text{arc } Am' = 2\,(a+h)\,E(k,\psi); \quad \text{y}$$

$$\text{arc } AB = 2\,(a+h)\,E\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Por otra parte, representando por $V$ el ángulo que forma el radio vector del punto $m$ con la tangente á la curva en el mismo punto, resulta que

$$\text{tang } V = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{a\cos\theta + h}{a\,\text{sen}\,\theta};$$

y, por lo tanto,

$$\cos V = \frac{a\,\text{sen}\,\theta}{(a+h)\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\theta}}.$$

Con lo cual una de las igualdades anteriores se transforma inmediatamente en la que sigue:

$$E(k,\varphi) + E(k,\psi) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2\,(a+h)}{2a}\cos V.$$

Ó, finalmente:

$$\text{arc } Am + \text{arc } Am' - \text{arc } AB = \text{arc } Am - \text{arc } Bm'$$

$$= \frac{k^2\,(a+h)^2}{a}\cos V = 4h\cos V.$$

Para construir, pues, la diferencia de longitudes de los arcos $Am$ y $Bm'$, basta tomar sobre el radio vector del punto $m$ una longitud igual á $4h$, y proyectarla sobre la tangente á la curva en el mismo punto.

**162.** El área $A$, recorrida por el radio vector del caracol, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\theta$, se halla expresada por la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\left(h^2 + \frac{1}{2}a^2\right)\theta + \frac{1}{8}a^2\,\text{sen}\,2\theta + ah\,\text{sen}\,\theta.$$

## II

### LA CARDIOIDE

**163.** Ya dijimos en el Núm. **152** que recibe el nombre de *cardioide*, propuesto por CASTILLON (*Phylosophical Transactions of London Royal Society*, 1741), el caracol de Pascal que tiene por ecuación

$$\rho = a + a\cos\theta: \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi);$$

y vimos también cuál es la forma de esta curva, representada en la figura 47. Limitarémonos ahora á dar cuenta de algunas propiedades de la misma curva.

Poniendo, en las fórmulas del Núm. **157**, $h = a$, obtiénense, para determinar las coordenadas $x$ é $y$ de la cardioide, en función del parámetro arbitrario $t$, las fórmulas

$$x = \frac{2a(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \quad \text{é} \quad y = \frac{4at}{(1+t^2)^2};$$

de las cuales se deduce, como ecuación de la tangente, la que sigue:

$$(1-3t^2)X + t(3-t^2)Y = 2a$$

Como se deduce, para ecuación tangencial de la curva, esta otra:

$$27a^4(u^2+v^2) - 2a^2(au+2)^3 = 0.$$

Conclúyese también de lo expuesto en el Núm. **157**, que la curva posee un *foco singular* $\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$, y que no tiene *focos ordinarios*.

**164.** Los cuatro puntos de intersección de la recta

$$ux + vy + 1 = 0$$

con la cardioide, se determinan por medio de la ecuación

$$t^4 + 2(1-au)t^2 + 4avt + 2au + 1 = 0,$$

resultante de sustituir, en la ecuación de la recta, $x$ é $y$ por sus valores expresados en función de $t$.

Por otra parte, los valores de $t$ en los tres puntos de contacto de las tangentes á la curva, trazadas por un punto $(\alpha, \beta)$, resultan de la ecuación

$$t^3 + \frac{3\alpha}{\beta} t^2 - 3t + \frac{2a - \alpha}{\beta} = 0, \tag{1}$$

que se obtiene sustituyendo, en la ecuación de la tangente á la curva, $X$ é $Y$ por $\alpha$ y $\beta$.

Y dividiendo uno por otro los polinomios que forman los primeros miembros de las dos ecuaciones anteriores, resulta, representando por $Q$ el cociente y por $R$ el resto de la división,

$$Q = t - 3\frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{y}$$

$$R = \left(5 - 2au + 9\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) t^2 + \left(4av - 8\frac{\alpha}{\beta} - \frac{2a}{\beta}\right) t + 2au + 1 + 3\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{2a - \alpha}{\beta}.$$

Las condiciones para que los tres puntos de contacto con la curva de las tangentes que pasan por el punto $(\alpha, \beta)$, correspondan á la recta considerada, serán, pues, éstas:

$$5 - 2au + 9\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 0; \quad 4av - 8\frac{\alpha}{\beta} - \frac{2a}{\beta} = 0; \quad \text{y}$$

$$2au + 1 + \frac{3\alpha}{\beta} \cdot \frac{2a - \alpha}{\beta} = 0.$$

Las dos primeras determinan los parámetros $u$ y $v$ de la recta. Y la tercera, eliminando de ella la $u$ por medio de la primera, se transforma en la siguiente:

$$\beta^2 + \alpha^2 + a\alpha = 0,$$

que, consideradas $\alpha$ y $\beta$ como variables, representa una circunferencia,

que tiene por centro el punto $\left(-\frac{1}{2}a, 0\right)$, y cuyo radio es igual á $\frac{1}{2}a$. De todo lo cual resulta demostrado el teorema siguiente:

*Las tres tangentes á la cardioide, trazadas por cualquier punto de la circunferencia, de centro* $\left(-\frac{1}{2}a, 0\right)$ *y radio igual á* $\frac{1}{2}a$, *tocan á la curva en tres puntos, reales ó imaginarios, situados en línea recta.*

El cuarto punto de intersección de la recta que pasa por los puntos de contacto de las tres tangentes que acabamos de considerar, se halla definido por la ecuación $Q = 0$ ó $t = 3\frac{\alpha}{\beta}$.

**165.** Representando por $t_1$, $t_2$ y $t_3$ los valores de $t$ en los tres puntos de contacto de las tangentes á la cardioide, trazadas por el punto $(\alpha, \beta)$, de la ecuación (1) se desprende que

$$(2)\quad t_1+t_2+t_3=-3\frac{\alpha}{\beta};\ t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=-3;\ \text{y}\ t_1t_2t_3=-\frac{2a-\alpha}{\beta}$$

Por ser $t = \text{tang}\frac{1}{2}\theta$, la condición para que las bisectrices de los ángulos formados con el eje polar por los vectores de los puntos de contacto, correspondientes á dos de estas tangentes, sean perpendiculares una á otra, es $t_1 t_2 = -1$. Y en este caso

$$t_3 = \frac{2a-\alpha}{\beta},\quad \text{y}\quad t_1+t_2 = -2\frac{a+\alpha}{\beta}.$$

Sustituyendo ahora en la segunda de las ecuaciones (2) $t_1 t_2$; $t_1 + t_2$; y $t_3$ por estos valores, resulta

$$\beta^2 + \alpha^2 - a\alpha = 2a^2.$$

Luego *los puntos del plano de la cardioide, tales que dos de las tangentes á la curva, trazadas por cada uno de ellos, la toquen en otros puntos, correspondientes á una recta que pase por el origen, se hallarán también situados sobre una circunferencia, de centro definido por las coordenadas* $\frac{1}{2}a$ y $0$, *y de radio igual á* $\frac{3}{2}a$.

**166.** Para rectificar la cardioide no es menester, como tratándose de los demás caracoles, emplear las integrales elípticas. Así resulta de la expresión integral siguiente:

$$s = 2a \int_0^{\theta} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}\, d\theta = 4a \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta.$$

De la cual se deduce que la longitud total de la curva es igual á $8a$.

La rectificación de la cardioide fué por primera vez obtenida por La Hire, conforme consta en las *Mémoires de l'Académie de Paris*, 1708.

## III

### LOS ÓVALOS DE DESCARTES

**167.** Sean $r$ y $r'$ las distancias de un punto variable, $M$, á dos puntos fijos, $O$ y $O'$, llamados *focos* (fig. 48); y, representando por $h$ y $k$ dos cantidades constantes, supongamos que

$$r \pm hr' = \pm k. \tag{1}$$

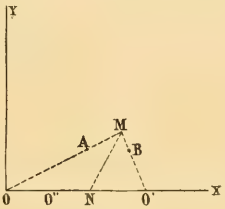


Figura 48.

El lugar geométrico descrito por $M$, conforme $r$ y $r'$ varían de magnitud, constituye una de las curvas denominadas *Óvalos de Descartes*, en memoria del ilustre geómetra de este nombre, que las descubrió y definió al tratar de resolver el problema de óptica que tiene por objeto determinar la forma de la superficie de separación de dos medios transparentes, distintos en densidad, necesaria para que los rayos emitidos por un punto luminoso en el primero sean transmitidos, por refracción, á otro punto fijo en el segundo. Problema resuelto en su *Dióptrica* por Descartes, y más tarde, en el concepto geométrico, minuciosamente estudiado por el mismo autor en el libro II de su célebre *Geometría*, publicada en 1637.

En el mismo asunto que Descartes, y á propósito del mencionado pro-

blema de Óptica, ocupóse también ROBERVAL en una memoria titulada *De resolutione æquationum*, por primera vez publicada en 1693, mucho después de fallecido el autor, y de nuevo, en 1730, inserta en el tomo VI, pág. 157, de las *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*. Siendo de creer que las investigaciones de tan eminente geómetra, concernientes á la materia de que se trata, fuesen hechas antes de publicar los resultados de las suyas DESCARTES; pues no de otro modo se explica que ROBERVAL no mencione á este propósito el nombre del gran filósofo, y aun advierta explícitamente que las curvas á que en su trabajo se refiere no habían sido hasta entonces por ningún otro matemático consideradas.

Sobre los *óvalos de* DESCARTES, conocidos también por el nombre de *curvas aplanéticas*, propuesto por HERSCHEL, se han hecho con posterioridad numerosos trabajos, catalogados por LIGUINE en el *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2.ª serie, t. VI, 1882, p. 40); y más tarde por BROCARD, en el *Intermédiaire des Mathématiciens* (t. III, 1896, p. 238).

168. Para hallar la ecuación de estos óvalos, expresada en coordenadas cartesianas, tomemos el punto $O$ como origen de las mismas, y la recta $OO'$ para eje de las abscisas; y designando por $a$ la distancia $OO'$, hallaremos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad r' = \sqrt{y^2 + (x - a)^2}.$$

Ecuaciones de las cuales se deduce que

$$r'^2 = r^2 - 2ax + a^2;$$

y, contando además con la (1), este otro resultado:

$$(2) \qquad (1 - h^2)\, r^2 + 2h^2 ax + h^2 - a^2 h^2 = \pm 2kr.$$

Ó el siguiente, si en la expresión anterior se pone el valor de $r$:

$$(3) \quad [(1 - h^2)(x^2 + y^2) + 2ah^2 x + k^2 - a^2 h^2]^2 = 4k^2 (x^2 + y^2).$$

De la ecuación (2) se concluye inmediatamente que los puntos de los óvalos de Descartes son las intersecciones de la circunferencia de radio variable, $r$, y centro $O$, con las rectas correspondientes, paralelas al eje de

las ordenadas, representadas por aquella misma ecuación, dispuesta, para mayor claridad, en esta forma:

$$(2') \quad x = \frac{a^2 h^2 - k^2 \pm 2kr - (1 - h^2) r^2}{2h^2 a} = \frac{a^2 h^2 + r^2 h^2 - (r \mp k)^2}{2h^2 a}.$$

Y, según que el valor absoluto del segundo miembro sea mayor, igual ó menor, que $r$, así esta ecuación representará rectas exteriores á la circunferencia, ó tangentes á ella, ó secantes de la misma en dos distintos puntos (puntos de los óvalos), simétricos con respecto al eje de las abscisas.

Notemos además que, en razón del doble signo de $k$, á cada valor de $r$ corresponden dos distintos valores de $x$, ó dos pares de puntos de los óvalos, situado cada cual en distinta recta. Pero si á $r$ le atribuímos un nuevo valor, $r_1$, puede suceder que alguno de los dos valores de $x$ así obtenidos coincida con alguno de los que antes se obtuvieron: como sucede cuando se verifica que

$$r^2 h^2 - (r - k)^2 = r_1^2 h^2 - (r_1 + k)^2.$$

En cuyo caso, por el punto cuya abscisa es $x$ pasará una recta, paralela al eje de las ordenadas y secante á los óvalos en cuatro distintos puntos: número máximo de intersecciones de una recta con una curva de cuarto grado. Siendo menester, para esto, que

$$r - r_1 = \frac{2k}{1 - h^2}.$$

De manera que *los radios de las dos circunferencias que producen cuatro puntos de la curva, situados en la misma recta, paralela al eje de las ordenadas, han de tener una diferencia constante.*

**169.** Antes de pasar más adelante, conviene advertir que el *caracol de Pascal* se halla comprendido, como caso particular, entre los *óvalos de Descartes*. Si, en efecto, en la ecuación (3) de estos *óvalos* se supone que $k^2 = a^2 h^2$, obtiénese la ecuación del *caracol*. Y no solamente en este caso coinciden con el *caracol* aquellos *óvalos*. Porque si la (1) se escribe en esta forma:

$$r' \pm \frac{1}{h} r = \pm \frac{k}{h}, \quad \text{ó} \quad r' \pm h_1 r = \pm k_1,$$

suponiendo para ello que $h_1 = \frac{1}{h}$ y $k_1 = \frac{k}{h}$, fácilmente se ve que aquella ecuación (1) representará un *caracol* cuando sea $k_1^2 = a^2 h_1^2$, ó $k = a$.

**170.** Veamos ahora si la curva representada por la ecuación (3) admite otro foco, $O''$, colocado, como los $O$ y $O'$, sobre el eje de las abscisas. Para esto es necesario, y basta, que exista un sistema de valores de $k_1$, $a_1 = OO''$, y $h_1$, tal que la ecuación

$$(1 - h_1^2) r^2 + 2 a_1 h_1^2 x + k_1^2 - a_1^2 h_1^2 = \pm 2 k_1 r$$

coincida con la (2), ó que $k_1$, $a_1$ y $h_1$ satisfagan á las ecuaciones condicionales siguientes:

$$\frac{a h^2}{1 - h^2} = \frac{a_1 h_1^2}{1 - h_1^2}; \quad \frac{k^2 - a^2 h^2}{1 - h^2} = \frac{k_1^2 - a_1^2 h_1^2}{1 - h_1^2}; \quad \text{y} \quad \frac{k}{1 - h^2} = \frac{k_1}{1 - h_1^2}.$$

Eliminando en la segunda de estas ecuaciones $k_1$ y $a_1$ por medio de la primera y tercera, obtiénese esta otra:

$$k^2 h_1^4 - (a^2 + k^2) h^2 h_1^2 + a^2 h^4 = 0:$$

de la cual se deducen para $h_1$ los valores

$$h_1 = \pm h, \quad \text{y} \quad h_1 = \pm \frac{a h}{k}.$$

Los primeros valores de $h_1$ así obtenidos producen estos otros: $k = k_1$ y $a = a_1$, y no conducen á resultado ninguno nuevo. Pero de los segundos se concluye que

$$a_1 = \frac{k^2 - a^2 h^2}{(1 - h^2) a} \quad \text{y} \quad k_1 = \pm \frac{k^2 - a^2 h^2}{k (1 - h^2)}.$$

Y, en consecuencia, representando por $r''$ la distancia $MO''$, los óvalos de Descartes, que tienen por ecuación

$$(1') \qquad r \pm \frac{a h}{k} r'' = \pm \frac{k^2 - a^2 h^2}{(1 - h^2) k},$$

y por focos el origen de las coordenadas, $O$, y el $O''$, separados uno de otro por la distancia

$$OO'' = \frac{k^2 - a^2 h^2}{a(1 - h^2)},$$

coinciden con los representados por la ecuación (1).

Advirtamos además que de las ecuaciones (1) y (1'), por eliminación de $r$, resulta una nueva relación lineal entre $r'$ y $r''$. Y, por lo tanto, *cualquier óvalo de Descartes puede ser definido de tres modos distintos, como lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á otros dos fijos están ligadas por una relación lineal.* Importante resultado debido á CHASLES. *(Aperçu historique,* 1837, *note* 21.)

Pero es de advertir que el foco $O''$, á que acabamos de referirnos, no existe en el caso de convertirse el óvalo en *caracol* de Pascal.

**171.** Para determinar la forma de la curva, representada por la ecuación (3), resolveremos varias cuestiones previas.

1.° Busquemos en primer lugar los puntos en que la curva corta al eje de las abscisas.

Poniendo para ello $y = 0$ en la ecuación (3), resulta

$$(1 - h^2)\, x^2 + 2ah^2 x + k^2 - a^2 h^2 = \pm 2kx.$$

De la primera de estas ecuaciones, ó adoptando como signo del segundo miembro el $+$, se desprende que

$$x = \frac{(k \pm ah)(1 \mp h)}{1 - h^2} = \frac{k \pm ah}{1 \pm h}.$$

Y de la segunda

$$x = \frac{(k \mp ah)(\pm h - 1)}{1 - h^2} = -\frac{k \mp ah}{1 \pm h}.$$

La curva corta, pues, al eje de las abscisas en cuatro puntos reales, dados por estas ecuaciones,

$$x = \frac{k \pm ah}{1 \pm h} \quad \text{y} \quad x = \frac{-k \pm ah}{1 \pm h}:$$

puntos distintos, bien entendido, excepto en el caso de ser $k^2 = 1$, ó $k^2 = a^2$, ó $k^2 = a^2 h^2$, de las cuales debe ahora prescindirse, porque aquella curva es entonces una *cónica*, ó un *caracol de Pascal*, ya estudiado anteriormente.

2.° Busquemos, en segundo lugar, los puntos múltiplos de la curva considerada.

Y para ello, determinemos los valores de $x$ é $y$, que satisfacen á la ecuación (3) y á las siguientes, derivadas suyas con respecto á las mismas coordenadas $x$ é $y$:

$$[(1-h^2)(x^2+y^2)+2ah^2x+k^2-a^2h^2][(1-h^2)x+ah^2]=2k^2x, \text{ y}$$

$$[(1-h^2)(x^2+y^2)+2ah^2x+k^2-a^2h^2](1-h^2)y=2k^2y.$$

La última ecuación admite dos soluciones:

$$y=0, \quad \text{y} \quad (1-h^2)(x^2+y^2)+2ah^2x+k^2-a^2h^2=\frac{2k^2}{1-h^2}.$$

Pero esta segunda solución no es compatible con la primera de las anteriores, y no conduce, por consiguiente, á punto singular alguno. Y á la solución $y=0$ corresponden puntos colocados sobre el eje de las abscisas, distintos todos unos de otros, salvo, como ya se advirtió, cuando la ecuación (3) corresponde al caracol de Pascal.

La curva de que ahora tratamos no posee, segun esto, puntos *múltiplos* á distancia finita. Pero sí dos *puntos de retroceso imaginarios* en lo infinito.

Para verlo basta investigar sus asíntotas. Si con este objeto suponemos primeramente que $y=zx$, y, á continuación, $x=\infty$, hállase que $\lim z = \pm i$. Y si después escribimos $y=\pm iz+u$ y $x=\infty$, deduciremos la ecuación

$$[\pm 2i(1-h^2)\lim u+2ah^2]^2=0,$$

que determina $\lim u$; y por ser *dobles sus raíces* infiérese, en conclusión, que cada una de las ecuaciones

$$y=\pm i\left[x+\frac{ah^2}{1-h^2}\right]$$

representa dos asíntotas, una con otra coincidentes.

3.° Por ser *imaginarias* las asíntotas buscadas, asimismo se infiere que la curva á que corresponden no tiene ramas infinitas reales. Concluyéndose de esta propiedad y de la anteriormente advertida, de carecer la curva de *puntos múltiplos* á distancia finita, que los óvalos de Descartes se componen de dos ramas cerradas, completamente separadas una de otra.

4.° Para hallar los puntos en que $y$ adquiere valores *máximos ó mínimos*, partiremos de las ecuaciones

$$(2') \quad (1 - k^2)\, r^2 + 2\, a k^2\, x + k^2 - a^2 k^2 = 2 k r, \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = r^2:$$

en las cuales se hallan expresas $x$ é $y$ en función de la cantidad positiva ó negativa $r$, que tomaremos como variable independiente. Y en tal supuesto, se hallará que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dr}}{\dfrac{dx}{dr}} = \frac{r - x\dfrac{dx}{dr}}{y\dfrac{dx}{dr}}.$$

Por consiguiente, los valores de $r$ á que corresponden valores máximos ó mínimos de $y$, se deducirán de la ecuación

$$r - x\frac{dx}{dr} = 0;$$

ó, en virtud de la ecuación (2'), de esta otra:

$$(1 - k^2)^2 r^3 - 3\,(1 - k^2)\, k r^2 - (a^2 k^2 + k^2 k^2 - 3 k^2 + a^2 k^4)\, r$$
$$- k\,(k^2 - a^2 k^2) = 0.$$

La cual será menester que resolvamos para hallar luego, por medio de las ecuaciones (2') y $x^2 + y^2 = r^2$, los valores buscados de $x$ é $y$.

Como de la primera ecuación se desprenden tres valores de $r$, á cada uno de los cuales corresponden un valor de $x$ y otros dos, iguales y de signos contrarios, de $y$, dados por las últimas, conclúyese que el número de puntos que satisfacen á la cuestión son seis, distribuídos por mitad á uno y otro lado del eje de las abscisas. Pero de cada uno de estos grupos

de tres puntos, dos deben ser imaginarios; porque, si no lo fuesen, una rama de la curva tendría dos puntos de ordenada máxima ó mínima á cada lado de aquel eje, y uno no más la otra: lo que es de toda evidencia absurdo.

Los puntos en que $x$ es máxima ó mínima se obtendrán por análogo procedimiento. Siendo fácil ver que las ecuaciones

$$y = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dr} = 0,$$

ó

$$y = 0 \quad \text{y} \quad k - (1 - h^2)\, r = 0,$$

determinan los valores de $r$, á que corresponden valores máximos ó mínimos de $x$.

A la segunda ecuación corresponden estos valores de $x$ é $y$:

$$x = \frac{a^2 + k^2 - a^2 h^2}{2a(1 - h^2)}, \quad \text{é}$$

$$y = \frac{1}{2a(1 - h^2)} \sqrt{4a^2 k^2 - (a^2 + k^2 - a^2 h^2)^2}.$$

A los cuales corresponden dos puntos, reales ó imaginarios.

Y á la solución $y = 0$, los cuatro puntos en que la curva corta al eje de las abscisas, anteriormente determinados.

5.° Para hallar los puntos en que la curva corta al eje de las ordenadas, póngase $x = 0$, y resultará

$$(4) \qquad y = \frac{\pm k \pm h\sqrt{a^2 + k^2 - h^2 a^2}}{1 - h^2}.$$

Vese, pues, que el eje de las ordenadas, ó no corta á la curva, como sucederá cuando sea $a^2 + k^2 - a^2 h^2 < 0$, ó la corta en cuatro puntos.

Tomando para origen de las coordenadas el foco $O'$, la ecuación de la curva se transforma en ésta:

$$[(h^2 - 1)(x_1^2 + y_1^2) - 2ax_1 + k^2 - a^2]^2 = 4k^2 h^2 (x_1^2 + y_1^2).$$

Y poniendo en ella $x_1 = 0$, obtiénense los valores de las ordenadas de aquellos puntos en que la curva corta al nuevo eje de las ordenadas, dados por la expresión

$$y_1 = \frac{\pm kh \pm \sqrt{a^2 h^2 + k^2 - a^2}}{h^2 - 1}.$$

De la última fórmula se deduce que cuando $h^2 > 1$, $y_1$ es real; y de la (4) que $y$ será real cuando sea $h^2 < 1$. Luego una, por lo menos, de las perpendiculares al eje de los óvalos, que pasan por los focos $O$ y $O'$, corta á la curva en cuatro puntos reales.

**172.** De todo lo cual se concluye que la curva á que nos referimos consta de dos distintas ramas, que, en vez de cortarse—salvo el caso del *caracol de Pascal*, de que ahora prescindimos—se encuentran una dentro de otra. La interior, cerrada y convexa, ó sin ningún punto de inflexión, posee un eje de simetría, $AB$, que puede suponerse coincidente con el de las abscisas, y en cuyos extremos, $A$ y $B$, son las tangentes á la curva perpendiculares al mismo eje; y otros dos puntos, $M$ y $N$, de ordenada *máxima* en absoluto. Y la exterior, de la misma forma general, ó de la indicada en la fig. 46, poseerá en este caso cuatro puntos: los $A$ y $B$, en los extremos del eje horizontal, y los $P$ y $Q$, simétricamente colocados con respecto á este eje, donde las tangentes á la curva son perpendiculares al mismo eje; y otros dos puntos también, $M$ y $N$, de ordenada *máxima*, como en el caso primero.

**173.** Las normales á los óvalos de Descartes pueden obtenerse por un método general conocido, aplicable á todas las curvas referidas á coordenadas *bipolares*.

En el caso de los óvalos á que corresponden los signos superiores de la ecuación (1), tomando los segmentos de recta $MA = 1$, y $MB = h$, figura 49, la normal á la curva en el punto $M$ será la diagonal del paralelógramo construído sobre aquellos segmentos.

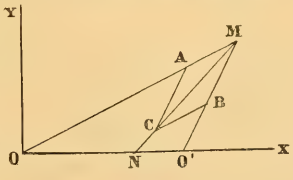


Figura 49.

Para demostrarlo basta advertir que la ecuación de la normal á uno cualquiera de aquellos óvalos, en el punto $(x, y)$, es

$$\frac{X-x}{\frac{dr}{dx}+h\frac{dr'}{dx}}=\frac{Y-y}{\frac{dr}{dy}+h\frac{dr'}{dy}};$$

ó, por ser

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r}=\cos\omega;\quad \frac{dr'}{dx}=\frac{x-a}{r'}=\cos\omega';$$

$$\frac{dr}{dy}=\frac{y}{r}=\operatorname{sen}\omega;\quad \text{y}\quad \frac{dr'}{dy}=\frac{y}{r'}=\operatorname{sen}\omega',$$

representando por $\omega$ y $\omega'$ los ángulos $MOx$ y $MO'x$,

$$\frac{X-x}{\cos\omega+h\cos\omega'}=\frac{Y-y}{\operatorname{sen}\omega+h\operatorname{sen}\omega'}.$$

Y basta ahora advertir que las coordenadas $x_1$ é $y_1$ del punto $C$ se hallan expresadas por las fórmulas

$$x_1=x-(\cos\omega+h\cos\omega')\quad \text{é}\quad y_1=y-(\operatorname{sen}\omega+h\operatorname{sen}\omega'),$$

y que estas coordenadas satisfacen á la última ecuación, para concluir que la normal coincide con la diagonal $MC$ del paralelógramo referido.

Y á la misma conclusión se llega, tratándose de un óvalo correspondiente á la ecuación $r-hr'=\pm k$, cuidando de tomar el segmento $MB$ en dirección opuesta á $MO'$.

De la propiedad que acaba de demostrarse, infiérese inmediatamente esta interesante consecuencia: que los óvalos de Descartes resuelven el problema de Óptica, anteriormente mencionado; porque los rayos luminosos $OM$, que parten del foco $O$ de un óvalo de Descartes, interpuesto entre dos *medios* transparentes de diferente densidad, y cuyo *índice de refracción* es $h$, se refractan, cuando llegan á la curva, según rectas $MO'$, que se cortan en otro foco $O'$. Para persuadirse de lo cual basta advertir que la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}OMN}{\operatorname{sen}O'MN}=\frac{\operatorname{sen}OMN}{\operatorname{sen}ACM}=h,$$

resultante de considerar el paralelógramo $AMBC$, coincide con la que expresa la *ley de la refracción.*

**174.** Poniendo en la ecuación (3)

$$V = (1 - h^2)(x^2 + y^2) + 2ah^2 x + k^2 - a^2 h^2, \quad \text{y} \quad U = x^2 + y^2,$$

resulta

$$V^2 = 4k^2 U.$$

Y con estos antecedentes, escribamos la ecuación

$$4k^2 t^2 + 2tV + U = 0: \tag{5}$$

la cual, suponiendo que sea $t$ un parámetro variable, representa un sistema, ó conjunto, de círculos, cuyos centros coinciden con el eje de las abscisas.

Pues bien: si nos proponemos hallar la ecuación de la *envolvente* de estos círculos, daremos, sin variante, con la (3), correspondiente á los óvalos de Descartes. Lo cual constituye interesante propiedad de los mismos óvalos.

**175.** Efectuando la transformación, por *radios vectores recíprocos*, de la curva representada por la ecuación (3), tomando el origen de las coordenadas para centro de la transformación, para lo cual debe ponerse en esta ecuación

$$x = \frac{t_1^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2} \quad \text{é} \quad y = \frac{t_1^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2},$$

encuéntrase la que sigue:

$$[(1 - h^2) t_1^4 + 2ah^2 t_1^2 x_1 + (k^2 - a^2 h^2)(x_1^2 + y_1^2)]^2 = 4k^2 t_1^4 (x_1^2 + y_1^2),$$

que coincide con la (3) cuando

$$t_1^2 = \frac{k^2 - a^2 h^2}{1 - h^2}.$$

Luego los óvalos de Descartes pertenecen á la clase de curvas que Moutard *(Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1864), designó

con el nombre de *analagmáticas*, las cuales poseen la propiedad de no alterarse por resultado de la transformación mencionada. Transformación aplicable á los óvalos de Descartes de tres maneras distintas, puesto que puede tomarse para origen de las coordenadas cualquiera de los tres focos de la curva, sin alterar la forma de la ecuación (3).

**176.** Cada una de las rectas definidas por la ecuación $y = \pm ix$ corta á la curva á que corresponde la ecuación (3) en dos puntos situados en lo infinito, y en otros dos coincidentes uno con otro, cuya abscisa se deduce de la ecuación

$$(2ah^2x + h^2 - a^2h^2)^2 = 0.$$

Luego las rectas consideradas son tangentes á la referida curva, y ésta posee, en consecuencia, un *foco ordinario* en el origen de las coordenadas. Y como se pueden tomar los puntos $O'$ y $O''$ para origen de las coordenadas sin alterar la forma de la ecuación (3), asimismo resulta que estos puntos son también *focos ordinarios* de la curva. De manera que la designación aplicada á los puntos $O$, $O'$ y $O''$, en los Núms. **167** y **170**, concuerda con la noción general de *foco* propuesta por PLÜCKER.

A lo que precede puede agregarse que la curva no posee más que estos tres focos *ordinarios reales*.

Veremos, en efecto, poco más adelante, al tratar de la determinación del número de focos de la clase de curvas denominadas *cuárticas bicirculares*, entre las cuales, como caso particular, se hallan comprendidos los óvalos de Descartes, que el número de los *focos ordinarios* de éstas es igual á *nueve: reales* tres, y seis *imaginarios*. Bastando, para determinar estos últimos, advertir que las rectas, de coeficiente angular igual á $\pm i$, que pasan por los focos $O$, $O'$ y $O''$,

$$y = ix, \quad y = i(x - a), \quad y = i(x - a_1), \quad \text{é}$$
$$y = -ix, \quad y = -i(x - a), \quad y = -i(x - a_1),$$

son tangentes á la curva: por lo cual los *nueve puntos* en que las tres primeras cortan á las tres últimas representan precisamente los *nueve focos* de la curva, *reales* tres, los $O$, $O'$ y $O''$, y los otros seis imaginarios.

Pero, además de los *ordinarios*, la curva posee *focos singulares*, entre

los cuales existe uno *real*, coincidente con la intersección de sus asíntotas. De las ecuaciones de estas líneas, poco antes encontradas, se infiere que este foco tiene por coordenadas

$$x = -\frac{ah^2}{1-h^2} \quad \text{é} \quad y = 0.$$

**177.** Poniendo en la ecuación (3) $x = r\cos\theta$ é $y = r\,\text{sen}\,\theta$, hállase la ecuación de la curva, referida á coordenadas polares,

$$(1-h^2)\,r^2 + 2\,(ah^2\cos\theta - k)\,r + k^2 - a^2h^2 = 0.$$

Y de la eliminación de $\cos\theta$ entre esta ecuación y la polar de una recta cualquiera, $\rho\,(A\cos\theta + B\,\text{sen}\,\theta) + C = 0$, se desprende otra ecuación de *cuarto grado*, en la cual el coeficiente del segundo término es igual á $-\frac{4k}{1-h^2}$. Luego *cualquier línea recta corta á la curva en cuatro puntos tales que la suma de sus distancias, positivas ó negativas, á un foco, es constante.* (SALMON: *Higher planes curves*, ed. 3.ª, 280).

La ecuación polar de los óvalos de Descartes, últimamente considerada, fué utilizada por GENOCCHI *(Comptes rendus de l'Académie de Paris*, 1875) para obtener la longitud de los arcos de estas curvas, demostrando por su medio aquel ilustre geómetra que la rectificación de los óvalos cartesianos depende de la rectificación de tres arcos de tres elipses diferentes.

**178.** Los óvalos de Descartes pueden ser definidos y trazados por muy diversos procedimientos, de los cuales mencionaremos tan sólo los dos siguientes:

1.° El lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias á dos circunferencias fijas sea constante, es un óvalo de Descartes. (NEWTON.)

Representando, para demostrarlo, por $R$ y $R'$ los radios de aquellas circunferencias; por $r$ y $r'$ las distancias de un punto cualquiera de la curva á los centros de las mismas; y por $h$ una constante, considerando las diversas posiciones de aquel punto con respecto á las circunferencias, dedúcese que

$$\pm\frac{r-R}{r'-R'} = h, \quad \text{ó} \quad r \mp hr' = R \mp hR'.$$

2.° Consideremos dos circunferencias y un punto fijo, situado en la recta que pasa por sus centros. Si tiramos por este punto una secante á las dos circunferencias y unimos los puntos de intersección con ambos centros, los radios prolongados se cortarán en otros puntos de posición variable, conforme la secante varíe, que describirán óvalos de Descartes, con focos coincidentes en aquellos centros. Construcción elegante, debida al geómetra CHASLES *(Aperçu historique, note* XXI), quien la dedujo, como consecuencia ingeniosa del *teorema de Menelao.*

Aplicando, en efecto, el mencionado teorema al triángulo $CMC'$ (fig. 50),

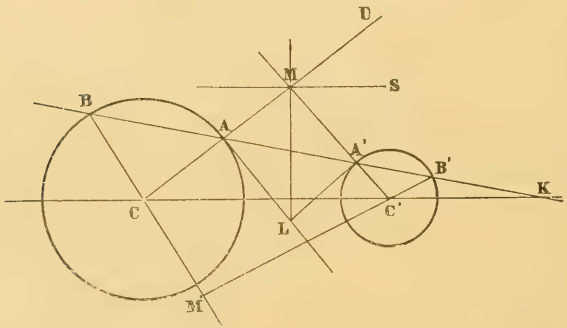



Figura 50.

determinado por los centros $C$ y $C'$ de las dos circunferencias y por el punto $M$ de la curva, y á la transversal $KA$, obtiénese desde luego la igualdad siguiente:

$$\frac{CA}{AM} \cdot \frac{MA'}{A'C'} \cdot \frac{C'K}{CK} = 1.$$

De la cual, representando por $R$ y $R'$ los radios $CA$ y $C'A'$; por $r$ y $r'$ las distancias de $M$ á $C$ y $C'$; y por $h$ la constante $\frac{R}{R'} \cdot \frac{KC'}{KC}$, se desprende esta ecuación *bipolar* de un óvalo de Descartes:

$$r - hr' = R - hR'.$$

Y del mismo modo se encuentra, aplicando el mencionado teorema al triángulo $CM'C'$ y á la secante $KA$, esta otra ecuación:

$$r - hr' = -(R - hR').$$

A todó lo cual agregó CHASLES, como interesante complemento, que la recta $LM$ que pasa por el punto de intersección $L$ de las tangentes á las circunferencias, en los $A$ y $A'$, es tangente á la curva engendrada por la construcción expuesta, en el punto $M$. Para demostrar lo cual basta advertir que

$$AM = ML \times \cos AML, \quad \text{y} \quad A'M = ML \times \cos A'ML; \quad \text{ó}$$

$$\frac{\cos AML}{\cos A'ML} = \frac{AM}{A'M} = \frac{r - R}{r' - R'} = h.$$

De donde, representando por $MS$ una recta, perpendicular á la $ML$, se infiere que

$$\frac{\operatorname{sen} UMS}{\operatorname{sen} SMA'} = h.$$

Luego, por lo dicho en el Núm. **173**, $MS$ será la normal á la curva en el punto $M$, y $ML$ la tangente. Pudiendo determinarse por los mismos pasos la tangente al óvalo en el otro punto $M'$, obtenido por igual construcción, y á la vez casi, que el primero.

**179.** Los *óvalos de Descartes* desempeñan papel importante en la Óptica, como lo demuestra el hecho de haber motivado su descubrimiento, conforme ya más atrás queda advertido, la resolución de un interesante problema de esta ciencia. A lo cual añadiremos que QUETELET *(Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles, t.* III), y STURM *(Annales de Gergonne, t.* XV), encontraron estas mismas curvas como solución del problema que tiene por objeto determinar las *cáusticas secundarias,* por reflexión y por refracción, del círculo: esto es, las curvas que cortan ortogonalmente los rayos reflejados ó refringidos en un arco de este nombre.

## IV

### LAS CUÁRTICAS BICIRCULARES

**180.** Los *óvalos de Descartes* satisfacen á una ecuación de la forma

$$r \pm hr' \pm kr'' = 0, \tag{1}$$

resultante de las ecuaciones de los mismos óvalos

$$r \pm h_1 r' = \pm k_1 \quad \text{y} \quad r \pm h_2 r'' = \pm k_2.$$

Circunstancia que nos impulsa á estudiar las curvas definidas por la ecuación (1), en la cual $r$, $r'$ y $r''$ representan las distancias de los puntos de una cualquiera de aquellas curvas á tres puntos fijos, situados: uno en el origen de las coordenadas (0, 0); otro en el eje de las abscisas, á la distancia $a$ del origen $(a, 0)$; y el tercero allí donde las coordenadas son $(\alpha, \beta)$.

Por ser

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r'^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2, \quad r''^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

la ecuación cartesiana de las curvas, definidas por la (1), será

$$\begin{cases} [(1 + h^2 - k^2)(x^2 + y^2) - 2(ah^2 - \alpha k^2)x + 2\beta k^2 y + h^2 a^2 \\ \quad - (\alpha^2 + \beta^2) k^2]^2 = 4h^2 (x^2 + y^2)[y^2 + x^2 + a^2 - 2ax]. \end{cases} \tag{2}$$

Ó

$$(x^2 + y^2 + px + qy + l)^2 = A^2 (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax + a^2),$$

suponiendo que

$$p = \frac{2(\alpha k^2 - ah^2)}{1 + h^2 - k^2}; \quad q = \frac{2\beta k^2}{1 + h^2 - k^2};$$

$$l = \frac{h^2 a^2 - (\alpha^2 + \beta^2) k^2}{1 + h^2 - k^2}; \quad \text{y} \quad A = -\frac{2h}{1 + h^2 - k^2}.$$

La ecuación que acabamos de obtener es de *cuarto* grado, excepto cuando $(1 + h^2 - k^2)^2 = 4h^2$, ó $1 \pm h \pm k = 0$: en cuyo caso se reduce al *tercero*, y representa una *cúbica circular* (Núm. 42).

**181.** Veamos ahora si existe otra ecuación de la forma (2):

$$[(1 + h_1^2 - k_1^2)(x^2 + y^2) - 2(ah_1^2 - \alpha_1 k_1^2)x + 2\beta_1 k_1^2 y + h_1^2 a^2 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2) k_1^2] = 4h_1^2 (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax),$$

que represente la misma curva á que la anterior se refiere.

Para esto deben verificarse las expresiones siguientes:

$$p = \frac{2(\alpha_1 k_1^2 - ah_1^2)}{1 + h_1^2 - k_1^2}; \quad q = \frac{2\beta_1 k_1^2}{1 + h_1^2 - k_1^2};$$

$$l = \frac{h_1^2 a^2 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2) k_1^2}{1 + h_1^2 - k_1^2}; \quad \text{y} \quad A = \frac{2h_1}{1 + h_1^2 - k_1^2}.$$

Ó

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha_1 k_1^2 - ah_1^2 = \dfrac{h_1 p}{A}; \quad k_1^2 \beta_1 = \dfrac{h_1 q}{A}; \\ h_1^2 a^2 - k_1^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) = \dfrac{2h_1 l}{A}; \quad \text{y} \quad k_1^2 = 1 + h_1^2 - \dfrac{2h_1}{A}: \end{cases}$$

de las cuales, eliminando primeramente $\alpha_1$ y $\beta_1$ entre las tres primeras, y después $k_1^2$ por medio de la última, resulta esta otra:

$$\frac{2}{A}(a^2 + ap + l) h_1^2 + \left(\frac{p^2 + q^2 - 4l}{A^2} - a^2\right) h_1 + \frac{2l}{A} = 0.$$

Ecuación de la cual se desprenden dos valores para $h_1$: uno, el mismo $h$, que nada nuevo nos dice; y otro, que, sustituído en las ecuaciones anteriores, producirá un sistema de valores reales para $k_1$, $\alpha_1$ y $\beta_1$, á los cuales corresponde una nueva ecuación de la forma (2), representante de la misma curva.

Luego, si una curva satisface á una ecuación de la forma (1), existe un cuarto punto tal que la misma curva satisface también á otra ecuación de igual forma, pero con distintos coeficientes:

$$r \pm h_1 r' \pm k_1 r'' = 0,$$

representando ahora $r''$ la distancia de los puntos de la curva al nuevo punto considerado: de manera que *la curva puede ser analíticamente representada ó definida de cuatro modos distintos, como lugar geométrico de los puntos cuyas distancias á otros tres fijos están ligadas por una relación lineal homogénea.*

Procediendo como en el Núm. **176**, al tratar entonces de los *óvalos de Descartes,* fácilmente se concluye que los puntos fijos $(0, 0)$, $(0, a)$, $(\alpha, \beta)$ y $(\alpha_1, \beta_1)$, á que acabamos de referirnos, son *focos ordinarios* de la curva, únicos de este nombre, y *reales* además, que la curva posee, conforme mostraremos poco más adelante.

Y también conviene advertir desde luego que el teorema acabado de enunciar deja de verificarse cuando, en la ecuación que sirve para determinar $h_1$, el coeficiente de $h_1^2$ es igual á cero, y también cuando las dos raíces de la misma ecuación son iguales. A estos casos excepcionales pertenecen los *óvalos de Descartes,* que, según ya queda establecido, solamente poseen *tres focos ordinarios reales.*

**182.** Deduciendo el valor de $h_1$ de la segunda de las ecuaciones (3), y sustituyéndole en las primera y tercera, resulta

$$\alpha_1 - a\frac{A^2\beta_1^2}{q^2}k^2 = \frac{p\beta_1}{q}, \quad \text{y}$$

$$\frac{A^2\beta_1^2 a^2}{q^2}k^2 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2) = \frac{2l\beta_1}{q}:$$

de las cuales, por eliminación de $k^2$, se obtiene esta otra ecuación:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 - a\alpha_1 + \frac{ap + 2l}{q}\beta_1 = 0.$$

Por lo tanto, el punto $(\alpha_1, \beta_1)$ corresponde á la circunferencia de radio igual á

$$R = \frac{1}{2}\left[a^2 + \frac{a(p+2l)^2}{q^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

cuyo centro tiene por coordenadas

$$\frac{1}{2}a \quad \text{y} \quad \frac{ap+2l}{2q}.$$

Y como á la ecuación de esta circunferencia satisfacen también las coordenadas de los puntos $(0, 0)$, $(\alpha, \beta)$ y $(0, a)$, de lo dicho se concluye que los *cuatro focos de la curva corresponden á la misma circunferencia que se acaba de definir.*

**183.** Las cuárticas que acabamos de considerar están comprendidas en la extensa é importante clase de las representadas por la ecuación

$$(4) \quad \begin{cases} (x^2+y^2)^2 + 2(mx+ny)(x^2+y^2) \\ + A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0, \end{cases}$$

á las cuales se da el nombre de *cuárticas bicirculares:* sobre cuya teoría y propiedades han discurrido con grande ingenio muchos eminentes geómetras. Como Moutard *(Bulletin de la Société Phylomatique de Paris*, 1860), que las encontró al estudiar las curvas *analagmáticas* de cuarto orden; Darboux, que trató de ellas, á la par que de las curvas resultantes de la intersección de la esfera con las superficies de segundo orden, en varias disertaciones notables publicadas con posterioridad al año 1864, en una de las cuales, titulada *Sur une Classe remarquable de curves et de surfaces algébriques*, se hallan reunidos los resultados importantes de sus indagaciones sobre este asunto; La Gournerie *(Journal de Liouville*, 1869), que extensamente analizó la ecuación procedente de la general, en los supuestos de ser $n=0$, $B_1=0$, $E_1=0$, en la cual se encuentran comprendidas todas las *espíricas;* Casey *(Transactions of Royal Irish Academy*, 1869); etc.

**184.** Principiaremos el estudio de las cuárticas bicirculares procurando averiguar cuál es la naturaleza de sus puntos situados en lo infinito, pudiendo recurrirse para lograrlo á cualquiera de los varios métodos conocidos, como el de las asíntotas, por ejemplo. Mediante el cual se deduce, poniendo primeramente $y=xx$, que $\lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = \pm i$; y después, si $y = \pm ix + u$ y $x=\infty$, que

$$u^2 + (n \mp mi)u - \frac{1}{4}(A_1 - C_1 \pm B_1 i) = 0.$$

Si las raíces de esta ecuación son desiguales, la curva tendrá dos puntos en lo infinito y cuatro asíntotas: luego estos puntos serán *dobles*. Y si las raíces son iguales, dos de las cuatro asíntotas coincidirán con las otras dos, y los puntos serán de *retroceso*. Condición que se verifica cuando

$$(n \mp mi)^2 + A_1 - C_1 \pm B_1 i = 0,$$

ó

$$n^2 - m^2 + A_1 - C_1 = 0 \quad \text{y} \quad 2mn = -B_1.$$

Fácil es ver que estas ecuaciones quedan satisfechas cuando la (4) se reduce á la de los *óvalos de Descartes*, y, por consiguiente, que las curvas de este nombre tienen dos puntos de retroceso en lo infinito, como ya anteriormente vimos.

A las *cuárticas bicirculares*, con dos puntos de retroceso en lo infinito, aplícase el calificativo especial de *cartesianas:* hallándose, en consecuencia, comprendidos, como caso particular, en este grupo de curvas los mencionados óvalos del mismo nombre.

**185.** Para continuar el estudio en el párrafo anterior iniciado, vamos á precisar las condiciones para que el círculo que tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = 2(\alpha x + \beta y + \gamma) = 2P$$

sea bitangente á las curvas de que tratamos: asunto interesante que se resuelve por el siguiente método, propuesto por DARBOUX *(l. c., p.* 114 *de la edición de* 1873).

Redúzcase primeramente la ecuación (4), por traslación del origen de las coordenadas al punto $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}\right)$, y por un cambio de dirección de los ejes, en virtud del cual desaparezca el término que contiene el producto $xy$, á la forma

$$(5) \quad (x^2 + y^2)^2 - 4(Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D) = 0.$$

Para expresar que la curva correspondiente á esta ecuación y al círculo se cortan, habremos de considerar estas otras dos ecuaciones:

$$(6) \quad P^2 - (Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D) = 0, \text{ y } x^2 + y^2 - 2P = 0;$$

la primera de las cuales representa una cónica.

Mas, para que el círculo sea bitangente á la curva (5), deben reunirse por pares los cuatro puntos de intersección del círculo con la curva, y, por lo tanto, deben ser también bitangentes las curvas (6).

Redúcese, pues, la dificultad á encontrar las condiciones para que estas últimas curvas sean bitangentes. Lo cual se consigue restando una de otra ordenadamente aquellas ecuaciones (6), después de multiplicada la segunda por un factor $h$, encontrándose de este modo la siguiente:

$$f = P^2 - (Ax^2 + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + D) - h(x^2 + y^2 - 2P) = 0,$$

que representa todas las cónicas que pasan por la intersección de las (6). Pues para que estas curvas sean bitangentes, será menester, y basta, que la última ecuación deducida represente dos rectas coincidentes, ó que $f$ sea un cuadrado perfecto.

Para determinar las condiciones en que esto se verifica, puede emplearse el siguiente procedimiento.

Supongamos que el coeficiente $A' + h - \beta^2$ de $y^2$ en la ecuación precedente no sea igual á *cero*; y de la misma ecuación se deducirán entonces dos valores para $y$, que solamente serán iguales uno á otro cuando tenga lugar, como identidad, la expresión siguiente:

$$(C' - \beta h - \beta\gamma - \alpha\beta x)^2 = (\beta^2 - A' - h)$$
$$\times [(\alpha^2 - A - h)x^2 + 2(\alpha\gamma + \alpha h - C)x - D + 2\gamma h + \gamma^2],$$

que se resuelve para ello en estas tres ecuaciones de condición:

$$(A)\quad \begin{cases} (A' + h)\alpha^2 + (A + h)(\beta^2 - A' - h) = 0; \\ \alpha\beta(C' - \beta h - \beta\gamma) + (\beta^2 - A' - h)(\alpha\gamma - C + \alpha h) = 0; \quad \text{y} \\ (C' - \beta h - \beta\gamma)^2 - (\beta^2 - A' - h)(\gamma^2 - D + 2\gamma h) = 0. \end{cases}$$

De la segunda de estas ecuaciones, eliminando $\beta^2$ por medio de la primera, se deduce que

$$\gamma = -h + \frac{C\alpha}{A + h} + \frac{C'\beta}{A' + h};$$

y de la tercera, eliminando por de pronto $\gamma$ con auxilio de la que acaba

de obtenerse, y después, del resultado así obtenido, $\alpha^2$ por medio de la primera, que

$$\left[h^2 + D - \frac{C^2}{A+h} - \frac{C'^2}{A'+h}\right](A' + h - \beta^2) = 0:$$

ó, por ser el segundo de los factores componentes diferente de cero,

$$h^2 + D - \frac{C^2}{A+h} - \frac{C'^2}{A'+h} = 0.$$

Supongamos, por el contrario, que $A' + h - \beta^2$ sea *igual á cero*. Resolviendo entonces la ecuación $f = 0$ por referencia á $x$, lo que es posible, por cuanto los coeficientes en ella de $x^2$ é $y^2$, no pueden ser simultáneamente nulos, hállanse los mismos resultados, renglones antes obtenidos. De manera que las ecuaciones adecuadas á la resolución del problema propuesto, son, en cualquier supuesto, las siguientes:

$$\frac{\alpha^2}{h+A} + \frac{\beta^2}{h+A'} = 1, \tag{7}$$

$$\gamma - \frac{C\alpha}{A+h} - \frac{C'\beta}{A'+h} + h = 0, \tag{8}$$

$$h^2 + D - \frac{C^2}{A+h} - \frac{C'^2}{A'+h} = 0. \tag{9}$$

De la última de estas ecuaciones se desprenden cuatro valores para $h$; y de las otras dos, después, los valores correspondientes de dos de los parámetros, $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$, del círculo pedido, quedando arbitrario el tercero.

Vese, pues, que *existen generalmente cuatro series de círculos bitangentes á la cuártica considerada*, la cual resulta, á su vez, *envolvente de cada una de aquellas cuatro series*.

La ecuación (7) revela además que *los centros de los círculos de cada serie están colocados sobre una cónica, y que las cuatro cónicas así obtenidas son homofocales.*

La ecuación general de los círculos bitangentes á la cuártica considerada se obtiene sustituyendo, en la segunda de las ecuaciones (6), por $\gamma$ su valor, desprendido de la (8); y así resulta esta nueva ecuación:

$$(10)\quad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-2\frac{C\alpha}{A+h}-2\frac{C'\beta}{A'+h}+2h=0.$$

En la cual $\alpha$ designa una función de $\beta$, determinada por (7), y $\beta$ una cantidad arbitraria.

En los casos de ser $C=0$, ó $C'=0$, ó $A=A'$, de la ecuación (9) solamente pueden deducirse tres valores de $h$. Pero, advirtiendo que las ecuaciones $(A)$ quedan satisfechas por los valores $h=-A$ y $\alpha=0$, en el primero de aquellos casos; $h=-A'$ y $\beta=0$, en el segundo; $h=-A$ y $C'\alpha=C\beta$, en el tercero; y por los valores correspondientes de $\gamma$, que de la tercera de aquellas ecuaciones $(A)$ se desprenden, conclúyese que *en los tres casos existe una serie de círculos bitangentes á la cuártica considerada, con los centros respectivamente colocados en las rectas* $x=0$, *ó* $y=0$, *ó* $C'x=Cy$.

**186.** Adviértase también que todos los círculos representados por la ecuación (10), y correspondientes al mismo valor de $h$, cortan ortogonalmente al círculo fijo, que tiene por ecuación

$$(11)\qquad X^2+Y^2+\frac{2CX}{h+A}+\frac{2C'Y}{h+A'}-2h=0;$$

como de ello es fácil cerciorarse, deduciendo de esta ecuación y de la (10) los valores de las derivadas $y'$ é $Y'$, sustituyéndolos en la expresión $y'Y'+1=0$, y fijando la atención en aquellas ecuaciones.

**187.** Pasando ahora á determinar los focos de las *cuárticas bicirculares*, comenzaremos por advertir que su número puede ser previamente obtenido por el método empleado en el Núm. 48, al tratar de los focos de las *cúbicas circulares*, conforme á continuación se indica.

Poniendo en la ecuación de las cuárticas de que ahora se trata $x=\frac{1}{x_1}$ é $y=\frac{y_1}{x_1}$, transfórmase aquella ecuación en otra, que representa una curva de la misma *clase* que cualquiera de las primeras, con *dos puntos dobles* $(0, \pm i)$, correspondientes á los que la curva, en particular considerada, posee en lo infinito. Y como en virtud de un teorema general, mencionado en aquel Núm. 48, se pueden luego trazar á la nueva curva, representando por $n$ su *clase*, $n-2$ tangentes por cada uno de los puntos $(0, \pm i)$,

resulta que la curva propuesta poseerá $n - 2$ tangentes de coeficiente angular $i$, y otras tantas de coeficiente $-i$.

Sentado esto, si la *cuártica* (5) tiene dos *nodos* en lo infinito, por la fórmula de Plücker, consignada en el Núm. 48, será de 8.ª *clase*, y el número de sus tangentes, de coeficiente angular $i$, ascenderá, en consecuencia, á 6; ó solamente á 4, si los puntos de contacto con la curva han de hallarse á distancia finita, en razón de que *dos* de aquellas *seis* tangentes coinciden con las asíntotas.

Del propio modo, ó por los mismos pasos, se concluirá que el número de tangentes, de coeficiente angular $-i$, es también igual á 4. Y como los dos grupos de tangentes consideradas se cortan en 16 puntos, otros tantos serán, por definición, los *focos ordinarios* de la curva á que el razonamiento se refiere.

Si la *cuártica* de que se trata posee *dos puntos de retroceso* en lo infinito, será de 6.ª clase, y sus tangentes, de coeficiente angular $i$ ó $-i$, ascenderán á 4 en cada caso, ó solamente á 3, prescindiendo de la que también es asíntota á la curva: de manera que los puntos de intersección de ambos grupos de tangentes, ó *focos ordinarios*, se reduce entonces á 9.

Con todo lo cual queda demostrado el siguiente teorema:

Las cuárticas bicirculares poseen *diez y seis focos ordinarios*, y entre ellos *cuatro reales*, cuando *los puntos en lo infinito sean dobles; y nueve focos ordinarios, de los cuales son reales tres, en el caso de las cartesianas* (Laguerre, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de París*, 1865, *p.* 70.)

Todos estos focos deben estar en las cónicas, representadas por la ecuación (7), como centros de círculos bitangentes de radio nulo.

De análogo modo: si $(a, b)$ representa un foco, debe existir un valor de $\alpha$ y otro de $\beta$ tales que sean

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\frac{C'\alpha}{A+h} - 2\frac{C'\beta}{A'+h} + 2h = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Y, por consiguiente,

$$\alpha = a; \quad \beta = b, \quad \text{y} \quad a^2 + b^2 = 2h - \frac{2C\alpha}{A+h} - \frac{2C'\beta}{A'+h}.$$

De donde se infiere esta otra ecuación:

$$a^2 + b^2 + \frac{2Ca}{A+h} + \frac{2C'b}{A'+h} = 2h.$$

La cual nos enseña que *los focos correspondientes á cada valor de h deben encontrarse en la intersección de la cónica, correspondiente al valor de h considerado, con la circunferencia del círculo* (11): *resultando por este motivo cuatro focos en cada cónica.* Teorema descubierto por HART (SALMON: *Higher planes curves, 3.ª edición, n.º* 271.)

La doctrina precedente debe modificarse cuando la *cuártica* considerada sea *unicursal,* ó posea *tres puntos dobles.* Porque entonces fácilmente se concluye que la curva tendrá *cuatro focos ordinarios,* si posee tres *nodos; un sólo foco ordinario,* si posee *un nodo y dos puntos de retroceso, ó dos nodos y un punto de este nombre;* y que carecerá de focos ordinarios, *cuando sean tres sus puntos de retroceso.*

Para la determinación de estos focos deben tenerse presentes las observaciones hechas en el Núm. **52**, al tratar de las *cúbicas circulares unicursales.*

**188.** Las cuárticas bicirculares tienen además dos *focos reales singulares* en los puntos de intersección de sus asíntotas, las cuales pueden hallarse aplicando las fórmulas del Núm. **184** á la ecuación (5). Para ecuaciones de estas asíntotas obtiénese entonces:

$$y = \pm ix \pm \sqrt{A - A'}.$$

Y, en consecuencia, las coordenadas de estos focos serán

$$x = 0 \quad \text{é} \quad y = \pm\sqrt{A - A'},$$

si $A > A'$; é

$$y = 0 \quad \text{y} \quad x = \pm\sqrt{A' - A},$$

si $A' > A$.

Luego *estos focos coinciden,* como ya notó por vez primera CASEY, con los focos de la cónica (7).

189. Trasladando el origen de las coordenadas al centro del círculo (11), para lo cual basta poner

$$x = x' - \frac{2C}{h+A} \quad \text{é} \quad y = y' - \frac{2C'}{h+A'},$$

la ecuación (10) se transforma en la siguiente:

$$x'^2 + y'^2 - \frac{4C}{h+A}x' - 2\alpha x' - \frac{4C'}{h+A'}y' - 2\beta y$$
$$+ 2h + \frac{4C^2}{(h+A)^2} + \frac{4C'^2}{(h+A')^2} = 0.$$

Y aplicando al círculo, representado por esta ecuación, la transformación por radios vectores recíprocos, mediante las relaciones

$$x' = \frac{k^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y' = \frac{k^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad \text{y}$$

$$k^2 = 2h + \frac{4C^2}{(h+A)^2} + \frac{4C'^2}{(h+A')^2},$$

obtiénese la siguiente:

$$x_1^2 + y_1^2 - \frac{4Cx_1}{h+A} - 2\alpha x_1 - \frac{4C'y_1}{h+A'} - 2\beta y_1$$
$$+ 2h + \frac{4C^2}{(h+A)^2} + \frac{4C'^2}{(h+A')^2} = 0,$$

que coincide con aquella primera de donde procede.

Los círculos de que la cuártica bicircular es envolvente no varían, pues, por resultado de la transformación considerada, ni varía tampoco su envolvente, que, por esta razón, debe mirarse como una *analagmática*, relativamente á los cuatro centros de los círculos representados por la ecuación (11).

190. Terminaremos lo que nos parece substancial advertir á propósito

de las cuárticas bicirculares, determinando los focos de las *cartesianas*, y demostrando que *tres de estos focos se hallan en línea recta.*

Poniendo $A = A'$ la ecuación (5) podrá escribirse de este modo:

$$(x^2 + y^2 - 2A)^2 = 4(2Cx + 2C'y + A^2 + D).$$

Ecuación de la forma

$$V^2 = 4U:$$

según la cual, la curva á que se refiere es la envolvente de las circunferencias representadas por esta otra:

$$4t^2 - 2Vt + U = 0,$$

cuyos centros están sobre la recta definida por la ecuación $C'x = Cy$: conforme puede verse hallando las coordenadas de estos centros, y eliminando luego la $t$ entre las ecuaciones que las determinan.

Poniendo ahora $4t^2 - 2Vt + U = B^2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$, para determinar $x_0$, $y_1$, $B^2$ y $t$, dispondremos de estas ecuaciones:

$$B^2 = -2t, \quad C = -B^2 x_0, \quad C' = -B^2 y_0, \quad \text{y}$$
$$4(t^2 + At) + A^2 + D = B^2(x_0^2 + y_0^2):$$

de las cuales se concluye que ha de ser

$$8(t^3 + At^2) + 2(A^2 + D)t + (C^2 + C'^2) = 0.$$

Por medio de esta ecuación determínanse los valores de $t$; y los de $x_0$, $y_0$ y $B^2$ con auxilio de las tres anteriores. Con lo cual queda probado que existen tres valores de $t$ que reducen á simples puntos las circunferencias consideradas, y, por lo tanto, que existen tres focos sobre la recta que acaba de mencionarse.

Añadiremos, para concluir, que en este caso la ecuación (9) se reduce á la siguiente:

$$(h^2 + D)(h + A) - C^2 - C'^2 = 0.$$

Para los valores de $h$ que satisfacen á esta ecuación, la (7) representa círculos: luego la curva tiene los seis focos restantes en las intersecciones de estos círculos con aquellos otros á que la (11) se refiere.

Tratándose de los *óvalos de Descartes*, $C' = 0$; y entonces los tres *focos* coinciden con el eje de las abscisas.

**191.** Casey demostró que la longitud de los arcos de las cuárticas bicirculares puede expresarse por integrales elípticas, cuyos módulos son, en algunos casos, imaginarios *(Phylosophical Transactions of Royal Society, London, t.* 167). Siendo de advertir que, cuando esto sucede, la longitud de aquellos arcos puede también representarse por integrales hiperelípticas de primera especie, conforme enseñó R. A. Roberts *(Proceedings of the London mathematical Society,* 1886, *p.* 99).

# CAPÍTULO QUINTO

## CUÁRTICAS NOTABLES

(Continuación).

### I

### LA CONCOIDE DE NICOMEDES

**192.** Sean $O$ (fig. 51) un punto fijo, y $AB$ una recta dada, perpendicular al eje de las abscisas. Trazando la recta $OC$, y tomando, á partir de $C$, las longitudes $CM$ y $CN$, iguales á una cierta longitud $h$, obtiénense dos puntos, $M$ y $N$. Y el lugar geométrico descrito por $M$ y $N$, cuando $OC$ varía de posición, recibe el nombre de *Concoide de Nicomedes*, y tiene por ecuación en coordenadas polares, designando por $a$ la distancia $OD$,

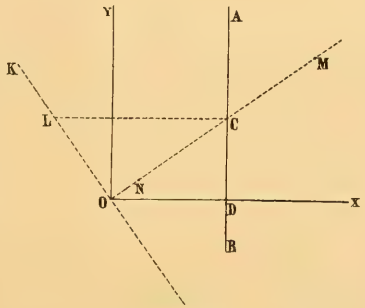


Figura 51.

$$(1)\quad \rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm h:$$

en la cual el signo superior corresponde á los puntos de la curva situados á la derecha de $AB$, y el inferior á los situados á la izquierda, admitiendo que $\theta$ varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $+\frac{\pi}{2}$.

El punto fijo $O$ recibe el nombre de *polo de la concoide;* el de *base* la recta $AB$; y el segmento $h$ el de *intervalo.*

La ecuación que corresponde al signo inferior puede también escribirse de este modo:

$$-\rho = \frac{a}{\cos(\pi + \theta)} + h.$$

Luego la

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + h$$

representará todos los puntos de la curva colocados á uno y otro lado de la recta $AB$, si suponemos que $\theta$ puede variar desde 0 hasta $2\pi$. Pero aquí nos atendremos á la (1).

De la cual se deduce la siguiente, expresada en coordenadas cartesianas:

$$y^2 = \frac{x^2 (h + a - x)(h - a + x)}{(x - a)^2}.$$

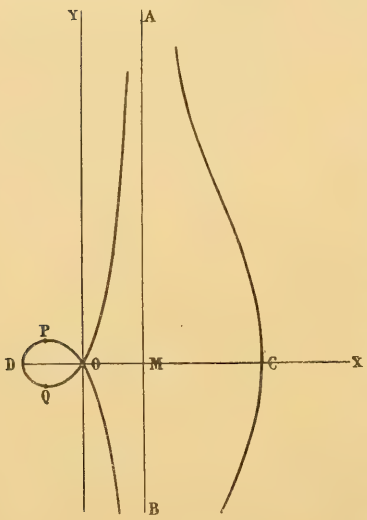


Figura 52.

193. Para hallar la forma de la curva, consideraremos separadamente los casos de ser $h > a$, $h = a$, $h < a$.

Caso 1.°—Si $h > a$ (figura 52), la curva será simétrica relativamente al eje de las abscisas, y pasará por el punto $C$, cuya abscisa, $OC$, es igual á $a + h$; por el $O$, origen de las coordenadas; y por el $D$, cuya abscisa $OD$ es igual en valor absoluto á $h - a$: hallándose por completo comprendida en la región del plano limitado por las rectas paralelas al eje de las ordenadas que pasan por los puntos $C$ y $D$.

Cuando $x$ tiende hacia $a$, $y$ tiende hacia lo infinito: luego la recta $AB$, que tiene por ecuación $x = a$, es *asíntota* de la curva.

Por ser

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{a \pm h \cos^3 \theta}{h \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta}$$

en los puntos $C$ y $D$, donde $\theta = 0$, las tangentes á la curva son paralelas al eje de las ordenadas. Y en el punto $O$, donde $\rho = 0$ y $\cos\theta = \frac{a}{h}$,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a};$$

igualdad que determina las tangentes á la curva en $O$, *punto doble* de la misma.

Así como por ser $\frac{dy}{dx} = 0$, cuando $\cos\theta = \sqrt[3]{\frac{a}{h}}$, vese que la curva posee dos puntos, $P$ y $Q$, en donde el valor absoluto de las ordenadas es máximo.

Caso 2.°—Si $h = a$, la distancia $OD = h - a$ se reduce á 0, y la curva adquiere la forma indicada en la figura 53. Y por ser en el punto $O$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a} = 0,$$

este punto lo será de *retroceso*, y las tangentes en él á la curva coincidirán con el eje de las abscisas.

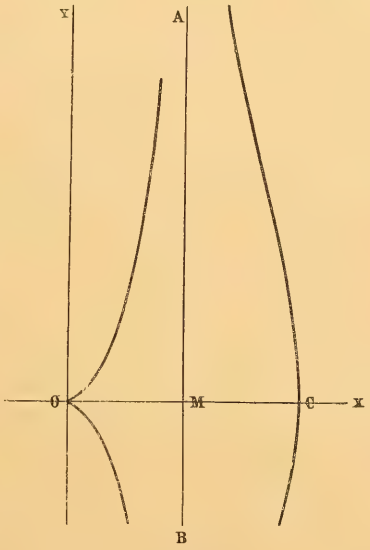


Figura 53.

Caso 3.°—Sea $h < a$. Procediendo como en los casos anteriores, se concluye sin dificultad que la curva posee la forma indicada en la figura 54,

siendo entonces $OC = a + h$ y $OD = a - h$. En los puntos $C$ y $D$ la tangente resulta perpendicular al eje de las abscisas, y la recta $AB$, que tiene por ecuación $x = a$, será asíntota de la curva. Curva en este caso desprovista de puntos máximos y mínimos en el sentido de las ordenadas, pero que posee uno *aislado* en el origen $O$.

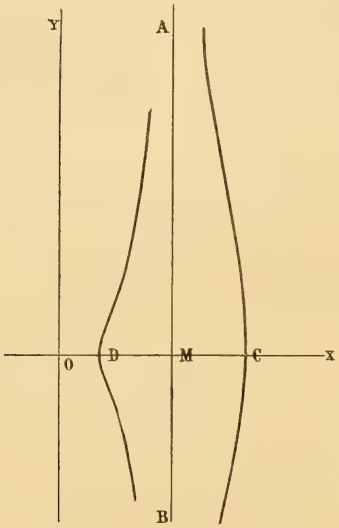


Figura 54.

**194.** La construcción de las normales á la concoide de Nicomedes es operación muy sencilla. Advirtiendo que (fig. 51)

$$\rho = OM = OC \pm h,$$

se deduce que

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{dOC}{d\theta}.$$

Luego las subnormales polares de la curva en los puntos $M$ y $N$ coinciden con la subnormal polar de la recta $AB$ en el punto $C$. De manera que para trazar la normal á la concoide en los puntos $M$ y $N$ bastará trazar la recta $OK$, perpendicular á $OM$, y por el punto $C$ la recta $CL$, perpendicular á $AB$: las normales pedidas pasan por el punto $L$.

**195.** Para determinar los puntos de inflexión de la curva, aplicaremos á la ecuación (1) la fórmula conocida

$$\rho^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 0,$$

y así hallaremos esta otra:

$$h\cos^3\theta \pm 3a\cos^2\theta \mp 2a = 0,$$

por medio de la cual se determinan los valores de $\theta$ á que corresponden los puntos mencionados. Mas para la fácil construcción de estos puntos conviene hallar los de la recta $AB$ (fig. 51), de los cuales se deducen los de inflexión, mediante la construcción expuesta en el Núm. **192**. Y para esto advirtamos que, representando por $\rho_1$ los radios vectores de los puntos de la recta $AB$, que tiene por ecuación $\rho_1 = \frac{a}{\cos\theta}$, por eliminación de $\cos\theta$ entre esta ecuación y la anterior se deduce la que sigue:

$$2\rho_1^3 - 3a^2\rho_1 \mp a^2 h = 0,$$

que determina los valores de $\rho_1$ en los puntos de la recta á que corresponden puntos de inflexión en la curva. Siendo de advertir que de las raíces de esta ecuación deben utilizarse solamente las comprendidas entre $a$ é $\infty$, por ser las únicas á que corresponden puntos de la recta $AB$.

Para determinar el número de puntos de inflexión *reales* que tiene la concoide, consideremos separadamente los tres casos de ser $h > a$, $h = a$, y $h < a$.

Caso 1.º—Sea $h < a$. Aplicando el teorema de Sturm á la ecuación

$$2\rho_1^3 - 3a^2\rho_1 - a^2 h = 0,$$

esto es, formando los polinomios de Sturm, correspondientes á esta ecuación

$$2\rho_1^3 - 3a^2\rho_1 - a^2 h; \quad 6\rho_1^2 - 3a^2; \quad 2a^2\rho_1 + a^2 h; \quad \text{y} \quad 3a^2 - \frac{3}{2}h^2,$$

y determinando los signos de estos polinomios, cuando $\rho = a$ y $\rho = \infty$, dedúcense estas dos series de signos:

$$\begin{array}{llllll} \rho = a & - & + & + & + \\ \rho = \infty & + & + & + & +. \end{array}$$

Luego la rama de la curva, situada á la derecha de la recta $AB$, tiene dos puntos de inflexión *reales*.

Y, aplicando el mismo teorema á la ecuación

$$2\rho_1^3 - 3a^2\rho_1 + a^2 h = 0,$$

conclúyese por el mismo procedimiento que también existen otros dos puntos reales de inflexión en la rama situada á la izquierda.

Caso 2.°—Si es $h > a$, por medio del mismo teorema de Sturm, se verá que existen dos puntos de inflexión en la rama situada á la derecha de $AB$, y que no existen puntos de este nombre en la otra rama.

Caso 3.°—Y si es $h = a$, la ecuación de que se trata se convertirá en esta otra:

$$2\rho_1{}^3 - 3a^2\rho_1 - a^3 = 0,$$

que tiene por raíces

$$\rho_1 = -a, \quad \text{y} \quad \rho_1 = \frac{a}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Y entonces solamente á la raíz $\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ corresponden puntos de la recta $AB$: de los cuales se derivan, por la construcción del Núm. **192**, dos puntos de inflexión reales, situados en la rama de la curva colocada á la derecha de $AB$.

Por referencia á la otra rama tenemos la ecuación

$$2\rho_1{}^3 - 3a^2\rho_1 + a^3 = 0,$$

cuyas raíces son éstas:

$$\rho_1 = a, \quad \text{y} \quad \rho_1 = \frac{a}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Luego la rama de la izquierda carece de puntos del mencionado nombre.

**196.** Adviértase que la curva de que se trata es *unicursal;* pues suponiendo en su ecuación cartesiana que

$$-(x + h - a) = (x - h - a)\,t^2, \quad \text{ó}$$

$$x = \frac{a - h + (a + h)\,t^2}{1 + t^2},$$

hállase inmediatamente que

$$y = -\frac{2t\,[a - h + (a + h)\,t^2]}{t^4 - 1}.$$

**197.** El área $A$, descrita por el radio vector de la curva, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\theta$, se desprende de la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \rho^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\left[a^2 \operatorname{tang}\theta + h^2\theta \pm 2ah \log \operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

**198.** El descubrimiento de la *concoide* se atribuye á NICOMEDES, geómetra que floreció entre los 100 y 200 años antes de Cristo (CANTOR: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, t.* I, *Leipzig,* 1894, *p.*s 334 y 346). Los escritos de Nicomedes no han llegado hasta nuestros días; pero á la invención de la concoide se refieren PROCLO en sus *Comentarios* y PAPPO en sus *Colecciones Matemáticas:* obra, la última, que contiene un procedimiento para construir la concoide *(Obras de Pappo, ed. Hultsch, p.* 242), así como la resolución, valiéndose de esta curva, del problema de la trisección del ángulo (l. c., p. 274), que Proclo *(Obras, ed. Taylor, t.* II, *p.* 73) atribuye al propio Nicomedes, y resolución también del *problema de Delos,* que tiene por objeto determinar *dos medias proporcionales* entre dos rectas dadas *(Obras de Pappo, ed. Hultsch, p.* 58 y *p.* 246). Al uso de la concoide para resolver este último problema se refiere asimismo EUTOCIO en sus *Comentarios al libro 2.° de Arquímedes sobre la Esfera y el Cilindro (Obras de Arquímedes, ed. Heiberg, t.* III, *p.* 122).

En la época moderna, del renacimiento de las Ciencias en Europa, muchos y muy distinguidos geómetras volvieron á tratar de la *concoide:* como FERMAT, que determinó sus tangentes en una carta á Roberval de 1636 *(Oeuvres de Fermat, t.* III, *p.* 142 y *p.* 293); DESCARTES, en el libro 2.° de su *Geometría,* donde estableció también un método para determinar las mismas líneas; HUYGENS, los puntos de inflexión, en carta á SCHOOTEN, de 1653 *(Oeuvres, t.* I, *p.* 245), y en su memoria del año 1654, titulada *De circuli magnitudine inventa (Opera varia, t.* II, 1724); el mismo SCHOOTEN, que propuso nuevo modo de hallar estos puntos en sus *Comentarios* á la *Geometría de Descartes* (1654); NEWTON, que demostró el importante papel que esta curva desempeña en la resolución de los problemas dependientes de ecuaciones del 3.° y del 4.° grado *(Arithmetica Universalis, p.* 52 y siguientes del *tomo* II de la traducción francesa de *Beaudeaux);* ROBERVAL *(Mémoires de l'Académie des Sciences de Pa-*

*ris,* 1730, *p.* 32 y 289), que insistió en la determinación de sus tangentes y sus áreas; y WALLIS *(De curvarum rectificatione et complanatione,* 1659), y JUAN BERNOULLI *(Opera, t.* III, *p.* 400), que asimismo se aplicaron á la resolución del segundo problema: etc., etc.

**199.** A propósito de la *concoide de Nicomedes,* réstanos exponer compendiosamente los procedimientos á que antes aludimos, empleados por los antiguos geómetras, para resolver, apoyándose en las propiedades de aquella curva, el problema de la *trisección del ángulo,* y el de *Delos* (véase página 2, al tratar de la *cisoide),* ó de las dos *medias proporcionales* entre dos líneas dadas.

1.° Comencemos por el de la *trisección,* y sea (fig. 55) $ABC$ el ángulo, que se trata de dividir en tres partes iguales.

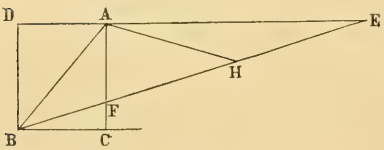


Fig. 55.

Por el punto $A$ hágase pasar la recta $AC$, perpendicular á la $BC$; y las $AD$ y $BD$, paralelas á las $BC$ y $AC$, por los puntos $A$ y $B$. Y, tras de esto, trácese asimismo la *concoide,* que tenga por *polo* el punto $B$, por *base* la $AC$, y por *intervalo* el doble de $AB$; y sea $E$ el punto de su intersección con la $DA$ prolongada. Pues si unimos el punto $E$ con el $B$, nos resultará el ángulo $EBC$, precisamente igual á la tercera parte del $ABC$, que se trata de trisecar.

Porque, en efecto, si $F$ representa el punto en que la línea $BE$ corta á la $AC$, y $H$ el punto medio de la $FE$, resulta que $FH = HE = AH$; y, por lo tanto, que $FE = 2AH$. Y como, por definición de la *concoide,* es también $FE = 2BA$, dedúcese de aquí que $BA = AH$; y, en consecuencia, $ABH = AHB = 2AEB = 2FBC$. Ó, finalmente, $ABC = 3FBC$.

2.° Ocupémonos ahora en la resolución del problema de *Delos:* ó, designando por $a$ y $b$ dos segmentos de recta conocidos, busquemos otros dos, $x$ é $y$, tales que entre ellos existan las siguientes relaciones:

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$

Para esto consideremos dos rectas, una á otra perpendiculares, $NA$ y $AM$ (fig. 56), y sobre ellas señalemos los dos segmentos, $AB$ y $AC$, respectivamente iguales á los $a$ y $b$.

Por los puntos $B$ y $C$ tracemos las paralelas $BD$ y $CD$ á las $AC$ y $AB$; y por los puntos medios de estas rectas, $E$ y $F$, las $DG$ y $FH$, perpendicular la última á la $AC$, y sobre la cual ha de señalarse el punto $H$, de manera que sea $CH = BE$. Y por el $C$ trácese, finalmente, la recta $CH'$, paralela á la $GH$.

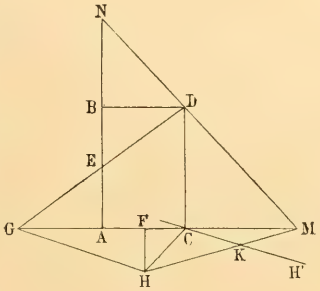


Figura 56.

Tras de esto, constrúyase la *concoide*, que tenga por *polo* el punto $H$ y por *base* la $CH'$, y cuyo *intervalo* sea igual á $BE$; y designemos por $M$ el punto donde la curva corta á la recta $AC$, prolongada en caso necesario: punto que debe satisfacer á la condición $KM = BE = HC$, y que, unido con el $D$, determina la recta $MDN$ y los segmentos $NB$ y $MC$, que son precisamente los que se buscan, $x$ é $y$.

Para demostrarlo, advirtamos que

$$\overline{FM}^2 = (FC + CM)^2 = \overline{FC}^2 + CM \times AM,$$

y, por lo tanto, que

$$\overline{FM}^2 + \overline{FH}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{FH}^2 + CM \times AM : 6$$

$$(A) \qquad \overline{HM}^2 = \overline{HC}^2 + CM \times AM.$$

También del examen de la figura se deduce que

$$\frac{NB}{BA} = \frac{AC}{CM};$$

y, por cuanto $BA = 2BE$ y $GC = 2AC$, de esta última igualdad, en

virtud de la semejanza de los triángulos $MGH$ y $MCK$, se infiere la que sigue:

$$\frac{NB}{BE} = \frac{GC}{CM} = \frac{HK}{KM};$$

ó esta otra:

$$\frac{NB + BE}{BE} = \frac{HK + KM}{KM}, \quad \text{ó} \quad \frac{NE}{BE} = \frac{HM}{KM}.$$

De donde, advirtiendo que $BE = KM$, resulta, finalmente, que $NE = HM$. Y, por lo tanto,

$$(A') \qquad \overline{HM}^2 = \overline{NE}^2 = (NB + BE)^2 = \overline{BE}^2 + NB \times NA.$$

Comparando las expresiones $(A)$ y $(A')$, y recordando que, por construcción, $HC = BE$, hállase también que

$$CM \times AM = NB \times NA, \quad \text{ó} \quad \frac{AM}{NA} = \frac{NB}{CM}.$$

Pero, según manifiesta la figura,

$$\frac{CM}{DC} = \frac{AM}{NA} = \frac{BD}{NB}.$$

Luego

$$\frac{CM}{DC} = \frac{NB}{CM} = \frac{BD}{NB}. \quad \text{Ó} \quad \frac{CM}{a} = \frac{NB}{CM} = \frac{b}{NB}.$$

Ó, si $NB = x$ y $CM = y$,

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{y} = \frac{b}{x},$$

conforme se quería demostrar.

## II

### LA PARABOLA VIRTUALIS

**200.** La curva que tiene por ecuación

$$(x^2 - by)^2 = a^2(x^2 - y^2), \tag{1}$$

fué por primera vez considerada por G. SAINT-VINCENT, de quien recibió el nombre de *parabola virtualis (Opus geom.*, 1647); poco tiempo después por SLUSE y HUYGENS, en la correspondencia matemática que uno con otro sostuvieron; y posteriormente por CRAMER en su célebre *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes (Genève*, 1750, *p.* 451), designándola con el de *besace (bis-sáccus: alforja).*

**201.** La ecuación (1) muestra inmediatamente que el eje de las ordenadas es también eje de simetría de la curva.

Resolviendo la ecuación por referencia á $y$, resulta

$$y = \frac{bx^2 \pm ax\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{a^2 + b^2}; \tag{2}$$

y, por lo tanto,

$$y' = \frac{2bx}{a^2 + b^2} \pm \frac{a(a^2 + b^2 - 2x^2)}{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}.$$

De donde se desprenden las conclusiones siguientes:

1.ª El origen de las coordenadas es un *punto doble* de la curva; y las tangentes en este punto se hallan determinadas por la ecuación

$$y' = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

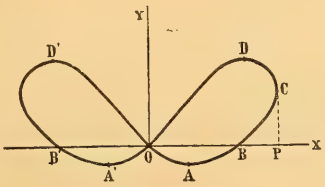


Figura 57.

2.ª En el intervalo de $x = 0$ á $x = OP = \sqrt{a^2 + b^2}$ (fig. 57), á cada valor de $x$ corresponden dos valores reales de $y$: uno positivo y otro negativo, en el intervalo de $x = 0$ á $x = OB = a$, en donde es $y = 0$; y ambos positivos, en el intervalo de $x = a$ á $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3.ª Cuando $x > \sqrt{a^2 + b^2}$, $y$ es imaginario. Y en el punto $C$, donde a abscisa es igual á $\sqrt{a^2 + b^2}$, $y = PC = b$, é $y' = \infty$.

Para determinar los puntos en que las ordenadas pasan por un valor máximo ó mínimo, basta atender á la igualdad

$$y' = \frac{-2x^3 + a^2 x + 2bxy}{(a^2 + b^2)y - bx^2};$$

de la cual, poniendo $y' = 0$, se desprende que $2by + a^2 - 2x^2 = 0$. Y eliminando después la $x$, entre esta ecuación y la de la curva, se deduce que, en los puntos de que se trata,

$$y = \frac{b \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Ecuación que determina dos paralelas al eje de las abscisas, tangentes á la curva en los puntos $D$ y $D'$, y $A$ y $A'$, en que el valor absoluto de $y$ es máximo. Las abscisas correspondientes á estos cuatro puntos resultan determinadas por la expresión

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(a^2 + b^2) \pm b\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La ecuación (2) muestra que la parábola cuya ecuación es

$$y = \frac{b}{a^2 + b^2} x^2,$$

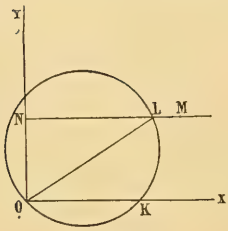


Figura 58.

divide por mitad todas las cuerdas de la *parabola virtualis*, paralelas al eje de las abscisas.

**202.** Cramer propuso el siguiente método, muy sencillo, para construir la *parabola virtualis*. Trácense la circunferencia $OKLO$ (fig. 58) y la cuerda variable $OL$, que pasa por un punto fijo de esta circunferencia, adoptado como origen de las

coordenadas. Por el punto $L$ tírese después la recta $LN$, paralela al eje de las abscisas, y tómese sobre ella el segmento $NM$ igual á $OL$. El lugar descrito por $M$, cuando $OL$ varíe de dirección, será la *parabola virtualis*.

Representemos, en efecto, por

$$X^2 + Y^2 - aX - bY = 0$$

la ecuación del círculo considerado, y por $x$ é $y$ las coordenadas del punto $M$, y tendremos:

$$\overline{OL}^2 = X^2 + Y^2 = \overline{NM}^2 = x^2, \quad \text{é} \quad y = Y;$$

y, por lo tanto, eliminando $X$ é $Y$ en la ecuación del círculo, por medio de estas últimas, concluiremos que

$$(x^2 - by)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

**203.** La determinación de los *puntos de inflexión* de la curva depende de una ecuación de tercer grado, conforme veremos ahora.

Derivando, en efecto, la expresión de $y'$, poco antes encontrada, relativamente á $x$, hállase que

$$y'' = \frac{2b}{a^2 + b^2} \mp \frac{ax}{a^2 + b^2} \cdot \frac{3(a^2 + b^2) - 2x^2}{(a^2 + b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

E igualando este valor de $y''$ á cero,

$$4b^2 (a^2 + b^2 - x^2)^3 = a^2 x^2 [3(a^2 + b^2) - 2x^2].$$

Ecuación de tercer grado, por relación á $x^2$, que dará *tres* valores para esta cantidad, ó *seis* para $x$, de dos en dos iguales y de signos contrarios. A cada valor de $x$ corresponderán dos valores de $y$, determinados por la ecuación (2): uno referente al *punto de inflexión*, y otro al segundo punto de la curva, que tiene la misma abscisa que el primero.

**204.** La *parabola virtualis* es *curva unicursal*.

Porque si en la ecuación (2) se pone

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

inmediatamente se concluye que

$$y = \frac{b\,(t^2-1)^2 \pm 2at\,(t^2-1)}{(t^2+1)^2}.$$

**205.** Para hallar el área $A$, limitada por una de las ramas de la *parabola virtualis*, emplearemos la fórmula

$$A = \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{bx^2 + ax\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{a^2+b^2}\,dx - \int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{bx^2 - ax\sqrt{a^2+b^2-x^2}}{a^2+b^2}\,dx:$$

de la cual se deduce que

$$A = \frac{1}{3}\,a\sqrt{a^2+b^2}.$$

Luego *esta área es igual á la tercera parte de la de un rectángulo, de lados iguales á las abscisas de los puntos B y C.*

**206.** Si en la ecuación (1) se supone que $b = 0$, se hallará esta otra:

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2),$$

correspondiente á una *parabola virtualis especial*, denominada por Gabriel Marie *(Exercices de Géométrie Descriptive) lemniscata de Gerono*, en memoria del matemático de este nombre, que la estudió en su *Cours de Géométrie Analytique*, y á la cual Aubry *(Journal de Mathématiques Spéciales*, 1895, *pág.* 267) denominó el *ocho*, en atención á su forma, representada en la figura 59, aunque preferible acaso hubiera sido llamarla entonces *parabola virtualis recta*, reservando el calificativo de *oblicua* á cualquiera de las obtenidas en los otros supuestos, ó cuando fuere $b \gtrless 0$.

La curva á que ahora en particular nos referimos puede trazarse por el método general indicado en el Núm. **201**, tomando como base de construcción una recta paralela á la $OK$, que pase por el centro del círculo, y también por este otro procedimiento.

Desde el punto $O$ (fig. 59), y con el radio $OA = a$, descríbase la circunferencia $ABA_1B_1$, y por el $A$ la tangente $AT$, sobre la cual se fijará

el $D$, á distancia del eje de las abscisas, inferior al radio. Trácese luego por $D$ la paralela $DN$ al mismo eje; y por el $C$, de intersección de esta paralela con la circunferencia, bájese la ordenada $CP = DA$, que cortará á la recta $OD$ en el $M(x, y)$, correspondiente al *ocho*.

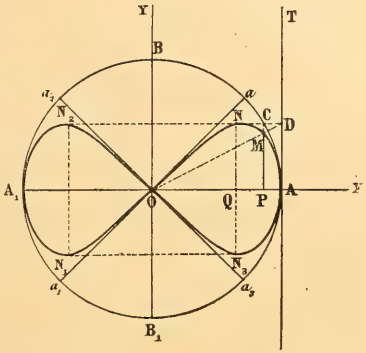



Figura 59.

En efecto: de la comparación de los triángulos $OPM$ y $OAD$ inmediatamente resulta que el lugar geométrico, así construído, tiene por ecuación, deducida de la igualdad $\frac{OP}{PM} = \frac{OA}{CP}$, la siguiente:

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2):$$

como se dedujo de la (1), en el supuesto de ser $b = 0$.

Diferenciando dos veces la última ecuación, hállase que

$$y' = \frac{a^2 - 2x^2}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{é} \quad y'' = \frac{x(3a^2 - 2x^2)}{a(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De manera que si $x = \pm a$, $y' = \infty$; si $x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y' = 0$ é $y = \pm \frac{a}{2}$; y si $x = 0$, $y'' = 0$.

Lo cual quiere decir: 1.°, que la curva es tangente á la circunferencia en los puntos $A$ y $A_1$; 2.°, que en los

$$N \text{ y } N_3\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{2}\right), \text{ y } N_2 \text{ y } N_1\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{2}\right),$$

de ordenada *máxima* en absoluto, las tangentes á la curva son paralelas al eje de las abscisas; y 3.°, que el origen $O$ de las coordenadas es un punto *doble* de *inflexión*, en el cual las tangentes á la curva, $aa_1$ y $a_2a_3$, for-

man con el eje de las abscisas ángulos iguales á 45°. La curva tiene además cuatro puntos de inflexión imaginarios, correspondientes á las abscisas $\pm a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

## III

### LA CRUCIFORME (KREUZCURVE)

**207.** Consideremos la elipse que tiene por ecuación

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,$$

y por tangente en el punto $(X, Y)$ la representada por esta otra:

$$a^2 Y(y-Y)+b^2 X(x-X)=0.$$

Tangente que corta á los ejes en dos puntos, definidos por las coordenadas

$$\left[x=0,\ \text{é}\ y=Y+\frac{b^2 X}{a^2 Y}=\frac{b^2}{Y}\right]\ \text{y}\ \left[x=X+\frac{a^2 Y}{b^2 X}=\frac{a^2}{X},\ \text{é}\ y=0\right].$$

Trazando por estos puntos dos paralelas á los ejes de la elipse, determínase otro, $M$, cuyas coordenadas, $x$ é $y$, serán

$$x=\frac{a^2}{X},\quad \text{é}\quad y=\frac{b^2}{Y}.$$

Y el lugar geométrico descrito por este punto, cuando la tangente varía, es la *cuártica*, denominada *cruciforme (kreuzcurve)*, cuya ecuación,

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1,$$

resulta de la eliminación de las $X$ é $Y$, entre las ecuaciones precedentes y la de la elipse, de donde la nueva curva se deriva.

Las propiedades de la *cruciforme* fueron estudiadas por SCHOUTE en dos trabajos importantes, publicados, el primero, en las *Actas de la Aca-*

*demia de Amsterdam (2.ª serie, t.* XIX, 1883, *p.* 420), y el segundo en los *Archiv der Mathematik und Physik, Leipzig, 2.ª serie, t.* II, *p.* 113; *t.* III, *p.* 113; *t.* IV, *p.* 308; y *t.* VI, *p.* 113, en los cuales el ilustre geómetra holandés trata extensamente del grupo de curvas de 4.º orden, dotadas de tres puntos dobles de inflexión: grupo á que pertenece la *cruciforme*, así denominada por el mismo SCHOUTE en el último de los trabajos mencionados, y desde entonces por este nombre conocida. Antes, sin embargo, de que las investigaciones de SCHOUTE diesen importancia á la curva de que tratamos, ya había sido ésta considerada por TERQUEM *(Nouvelles Annales des Mathématiques,* 1847, *p.* 394), quien la definió como *polar recíproca de la evoluta de la elipse*, relativamente al círculo que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$; y también por J. BOOTH *(A Treatise on some New Geometrical Methods, London, t.* I, 1873, *p.* 145), que expresó su ecuación en coordenadas tangenciales.

**208.** La forma de la *cruciforme* se obtiene muy fácilmente por medio de las ecuaciones

$$y = \frac{bx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad y' = -\frac{a^2 b}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y'' = \frac{3a^2 bx}{(x^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3a^2 y}{(x^2 - a^2)^2}.$$

Las cuales demuestran que la curva se compone de cuatro ramas iguales (figura 60), simétricamente distribuídas relativamente á los ejes coordenados, y que se extienden indefinidamente en dos direcciones distintas, sin puntos en que las ordenadas ó las abscisas pasen por valores máximos ó mínimos. En cambio, las rectas $AB$, $A'B'$, $CD$, $C'D'$, cuyas ecuaciones son $x = \pm a$ é $y = \pm b$, son asíntotas de las cuatro ramas constitutivas de la curva.

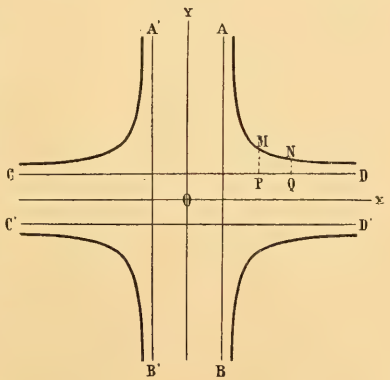



Figura 60.

El origen de las coordenadas es un *punto aislado* de la misma curva, y por ser en este punto $y'' = 0$, la curva posee en él una *inflexión imaginaria.*

Las asíntotas, paralelas al eje de las abscisas, se cortan en lo infinito, y determinan un *punto doble* de la curva; así como las paralelas al eje de las ordenadas determinan otro. Y como tambien $y'' = 0$, cuando $x = \infty$ y cuando $y = \infty$, conclúyese que *son de inflexión ambos puntos.*

**209.** Fácil es ver, además, que la subnormal de la curva considerada, en el punto $(x, y)$, está dada por la ecuación

$$yy' = \frac{x(y^2 - b^2)}{a^2 - x^2};$$

y que la ordenada, $Y$, del punto donde la tangente corta al eje de las ordenadas tiene por expresión

$$Y = \frac{x^2 y}{x^2 - a^2}.$$

Fórmulas estas dos que permiten construir la tangente y la normal á la *cruciforme* en un punto cualquiera.

Existe, sin embargo, otro método que permite, con mayor facilidad que el apuntado, trazar las tangentes á la curva: método relacionado con el de construcción de la *cruciforme,* expuesto en el Núm. **207**, y que se funda en el teorema siguiente:

*Las tangentes á la elipse en el punto* $(X, Y)$, *y á la cruciforme en el correspondiente* $(x, y)$, *se cortan en un punto de la recta que une el centro de la elipse con el punto* $(X, -Y)$.

En efecto: la primera tangente tiene por ecuación

$$y_1 - Y = -\frac{b^2 X}{a^2 Y}(x_1 - X);$$

y la tangente á la cruciforme en el punto $(x, y)$, correspondiente al $(X, Y)$, esta otra:

$$y_1 - y = -\frac{a^2 y^3}{b^2 x^3}(x_1 - x).$$

Ó, sustituyendo por $x$ é $y$ sus valores, expresados en función de $X$ é $Y$, esta otra:

$$y_1 - \frac{b^2}{Y} = -\frac{b^4 X^3}{a^4 Y^3}\left(x_1 - \frac{a^2}{X}\right).$$

Con auxilio de la ecuación de la elipse, las ecuaciones de las dos tangentes consideradas se pueden también escribir de este otro modo:

$$a^2 Y y_1 + b^2 X x_1 = a^2 b^2, \quad \text{y}$$
$$a^4 Y^3 y_1 + b^4 X^3 x_1 = a^4 b^4.$$

De las cuales resulta la siguiente, por substracción ordenada de sus miembros, después de multiplicados los de la primera por $a^2 b^2$:

$$a^4 Y (b^2 - Y^2) y_1 + b^4 X (a^2 - X^2) x_1 = 0.$$

Ecuación á que deben satisfacer las coordenadas $x_1$ é $y_1$ del punto en que ambas tangentes se cortan.

Mas, por ser

$$b^2 - Y^2 = \frac{b^2 X^2}{a^2} \quad \text{y} \quad a^2 - X^2 = \frac{a^2 Y^2}{b^2},$$

la precedente ecuación se reduce á la forma

$$X y_1 + Y x_1 = 0,$$

y demuestra que el punto $(x_1, y_1)$ corresponde á la recta que pasa por el origen de las coordenadas, ó centro de la elipse en este caso, y el punto $(X, -Y)$: conforme en el enunciado del teorema se afirmó.

**210.** El radio de curvatura de la *cruciforme* se halla determinado por la fórmula

$$R = \frac{(b^4 x^6 + a^4 y^6)^{\frac{3}{2}}}{3 a^2 b^2 x^5 y^5}.$$

Ó por esta otra, más compendiosa, llevando en cuenta el valor de la *normal:*

$$R = \frac{N^3 b^4 x^4}{3 a^2 y^8}:$$

en la cual $N$ representa la longitud de la normal trazada por el punto á que el radio $R$ corresponde.

**211.** Consideremos ahora la hipérbola equilátera, que pasa por el punto $(x, y)$ de la *cruciforme,* y cuya ecuación es

$$XY - b^2 \frac{X}{y} - a^2 \frac{Y}{x} = 0,$$

representando por $X$ é $Y$ las coordenadas de los puntos de la hipérbola.

Escribiendo esta ecuación como sigue

$$Y = b^2 \frac{x}{y} (x - a^2 X^{-1})^{-1},$$

y derivándola dos veces, resulta

$$Y' = -\frac{b^2 a^2 x}{y} (xX - a^2)^{-2} \quad \text{é} \quad Y'' = \frac{2 b^2 a^2 x^2}{y} (aX - a^2)^{-3}.$$

Si en estas ecuaciones se supone que $X = x$, poniendo además por $y$ su valor, en función de $x$, hállase también que

$$Y' = -\frac{a^2 b}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{é} \quad Y'' = 2 a^2 b x (x^2 - a^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Y, comparando este valor de $Y'$ con el anteriormente obtenido de $y'$, adviértese que ambos valores son iguales. Luego la hipérbola considerada es tangente á la *cruciforme* en el punto $(x, y)$.

El radio de curvatura de la hipérbola en el punto $(x, y)$ tiene por expresión

$$R_1 = \frac{N^3}{y^3 Y''}.$$

Pero como

$$Y'' = \frac{2}{3}\, y'',$$

resulta, en conclusión, que

$$R = \frac{N^3}{y^3\, y''} = \frac{2}{3}\, R_1.$$

Luego *la razón del radio de curvatura de la cruciforme al de la hipérbola considerada, correspondiente al mismo punto, es constante.*

Teorema éste demostrado por BALITRAND en un artículo inserto en el *Journal de Mathématiques Spéciales (t.* XIV, 1890, *p.* 54).

**212.** La *cruciforme* tiene, como hemos visto, dos puntos dobles y un punto aislado, y, en consecuencia, es *unicursal.* Efectivamente: poniendo en su ecuación

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{y^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{b}{y}\right)\left(1 + \frac{b}{y}\right)} = t\left(1 - \frac{b}{y}\right),$$

encuéntranse las relaciones siguientes:

$$x = a\,\frac{t^2 + 1}{2t} \quad \text{é} \quad y = \frac{b\,(t^2 + 1)}{t^2 - 1},$$

de las cuales vamos á deducir ahora algunas propiedades interesantes de sus tangentes.

Por ser

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4bt}{(t^2 - 1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = a\,\frac{t^2 - 1}{2t^2},$$

la ecuación de la tangente á la curva admite la siguiente forma:

$$Y = -\,8\,\frac{b}{a} \cdot \frac{t^3}{(t^2 - 1)^3}\, X + b\,\frac{(t^2 + 1)^3}{(t^2 - 1)^3}.$$

Y si desde un punto $(\alpha, \beta)$ trazamos todas las tangentes posibles á la

curva, los puntos de contacto corresponderán á los seis valores de $t$, dados por la ecuación

$$a(\beta - b)t^6 - 3a(\beta + b)t^4 + 8b\alpha t^3 + 3a(\beta - b)t^2 - a(\beta + b) = 0.$$

Las condiciones á que deben satisfacer $\alpha$ y $\beta$ para que más de dos de estos seis puntos de contacto se hallen en línea recta, se determinan del siguiente modo.

La recta cuya ecuación es

$$ux + vy + 1 = 0$$

corta á la curva en cuatro puntos, correspondientes á los valores de $t$, dados por la ecuación

$$au t^4 + 2(1 + vb)t^3 - 2(1 - vb)t - au = 0.$$

Poniendo ahora por brevedad

$$A = a(\beta - b), \quad B = a(\beta + b), \quad K = 2\frac{1 + bv}{au} \quad \text{y} \quad L = 2\frac{1 - bv}{au},$$

infiérese, como en el Núm. **143**, que las condiciones, para que los cuatro puntos de intersección de la recta con la curva coincidan con puntos de contacto de las tangentes tiradas por el punto $(\alpha, \beta)$, son éstas:

$$8\alpha b + AL - K(AK^2 - 3B) = 0; \quad 4 - KL = 0;$$
$$-AK + L(AK^2 - 3B) = 0; \quad \text{y} \quad AK^2 - 4B = 0.$$

De las cuales se desprenden las siguientes:

$$AK = BL; \quad KL = 4; \quad 8\alpha b + AL - BK = 0; \quad \text{y} \quad AK^2 - 4B = 0.$$

Pero como, por eliminación de $L$ entre las dos primeras, se deduce la cuarta, las cuatro ecuaciones condicionales anteriores quedan reducidas á solamente estas tres:

$$(A) \qquad AK = BL; \quad KL = 4; \quad \text{y} \quad 8\alpha b + AL - BK = 0.$$

Y, eliminando $K$ y $L$ entre ellas, conclúyese que

$$16\alpha^2 b^2 AB = (A^2 - B^2)^2;$$

ó, sustituyendo $A$ y $B$ por sus valores,

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} = 1.$$

Luego, *cuando por un punto cualquiera de la cruciforme se tiran tangentes á esta curva, hállanse cuatro puntos de contacto, diferentes del de partida, situados en línea recta. Y, recíprocamente, los puntos de partida situados sobre la cruciforme son los que exclusivamente goxan de la propiedad demostrada.*

La ecuación de la recta que satisface á la condición de pasar por los puntos de contacto de las tangentes consideradas, es

$$ux + vy + 1 = 0:$$

en la cual $u$ y $v$ representan cantidades dadas por las expresiones

$$u = \frac{1}{\alpha} \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{\beta},$$

resultantes de las $(A)$.

Y como la ecuación $KL = 4$ equivale á la siguiente

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1,$$

las tangentes consideradas deben serlo también á la curva representada por esta ecuación, en coordenadas tangenciales; ó por esta otra, en coordenadas cartesianas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Luego *las tangentes á la cruciforme, tiradas por los puntos de la misma curva, tienen por envolvente la elipse representada por la última ecuación.*

Los teoremas que acabamos de demostrar deben considerarse como ampliación, discurrida por Schoute, de los teoremas de Em. Weyr, relativos á la lemniscata, y demostrados en el Núm. **143**.

**213.** Por un método análogo al empleado en el Núm. **144**, se demuestra asimismo el teorema siguiente:

*Los seis puntos de contacto de las tangentes á la cruciforme, que parten de un punto cualquiera, no situado sobre la curva, corresponden á una cónica.* (SCHOUTE).

Consideremos, en efecto, la cónica

$$ux^2 + vy^2 + wxy + kx + ly + 1 = 0,$$

y se verá primeramente que los valores de $t$ en los puntos de intersección de la cónica con la curva, á que nos referimos ahora, proceden de la ecuación

$$t^8 + At^7 + Bt^6 + Ct^5 + Dt^4 - At^3 + Et^2 - Ct + 1 = 0:$$

en la cual

$$A = \frac{2}{a} \cdot \frac{bw + k}{u}; \quad B = \frac{4}{a^2} \cdot \frac{b^2 v + bl + 1}{u};$$

$$C = \frac{2}{a} \cdot \frac{bw - k}{u}; \quad D = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{-a^2 u + 4b^2 v - 4}{u}; \quad \text{y}$$

$$E = \frac{4}{a^2} \cdot \frac{b^2 v - bl + 1}{u}.$$

Y los de $t$ también, correspondientes á los puntos de contacto con la curva, de las tangentes que pasan por el $(\alpha, \beta)$, de esta otra:

$$t^6 - 3Kt^4 + Lt^3 + 3t^2 - K = 0,$$

donde

$$K = \frac{\beta + b}{\beta - b} \quad \text{y} \quad L = \frac{8b\alpha}{a(\beta - b)}.$$

Y, en consecuencia, las condiciones para que los seis puntos de contacto de las tangentes, trazadas por el punto $(\alpha, \beta)$, se hallen sobre la cónica, serán

$$C - L + 3AK = 0; \quad D - 3 - AL + 3K(B + 3K) = 0;$$

$$4A + L(B + 3K) = 0; \quad E + K - 3(B + 3K) = 0;$$

$$C = AK; \quad \text{y} \quad 1 + K(B + 3K) = 0.$$

De las cuales solamente las cinco siguientes son en realidad distintas:

$$A = \frac{L}{4K}; \quad C = \frac{L}{4}; \quad D = 6 + \frac{L^2}{4K};$$

$$B = -\frac{1 + 3K^2}{K}; \quad \text{y} \quad E = -\left(K + \frac{3}{K}\right).$$

Determinados, con auxilio de estas relaciones, los valores de $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$, las ecuaciones

$$Aau - 2bw = 2k; \quad Ba^2 u - 4b^2 v = 4(bl + 1);$$

$$Cau - 2bw = -2k; \quad (Da^2 + 2a^2)u - 8b^2 v = -8; \quad \text{y}$$

$$Ea^2 u - 4b^2 v = 4(1 - bl),$$

servirán luego para hallar los coeficientes $u$, $v$, $w$, $k$, $l$, de la cónica.

**214.** Partiendo de la ecuación de la tangente, dada en el Núm. **212**, puede hallarse fácilmente la *ecuación tangencial de la cruciforme.*

Comparando, en efecto, aquella ecuación con esta otra

$$ux + vy + 1 = 0,$$

dedúcese que

$$u = \frac{8t^3}{a(t^2 + 1)^3} \quad \text{y} \quad v = \frac{(t^2 - 1)^3}{b(t^2 + 1)^3}.$$

Y, por eliminación de $t$ entre estas ecuaciones, obtiénese la buscada, correspondiente á la curva de que se trata:

$$(au)^{\frac{2}{3}} + (bv)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

**215.** La *cruciforme* fué definida anteriormente por una de sus varias relaciones con la *elipse*, entre las cuales es otra de las más interesantes aquella de que ahora pasamos á tratar, primeramente advertida por Neuberg *(Mathesis,* 1894, *p.* 47), y que puede enunciarse como sigue:

*Si, correspondiente á cada punto de una elipse dada, se determina el*

*centro de curvatura de la hipérbola homofocal que pase por aquel punto, el lugar geométrico de estos centros será precisamente una cruciforme.*

Para demostrarlo, recordemos que las ecuaciones de la elipse y de la *hipérbola homofocal* correspondiente á ella, son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

á condición de ser

$$A^2 + B^2 = a^2 - b^2 = c^2.$$

Y, además, que las coordenadas del centro de curvatura de la hipérbola, en el punto $(x_1, y_1)$, se hallan expresadas por las fórmulas

$$x_1 = \frac{c^2 x^3}{A^4} \quad \text{é} \quad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{B^4};$$

ó, sustituyendo $A$ y $B$ por sus valores

$$A = \frac{cx}{a} \quad \text{y} \quad B = \frac{cy}{b},$$

desprendidos de la ecuación de la hipérbola y de la relación $A^2 + B^2 = c^2$,

$$x_1 = \frac{a^4}{c^2 x} \quad \text{é} \quad y_1 = -\frac{b^4}{c^2 y}.$$

De donde, por eliminación de $x$ é $y$ entre estas últimas ecuaciones y la de la elipse, se deduce, finalmente, esta otra, también de la cruciforme:

$$\frac{a^6}{c^4 x_1^2} + \frac{b^6}{c_4 y_1^2} = 1.$$

**216.** Otra relación entre la cruciforme y la elipse, merecedora de consignarse en este sitio, es la expresada en el siguiente teorema, ya anteriormente mencionado:

*La cruciforme es la polar recíproca de la evoluta de la elipse*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

*relativamente al círculo que tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2 = c^2.$$

Consideremos, en efecto, la ecuación de la *evoluta* de la elipse,

$$\left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

y la correspondiente á la *polar* del punto $(X, Y)$, por referencia al círculo considerado,

$$Xx + Yy = x^2 + y^2 = c^2.$$

Y advirtiendo ahora que la *polar recíproca* pedida es la *envolvente* de esta recta, designando en este caso la $X$ un parámetro arbitrario, bastará, para hallar su ecuación, eliminar por de pronto la $Y$ entre las dos últimas ecuaciones consideradas, con lo cual se obtendrá la que sigue:

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{c^2 - Xx}{y}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

y después la $X$ entre esta ecuación, y su derivada con relación á la misma $X$,

$$a^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}\, (c^2 - Xx)^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}\, x\, X^{\frac{1}{3}} = 0; \quad \text{ó}$$

$$X = \frac{a^2\, c^2\, y^2}{x\,(a^2\, y^2 + b^2\, x^2)}.$$

Obteniéndose, en conclusión, de esta manera la ecuación de la *cruciforme*

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

A lo que precede agregaremos que también es una *cruciforme*, según demostró Retalli (*Mathesis*, 1894, *p.* 50), la *polar recíproca de la evoluta de una elipse, relativamente á la misma elipse.*

Y *cruciforme* también la polar recíproca de la curva

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

que representa la evoluta de una elipse, por referencia al *círculo imaginario*

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

## IV

### LA PUNTIFORME (KOHLENSPITZENCURVE)

**217.** Consideremos una hipérbola, cuya ecuación sea

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Tracemos una tangente á esta curva; y, por los puntos en que esta tangente corta á cada uno de sus ejes, una paralela al otro eje: el punto de intersección de las rectas así obtenidas describe, cuando la tangente varía, una curva, denominada por SCHOUTE *puntiforme carbonosa (kohlenspitzencurve)*, por su semejanza de figura con las dobles puntas de carbón de un mechero eléctrico, en la memoria anteriormente citada al tratar de la *cruciforme (Archiv der Mathematik, 2.ª serie, t.* II, III, IV y VI). Curva que pertenece también, como ésta, á la clase de las que poseen *tres puntos de inflexión dobles*, estudiadas, como ya se indicó, por el mismo SCHOUTE en aquel interesante trabajo.

**218.** Procediendo como en el Núm. **207**, hállase que la ecuación de la curva es

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1;$$

y, por lo tanto, que de las fórmulas relativas á la *cruciforme* se pasará á las correspondientes á la *puntiforme*, poniendo en ellas $-b^2$ por $+b^2$.

**219.** Y de análogo modo se deduce, con auxilio de las ecuaciones

$$y = \frac{bx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad y' = -\frac{a^2 b}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y'' = \frac{3a^2 bx}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

que la curva tiene la forma indicada en la figura 61: simétrica relativamente á los ejes de las coordenadas; con dos asíntotas, $AC$ y $BD$, cuyas ecuaciones son $x = a$ y $x = -a$, y otras dos, imaginarias, determinadas por la ecuación $y = \pm ib$; y un *punto de inflexión doble* en el origen $O$, donde las tangentes á la curva determinan con el eje de las abscisas ángulos cuyas tangentes trigonométricas son iguales á $\pm \frac{b}{a}$. La curva no posee otros puntos de inflexión ni más puntos dobles á distancia finita del origen; pero sí dos puntos de inflexión dobles en lo infinito. Y también es fácil ver que el método expuesto en el Núm. **209**, para trazar las tangentes á la *cruciforme*, es aplicable, sin modificación substancial, á esta otra curva.

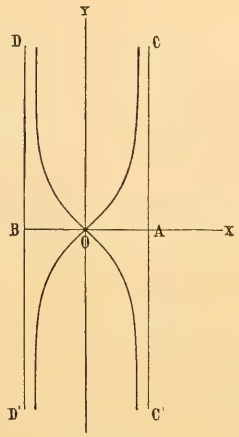


Figura 61.

**220.** Las fórmulas que expresan los valores de la *subnormal*, de la ordenada del punto en que la tangente corta el eje de las ordenadas, y del *radio de curvatura*, son

$$S_n = \frac{x(y^2 + b^2)}{a^2 - x^2}, \quad Y = \frac{x^2 y}{x^2 - a^2}, \text{ y } R = \frac{(b^4 x^6 + a^4 y^6)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 b^2 x^5 y^5} = \frac{N^3 b^4 x^4}{3a^2 y^8}.$$

**221.** Y, mudando en el análisis del Núm. **211** $b^2$ en $-b^2$, se ve parecidamente que la hipérbola equilátera, que pasa por el punto $(x, y)$, y tiene por ecuación

$$XY + b^2 \frac{X}{y} - a^2 \frac{Y}{x} = 0,$$

es tangente á la *puntiforme* en aquel punto, y que entre los radios de curvatura de las dos curvas existe la relación

$$R = \frac{2}{3} R_1,$$

representando por $R_1$ el radio de curvatura de la hipérbola en el punto $(x, y)$.

**222.** Las propiedades relativas á las tangentes, demostradas en los Núms. **212** y **213**, por referencia á la *cruciforme*, son, con leves variantes de expresión, aplicables también á la *puntiforme*, como basta, para verlo, mudar, en el análisis fundamental de aquellas propiedades, $b$ en $b\sqrt{-1}$. Pudiendo con esto dar como ciertos los teoremas siguientes, descubiertos por SCHOUTE:

1.° *Cuando por un punto cualquiera de la puntiforme se trazan tangentes á esta curva, hállanse cuatro puntos de contacto, diferentes del de partida, situados en línea recta. Y, recíprocamente, tan sólo los puntos de la curva satisfacen á esta condición.*

*La recta que pasa por aquellos cuatro puntos tiene por ecuación*

$$\beta x + \alpha y + \alpha\beta = 0;$$

representando $\alpha$ y $\beta$ las coordenadas del punto de la curva por el cual se tiran las tangentes.

2.° *Las tangentes á la puntiforme, trazadas por los puntos de la curva á que acabamos de referirnos, son también tangentes á la hipérbola, envolvente suya, á que corresponde la ecuación*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.° *Los seis puntos de contacto de las tangentes á la puntiforme, tiradas por cualquier otro punto no situado sobre la curva, están sobre una cónica.*

Y también es fácil ver que entre la *puntiforme* y la *hipérbola* de donde procede existen las mismas relaciones que en los Núms. **215** y **216** se

vió que existían entre la *cruciforme* y la *elipse;* y que la primera tiene por ecuación tangencial la que sigue:

$$(au)^{\frac{2}{3}} - (bv)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

## V

### LA CUÁRTICA PIRIFORME

**223.** Aplícase el nombre de *cuártica piriforme* á la curva que tiene por ecuación

$$x^4 - ax^3 + b^2 y^2 = 0,$$

comprendida entre las secciones del *cono-cuneus, conoide* especial, dado á conocer por Wallis *(Opera mathematica, t.* II): curvas recientemente estudiadas por Ossian Bonnet en los *Nouvelles Annales des Mathématiques* (1844, *p.* 75), y después por Brocard *(Nouvelle Correspondance, t.* VI, 1880, *p.* 91, 121 y 213, y *Mathesis, t.* III, 1883, *p.* 23, 116 y 191); por Mister *(Mathesis,* 1881, *p.* 78 y 128); etc., etc.

**224.** Por medio de las ecuaciones

$$y = \pm \frac{1}{b} x \sqrt{x(a-x)} \quad \text{é}$$

$$y' = \frac{3ax^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}}}{2b(a-x)^{\frac{1}{2}}},$$

vese fácilmente que la curva es de la forma indicada en la figura 62: simétrica con relación al eje de las abscisas, y comprendida entre las paralelas al de las ordenadas, definidas por las ecuaciones $x = 0$ y $x = a$, con un punto de retroceso en el origen, donde la tangente coincide con el eje de las abscisas;

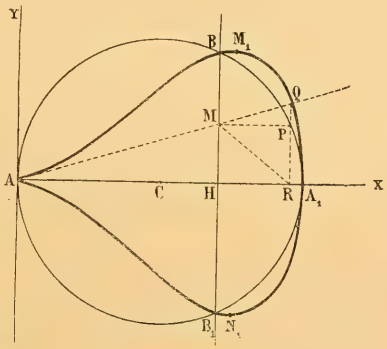



Figura 62.

dos puntos, $M_1$ y $N_1$, determinados por la ecuación $y' = 0$, correspondientes á la abscisa $x = \frac{3}{4}a$, en los cuales $y$ pasa por un valor máximo en absoluto; otro, $A_1$, que satisface á la condición $y' = \infty$, cuyas coordenadas son $(a, 0)$, en que la tangente á la curva es paralela al eje de las ordenadas; y otros dos de inflexión *reales*, definidos por la ecuación

$$y'' = 0, \quad \text{ú} \quad 8x^2 - 12ax + 3a^2 = 0,$$

que, utilizando solamente la raíz $x$ de esta ecuación, á que corresponden valores reales de $y$, tienen por coordenadas

$$x = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{4} \quad \text{é} \quad y = \pm \frac{a^2}{8b}\sqrt{6\sqrt{3} - y}.$$

**225.** La cuártica piriforme puede construirse fácilmente, conforme ahora veremos (LONGCHAMPS: *Essai de la Géométrie de la Règle*, 1890, *p.* 131).

Tracemos una circunferencia de radio igual á $\frac{1}{2}a$; y sea $C$ su centro. En esta circunferencia señalemos el punto $A$, y tracemos luego el diámetro $ACA_1$. Por el punto $H$, cuya distancia al $A$ sea igual á $b$, levantemos la perpendicular $HB$ al diámetro mencionado. Y por el $A$ tracemos la recta, de posición variable, $AM$; por el $M$, en que esta recta corta á la $HB$, la $MP$, paralela á la recta $AC$; y por el $P$, donde la $MP$ corta á la circunferencia, la $PQ$, paralela á la recta $BH$. El punto $Q$, variable cuando $AM$ varía, describirá la *cuártica piriforme* de que se trata.

En efecto, tomando el punto $A$ como origen de las coordenadas, y la $AC$ como eje de las abscisas, resulta que

$$\overline{PR}^2 = x(a - x), \quad \text{y} \quad PR = MH = b \operatorname{tang} MAH = \frac{by}{x};$$

de donde, por eliminación de $PR$, se desprende la ecuación del Núm. **223**.

**226.** Fácil es también trazar las tangentes á la cuártica piriforme, fundándose para ello en una propiedad de las mismas tangentes, que pasamos á demostrar.

Las ecuaciones de las tangentes, en los puntos $Q$ y $P$, á la cuártica

considerada y á la circunferencia que figura en su construcción, representando por $y_1$ la ordenada $PR$ del punto $P$ de la circnnferencia, son éstas:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \quad \text{é} \quad Y - y_1 = \frac{dy_1}{dx}(X - x).$$

Pero, como también

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x}{b} \quad \text{y} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{x}\left(b\frac{dy}{dx} - y_1\right),$$

eliminando entre estas cuatro ecuaciones los valores de $y_1$, $\frac{dy_1}{dx}$ y $\frac{dy}{dx}$, obtiénese esta otra:

$$x(x - b)Y + byX = byx,$$

correspondiente á una recta, y á la cual deben satisfacer las coordenadas del punto de intersección de las dos tangentes consideradas.

Y, como esta ecuación queda además satisfecha cuando en ella se sustituyen, en lugar de $X$ é $Y$, las coordenadas $b$ y $\frac{by}{x}$, del punto $M$, y también cuando por las mismas $X$ é $Y$ se ponen las coordenadas $x$ y 0 del punto $R$, resulta que:

*Las tangentes á la circunferencia y á la cuártica, en los puntos P y Q, se cortan en determinado punto de la recta MR* (Longchamps, *l. c.*).

Luego, trazada la tangente á la circunferencia en el punto $P$, la tangente á la cuártica en el $Q$, se hallará uniendo por una recta este punto con el de intersección de la primera tangente con la línea $MR$ prolongada.

**227.** El área limitada por un arco de la cuártica piriforme, por el eje de las abscisas y por una paralela al eje de las ordenadas, se halla definida por la fórmula

$$A = \frac{1}{b}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}(a - x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{b}\left[\frac{x(a - x)}{3} + \frac{a}{4}(a - x) - \frac{a^2}{8}\right]\sqrt{x(a - x)}$$

$$+ \frac{a^3}{8b}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\sqrt{\frac{a - x}{x}}\right).$$

De donde resulta que el valor del área total, limitada por la curva, es igual á $\frac{\pi a^3}{8b}$ (Ossian Bonnet, *l. c.*).

## VI

### LA CURVA DEL DIABLO

**228.** Con el extraño nombre de *Curva del Diablo* se designa la curva que tiene por ecuación (Lacroix: *Traité élémentaire de Calcul Différentiel et Intégral*, 1837, *p.* 158; Briot *et* Bouguet: *Géométrie Analytique*, *2.ª ed.*, *p.* 197; Laurent: *Traité d'Analyse*, *t.* II, *p.* 185; etc.)

$$y^4 - x^4 - 96a^2 y^2 + 100a^2 x^2 = 0;$$

ó, en coordenadas polares,

$$\rho^2 = 96a^2 + 4a^2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta}.$$

**229.** De esta segunda ecuación fácilmente se concluye que $\rho = \pm 10a$, cuando $\theta = 0$: de manera que la curva corta el eje de las abscisas en los puntos $A$ y $A'$ (fig. 63), tales que $OA = OA' = 10a$; que, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$, $\rho$ varía desde $\pm 10a$ hasta $\pm \infty$; y, por lo tanto, que todas las rectas, que pasan por $O$ y forman con el eje de las abscisas ángulos comprendidos entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, cortan á la curva en dos puntos equidistantes del $O$, y que la $BB'$, correspondiente al ángulo $\frac{\pi}{4}$, es asíntota de la curva; que, en el intervalo de $\theta = \frac{\pi}{4}$ á $\theta = \text{arc cos} \sqrt{\frac{24}{49}}$, $\rho$ es imagi-

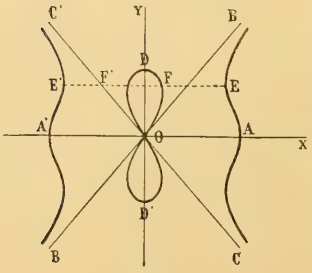


Figura 63.

nario y no existe curva á qué referirle; y, finalmente, que en el intervalo de $\theta = \text{arc cos}\sqrt{\frac{24}{49}}$ á $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\rho$ varía desde 0 hasta $OD = a\sqrt{96}$ y desde 0 hasta $OD' = a\sqrt{96}$. Á los otros valores de $\theta$ corresponden arcos de la curva, simétricos de los anteriores, por referencia á los ejes de las coordenadas: como se ve, además, inmediatamente por medio de la ecuación cartesiana de la misma curva.

Para determinar los puntos en que las tangentes son paralelas á los ejes de las coordenadas, recurriremos á la ecuación antes citada, de la cual se desprende que

$$y' = \frac{x^3 - 50a^2 x}{y^3 - 48a^2 y}.$$

Por lo tanto, será $y' = 0$ cuando sea $x = 0$: luego en los puntos $D$ y $D'$ la tangente resulta paralela al eje de las abscisas. Y también será $y' = 0$ cuando sea $x = \pm 5a\sqrt{2}$. Pero, como á estos valores de $x$ no corresponden valores reales de $y$, ninguna consecuencia geométrica, relacionada con la forma de la curva, se deduce de esto.

De la expresión anterior se infiere asimismo que $y' = \infty$, cuando $y = 0$ y cuando $y = \pm 4a\sqrt{3}$. Luego la tangente á la curva será paralela al eje de las ordenadas en los puntos $A$ y $A'$ y en los $E$, $E'$, $F$, $F'$, etc., situados sobre las rectas cuyas ecuaciones son $y = \pm 4a\sqrt{3}$.

**230.** El área limitada por dos rectas dirigidas á la curva desde el centro $O$, y por el arco de la curva que intersecan, se halla determinada por la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 \, d\theta = 48a^2(\theta_1 - \theta_0) + 2a^2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\cos^2 \theta \, d\theta}{\cos 2\theta}$$

$$= 49a^2(\theta_1 - \theta_0) - \frac{a^2}{4} \log \frac{(\text{sen}\, 2\theta_1 - 1)(\text{sen}\, 2\theta_0 + 1)}{(\text{sen}\, 2\theta_1 + 1)(\text{sen}\, 2\theta_0 - 1)}.$$

## VII

### EL FOLIUM SIMPLEX Ú OVOIDE

**231.** Dase el nombre de *folium simplex,* ó el de *ovoide,* á la curva que tiene por ecuación en coordenadas polares (LONGCHAMPS: *Essai de la Géométrie de la Règle, etc., Paris,* 1890, *p.* 126. BROCARD: *Journal de Math. Spéciales,* 1891, *p.* 85) la siguiente:

$$\rho = a\cos^3\theta, \tag{1}$$

ó, en coordenadas cartesianas, esta otra:

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^3. \tag{2}$$

De cualquiera de estas ecuaciones conclúyese fácilmente que la curva se reduce á una rama cerrada, y simétrica relativamente al eje de las abscisas, la cual pasa por los puntos $O$ y $O'$ (fig. 64), en donde es $x = 0$ y $x = a$, ó $\rho = a$ y $\rho = 0$: con la advertencia de que, como á $y = 0$ corresponden tres valores de $x$ iguales á 0, el punto $O$ es *triplo,* coincidiendo las tres tangentes á la curva en este punto con el eje de las ordenadas.

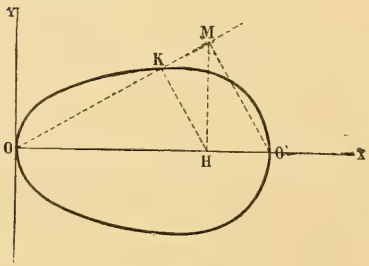


Figura 64.

Derivando la ecuación (2), resulta

$$4x(x^2 + y^2)(x + yy') = 3ax^3 = 3(x^2 + y^2)^2: \quad ó$$

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{4xy}.$$

Y de esta ecuación y de la (2) se concluye que $y$ adquiere un valor abso-

luto máximo en los puntos que tienen por abscisa común $\frac{9}{16}a$, y por ordenadas $\pm\frac{9}{16}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

**232.** La construcción del *folium simplex* se obtiene fácilmente del siguiente modo (LONGCHAMPS, *l. c.*). Tómense dos puntos, $O$ y $O'$, separados por la distancia $a$. Por el punto $O$ tírese una recta cualquiera, y por el $O'$ una perpendicular á ella, lo que determina el punto $M$. Por este punto trácese una perpendicular á $OO'$, lo que determinará el punto $H$. Y por éste otra perpendicular á $OM$, cuyo punto de intersección designaremos por $K$. Pues el lugar geométrico descrito por $K$, cuando $OM$ varía de dirección, será la curva de que ahora se trata.

De la construcción efectuada, suponiendo que $OK = \rho$ y $KOO' = \theta$, resulta, en prueba de ello, que

$$\rho = OH \times \cos\theta = OM \times \cos^2\theta = OO' \times \cos^3\theta: \quad \text{ó} \quad \rho = a\cos^3\theta.$$

**233.** La determinación de las tangentes y de las normales al *folium simplex* se logra fácilmente, fundándose en las siguientes propiedades de ambas rectas:

1.° Poniendo $Y = 0$ en la ecuación de la normal

$$Y - y = \frac{4xy}{x^2 - 3y^2}(X - x),$$

obtiénese, para valor de la abscisa del punto en que esta recta corta el eje del mismo nombre (LONGCHAMPS, *l. c.*, *p.* 127),

$$X = x - \frac{x^2 - 3y^2}{4x} = \frac{3(x^2 + y^2)}{4x} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\rho}{\cos\theta} = \frac{3}{4}OH.$$

2.° De análogo modo se verá que la tangente corta el eje de las ordenadas en el punto cuya ordenada tiene por valor

$$Y = \frac{1}{4}\cdot\frac{\rho}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Y 3.° Por ser

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

la subnormal $S_n$ tendrá por expresión

$$S_n = -3OH.\,\mathrm{sen}\,\theta = -3HK.$$

**234.** Al radio de curvatura del *folium simplex* corresponde la fórmula

$$R = \frac{a\cos^2\theta\,(9 - 8\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{12 - 8\cos^2\theta}.$$

Por lo tanto, el radio será nulo en el punto $O$, é igual á $\frac{a}{4}$ en el $O'$. Y como los valores de $\theta$, correspondientes á $R = \infty$ son imaginarios, concluyese que la curva carece de puntos de inflexión reales.

**235.** El área limitada por el *folium simplex* tiene por expresión

$$A = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,d\theta = \frac{5}{32}\pi a^2.$$

**236.** Y la diferencial de los arcos del mismo *folium* esta otra:

$$ds = a\cos^2\theta\,(9 - 8\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta:$$

ó, poniendo $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$,

$$ds = -3a\,\mathrm{sen}^2\omega\left(1 - \frac{8}{9}\,\mathrm{sen}^2\omega\right)^{\frac{1}{2}}d\omega.$$

Mas, siendo fácil cerciorarse de la exactitud de la siguiente identidad, que también puede deducirse de una fórmula conocida de la Teoría de las Integrales elípticas,

$$\operatorname{sen}^2\omega\left(1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\omega\right)^{\frac{1}{2}}d\omega=\frac{1}{24}\cdot\frac{d\omega}{\Delta\omega}+\frac{7}{24}\Delta\omega d\omega$$

$$-\frac{1}{6}d\left\{\operatorname{sen}2\omega\Delta\omega\right\},$$

en donde

$$\Delta\omega=\sqrt{1-\frac{8}{9}\operatorname{sen}^2\omega},$$

resulta, en conclusión, que

$$ds=-\frac{a}{8}\left[\frac{d\omega}{\Delta\omega}+7\,\Delta\omega d\omega\right]+\frac{a}{2}d\left\{\operatorname{sen}2\omega\Delta\omega\right\}.$$

De donde inmediatamente se deduce que *la determinación de la longitud de los arcos del folium simplex depende de integrales elípticas de primera y de segunda especie.*

## VIII

### EL FOLIUM DUPLEX Ó BIFOLIUM

**237.** El nombre de *folium duplex* fué dado por Longchamps *(Journal de Mathématiques Spéciales*, 1886; *Essai de la Géométrie de la Règle*, 1890, *p.* 122) á la curva cuya ecuación, en coordenadas polares, es

$$\rho=\cos^2\theta\,(a\cos\theta+b\operatorname{sen}\theta), \tag{1}$$

y en coordenadas cartesianas

$$(x^2+y^2)^2=x^2\,(ax+by). \tag{2}$$

Curva que representa la solución del problema propuesto por los años 1869 en los concursos para la admisión en la Escuela Politécnica de París, reducido á encontrar el lugar geométrico de las proyecciones del

vértice de un ángulo recto, perteneciente á un triángulo isósceles, sobre los ejes de las parábolas tangentes á los tres lados del mismo triángulo (*Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1869, *p.* 378): problema estudiado por LONGCHAMPS (*l. c.*), y por BROCARD (*Journal de Mathématiques Spéciales*, 1887, *p.* 66; 1891, *p.* 108).

**238.** Para construir el *folium duplex* discurrió LONGCHAMPS el procedimiento siguiente.

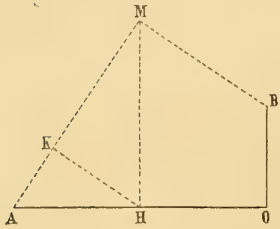


Figura 65.

Tómese un ángulo recto $AOB$ (figura 65), en el cual sean $OA=a$ y $OB=b$; y por los puntos $A$ y $B$ trácense dos rectas, $AM$ y $BM$, perpendiculares una á otra. Por su punto de intersección $M$, trácese luego la recta $MH$, perpendicular á la $AO$; y por el $H$, la $HK$, perpendicular á la $AM$. El lugar descrito por $K$, cuando $AM$ varía de situación, es el *folium duplex*, representado por la ecuación (1).

Suponiendo, en efecto, que $AK=\rho$ y $KAH=\theta$, hállase que

$$\rho = AH\cos\theta = AM\cos^2\theta = (AO\cos\theta + OB\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos^2\theta.$$

**239.** Y poniendo en ella

$$a = b\,\mathrm{tang}\,\omega \quad \text{y} \quad \frac{b}{\cos\omega} = k, \quad \text{ó} \quad a = k\,\mathrm{sen}\,\omega \quad \text{y} \quad b = k\cos\omega,$$

inmediatamente se transforma en esta otra,

$$\rho = k\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,(\theta + \omega),$$

que permite descubrir cuál es la forma de la curva á que se refiere.

Supongamos, en efecto, para fijar las ideas, que $a$ y $b$ son números positivos. Pues de esta ecuación se deduce que, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, $\rho$ variará desde $OA = k\,\mathrm{sen}\,\omega = a$ hasta 0, y el punto genera-

dor de la curva describirá el arco $ABO$ (fig. 66); que, cuando $\theta$ varía desde $\frac{\pi}{2}$ hasta $\pi - \omega$, el mismo punto generador de la curva describe el arco $OCDO$; y que, finalmente, cuando $\theta$ varía desde $\pi - \omega$ hasta $\pi$, el punto mencionado describe el arco $OEA$. A los otros valores de $\theta$ no corresponden puntos de la curva, distintos de los anteriores.

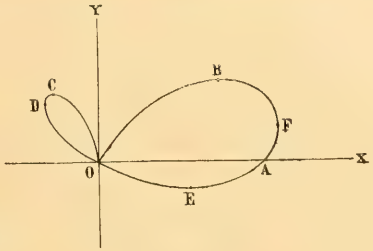



Figura 66.

De lo que precede resulta asimismo que $O$ es un punto múltiplo de la curva, en el cual se encuentran reunidos un punto de retroceso, formado por los dos arcos $OB$ y $OC$, tangentes al eje de las ordenadas, y un punto simple, perteneciente al arco $DOA$, cuya tangente en $O$ forma un ángulo igual á $-\omega$ con el eje de las abscisas.

Poniendo en (2) $y = tx$, hállanse las ecuaciones

$$x = \frac{a + bt}{(1 + t^2)^2}, \quad y = \frac{t(a + bt)}{(1 + t^2)^2}.$$

De las cuales resulta que los valores de $t$ en los puntos $B$, $C$ y $E$, donde el valor absoluto de $y$ pasa por un máximo, satisfacen á la ecuación

$$2bt^3 + 3at^2 - 2bt - a = 0;$$

y que los valores de $t$ en los puntos $F$ y $D$, donde el valor absoluto de $x$ pasa también por un máximo, se hallan determinados por la expresión

$$3bt^2 + 4at - b = 0.$$

Derivando la ecuación (2), relativamente á $x$, y poniendo $y' = 0$, obtiénese la ecuación

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}ax + \frac{2}{4}by,$$

según la cual los puntos $B$, $C$ y $E$ corresponden á una circunferencia cuyo centro tiene por coordenadas $\alpha = \frac{3}{8}a$ y $\beta = \frac{1}{4}b$, y cuyo radio es igual á $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

**240.** El área $A$, limitada por la curva y por dos rectas que pasan por el origen de las coordenadas, se encuentra fácilmente como sigue.

Suponiendo, en efecto, que una de las rectas sea la $OA$, y que la otra forme el ángulo $\theta$ con el eje de las abscisas, hallaremos que

$$A = \frac{k^2}{2}\int_0^{\theta} \cos^4\theta \operatorname{sen}^2(\theta+\omega)\,d\theta$$

$$= \frac{k^2}{2}\left(\cos^2\omega - \frac{5}{8}\cos 2\omega\right)\left[\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{6}\left(\cos^4\theta + \frac{5}{4}\cos^2\theta + \frac{3.5}{2.4}\right) + \frac{1.3.5}{2.4.6}\theta\right]$$

$$- \frac{k^2}{12}\cos^5\theta \operatorname{sen}(\theta + 2\omega).$$

---

**241.** Con el nombre de *folium duplex* podría designarse también cualquiera de las curvas que constituyen el interesante grupo definido por la ecuación

$$(1) \qquad y = \pm\sqrt{x}\left[\sqrt{p - ax} \pm \sqrt{r - bx}\right], \quad \text{ó}$$

$$[y^2 + (a+b)x^2 - (p+r)x]^2 = 4x^2(p - ax)(r - bx),$$

entre las cuales se hallan, como casos particulares, contenidas la estudiada por CRAMER en su *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes*, pág. 239, que tiene por ecuación esta otra

$$y = \sqrt{ax} \pm \sqrt{2ax - x^2},$$

y las *cuárticas* encontradas por el profesor español SR. RUIZ-CASTIZO, al

proponerse determinar el lugar geométrico engendrado por un punto de un segmento de recta, cuando este segmento se mueve, en un mismo plano siempre, apoyándose por sus extremos en una recta y una circunferencia dadas, á partir de una posición inicial, en la cual el segmento, indefinidamente prolongado, pasa por el centro de la circunferencia y es perpendicular á la recta fija. Cuárticas minuciosamente discutidas por el citado profesor en interesante opúsculo, titulado *Estudio analítico de un Lugar geométrico de cuarto orden*, impreso en Madrid el año 1889, y al cual remitimos al lector que desee completar las someras indicaciones de su contenido, que pasamos á exponer.

242. Para lo cual, y con objeto de fijar las ideas, supondremos que las cantidades $a$, $b$, $p$ y $r$, que figuran en la ecuación (1), son *positivas*, y que $\frac{p}{a}$ es fracción menor que la $\frac{r}{b}$. De no ser positivas algunas de aquellas cantidades, ó de ser todas negativas, fácil sería ver que las curvas comprendidas en la ecuación son, substancialmente, de la misma forma que en el supuesto primero.

De la ecuación (1) inmediatamente se concluye que cualquiera de las curvas á que corresponde es simétrica por referencia al eje de las abscisas; que está por completo comprendida entre el eje de las ordenadas y la paralela al mismo eje, cuya abscisa es igual á $\frac{p}{a}$; que á cada valor de $x$, comprendido entre 0 y $\frac{p}{a}$, corresponden dos valores positivos y dos negativos de $y$, finitos los cuatro; y, últimamente, que, si $x = \frac{p}{a}$, los dos valores positivos son iguales, é iguales también los negativos. Y con no mayor dificultad se advertirá que la curva posee dos puntos *duplos:* en coincidencia con el origen de las coordenadas uno, y determinado el otro por las coordenadas

$$x = \frac{p - r}{a - b} = x_1 \quad \text{é} \quad y = 0,$$

cuando $p \gtrless r$; ó un *punto triplo,* que coincide con el origen de las coordenadas, cuando $p = r$.

De la igualdad

$$\frac{y}{x} = x^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{p}\left(1 - \frac{ax}{2p} + \ldots\right) \pm \sqrt{r}\left(1 - \frac{bx}{2r} + \ldots\right)\right],$$

que se obtiene desenvolviendo en serie, ordenada por las potencias de $x$, el segundo miembro de la ecuación (1), se deduce que el límite hacia el cual tiende $\frac{y}{x}$, cuando $x$ tiende hacia *cero* y $p \gtrless r$, admite dos valores infinitos; y un valor infinito y otro nulo, cuando $p = r$. De manera que las tangentes á las dos ramas de la curva, en el origen mencionado, coinciden ambas con el eje de las coordenadas, en el primer supuesto; y una de aquellas tangentes con el eje de las ordenadas, y la otra con el de las abscisas, en el segundo.

Las curvas consideradas poseen, pues, una de las formas indicadas en

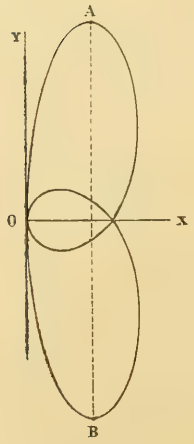


Figura 67.

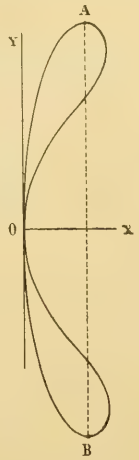


Figura 68.

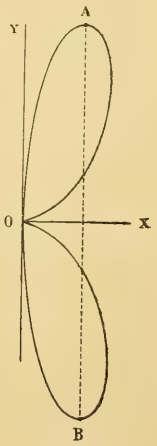


Figura 69.

las figuras 67, 68 y 69: la primera, cuando la abscisa $x_1$ está comprendida entre 0 y $\frac{p}{a}$; la segunda, cuando $x_1 < 0$, ó $x_1 > \frac{p}{a}$; y la tercera, cuan-

do $p = r$. En el primer caso, el punto $(x_1, 0)$ representa un *nodo;* y en el segundo un punto *aislado.*

Partiendo de la ecuación

$$y' = \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{p - 2ax}{\sqrt{px - ax^2}} \pm \frac{r - 2bx}{\sqrt{rx - bx^2}} \right],$$

para determinar las abscisas de los puntos donde la ordenada de la curva adquiere un valor máximo ó mínimo, dedúcese la siguiente ecuación de tercer grado:

$$(p - 2ax)^2 (r - bx) = (r - 2bx)^2 (p - ax).$$

Y de la ecuación

$$y'' = \pm \frac{1}{4} \left[ \frac{p^2}{(px - ax^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{r^2}{(rx - bx^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

se concluye asimismo que las abscisas de los *puntos de inflexión* de la curva se desprenden de esta otra:

$$x = \frac{rp \left(1 - \sqrt[3]{\frac{r}{p}}\right)}{pb - ar \sqrt[3]{\frac{r}{p}}}.$$

A propósito de la cual conviene advertir que de ella solamente se desprende para $x$ un *valor real,* correspondiente á dos *puntos de inflexión, reales* también, cuando aquel valor se halla comprendido en 0 y $\frac{p}{a}$.

**243.** Las curvas que acabamos de considerar pueden ser engendradas por un punto $M$ de un segmento determinado de recta $BD$ móvil, de manera que por su extremo $D$ se apoye en una *cónica* cualquiera, $ADE$, y por el $B$ en la $RR_1$, perpendicular al eje prolongado $AE$ de la misma cónica, levantada por un punto $K$, cuya distancia al $A$ se halle expresada por la longitud constante del segmento $BD$. En el caso de reducirse la cónica directriz á un círculo, hállanse las curvas estudiadas por el Sr. Castizo; constituyendo la demostración que vamos á dar una sencilla genera-

lización de la del teorema ó principio fundamental, propuesto y demostrado por aquel geómetra, en el supuesto por él exclusivamente admitido.

Supongamos primeramente que la cónica represente una *elipse*, y designemos (fig. 70) por $C$ su centro, por $2\alpha$ su eje mayor $AE$, y el menor, $CA_1$, por $2\beta$; y por $O$ la posición inicial del $M$, de manera que $MD = OA$, $MB = KO = m$, y $BD = KA = k$.

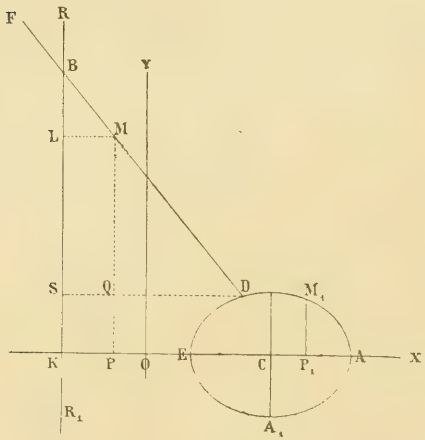



Figura 70.

Adoptando para *origen* de las coordenadas el punto $O$; para *eje* de las ordenadas la recta $Oy$, paralela á la directriz $RR_1$; y para el de las abscisas la $Ox$, prolongación de la $EA$, la ecuación de la elipse podrá escribirse de este modo:

$$\frac{(x_1 - k + m + \alpha)^2}{\alpha^2} + \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1.$$

Designando asimismo por $x$ é $y$ las coordenadas del punto $M$, y por $x_1$ é $y_1$ las del punto $D$, correspondiente á la elipse, resulta que

$$y = MP = MQ + QP = \sqrt{\overline{MD}^2 - \overline{QD}^2} + QP = \sqrt{(k-m)^2 - (x_1 - x)^2} + y_1$$

ó $$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - (x_1 - k + m + \alpha)^2} + \sqrt{(k-m)^2 - (x_1 - x)^2}.$$

Pero de los triángulos $BML$ y $BDS$ se desprenden estas relaciones

$$\frac{BM}{BD} = \frac{LM}{SD} = \frac{KP}{SD}:$$

ó las siguientes, teniendo en cuenta los signos de $x$ y $x_1$,

$$\frac{m}{k} = \frac{m+x}{m+x_1}, \quad \text{y} \quad x_1 = k - m + \frac{kx}{m}.$$

De donde, por sustitución de este valor de $x_1$ en la expresión precedente del de $y$, hállase que la ecuación de la curva, engendrada por el punto $M$, al moverse la recta $BD$ en las condiciones poco antes definidas, es la siguiente:

$$y = \frac{k-m}{m}\sqrt{-x^2 - 2mx} + \frac{\beta k}{\alpha m}\sqrt{-x^2 - 2\frac{m}{k}\alpha x}.$$

Si la cónica directriz fuese una *hipérbola*, la curva engendrada por $M$ tendría por ecuación

$$y = \frac{k-m}{m}\sqrt{-x^2 - 2mx} + \frac{\beta k}{\alpha m}\sqrt{x^2 + 2\frac{m}{k}\alpha x},$$

que se deduce de la anterior poniendo en ella $\beta\sqrt{-1}$ en vez de $\beta$.

Y de análoga manera se demuestra que, si la *directriz* fuese una *parábola*, ésta tendría por ecuación, en las condiciones convenidas del problema, la siguiente:

$$y_1^2 = 2\alpha(x - k + m):$$

de la cual se desprende, para ecuación de la curva buscada, la que sigue:

$$y = \sqrt{\frac{2\alpha k}{m}x} + \frac{k-m}{m}\sqrt{-x^2 - 2mx}.$$

Siendo de advertir que en las fórmulas correspondientes á los tres supuestos examinados debe cambiarse el signo de $m$, cuando el punto $M$ se halle más allá del $B$, siguiendo la dirección $DBF$: en cuyo caso también el $O$ resultará situado á la izquierda del $K$.

## IX

### EL FOLIUM TRIPLEX Ó TRIFOLIUM

**244.** También fué Longchamps quien aplicó el nombre de *trifolium* á la curva representada por la ecuación, referida á coordenadas polares $\rho$ y $\theta$,

$$\rho = 4a \cos(2\theta - \omega) \cos(\theta - \omega), \tag{1}$$

y estudiada por el mismo geómetra *(Journal des Mathématiques Spéciales,* 1887, *p.* 203 y *p.* 220; *Traité de Géométrie Analytique,* 1884, *p.* 512; *Essai de la Géométrie de la Règle,* 1890, *p.* 125), y por Brocard *(Mémoires sur divers problèmes de Géométrie dont la solution depende de la trisection de l'angle. Alger,* 1874, núms. 21-23; *Journal de Mathématiques Spéciales,* 1887, *p.* 68, y 1891, *págs.* 32, 56, 80, 106, 123, 177; y en *El Progreso Matemático, t.* II, *p.* 271).—En el caso de ser $\omega = 0$, el *trifolium* se denomina *recto,* y *oblicuo* en el contrario.

Al estudio de esta curiosa curva fué inducido Longchamps por el de las *podarias* de la *hipocicloide de tres retrocesos,* relativas á los puntos de su *círculo tritangente,* que en efecto, y conforme veremos más adelante, son *trifolios.* Y á su vez Brocard fijó también la atención en esta curva al ocuparse en la resolución del siguiente problema.

Sean (fig. 71) una circunferencia de centro $O$ y radio $a = OP$; $P$ un

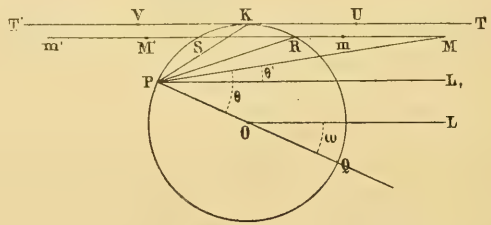



Figura 71.

punto fijo de esta circunferencia; y $OL$ una recta, también de posición invariable.

Tracemos por el punto $P$ la recta móvil $PR$, y desde $R$ la $RS$, paralela á la $OL$ y á la $PL_1$. Y, á contar de los puntos $R$ y $S$, señálense, sobre la línea que determinen, los $M$ y $M'$ y los $m$ y $m'$, de manera que sean $RM = RM'$ y $Sm = Sm'$, y los cuatro segmentos así determinados iguales á la cuerda $PR$.

Pues el problema aludido consiste en hallar el *lugar geométrico* descrito, en combinación, por los puntos $M$, $M'$, $m$ y $m'$, cuando $PR$ varía de situación, girando alrededor del punto fijo $P$. Lugar ó curva buscada que resulta ser un *trifolium*, cuya ecuación, en coordenadas polares, coincide con la (1): considerando para ello como *polo* el punto $P$ y como *eje* la recta $PQ$, y designando por $\omega$ el ángulo $LOQ = L_1PO$ y por $\theta$ el ángulo $MPO$, correspondiente al *radio vector* $\rho$, igual á $PM$.

Del examen y condiciones de la figura se deduce, en efecto, que

$$RPM = RMP = MPL_1 = MPO - L_1PO = \theta - \omega;$$

$$RPL_1 = 2MPL_1 = 2(\theta - \omega); \quad \text{y}$$

$$PR = 2a\cos RPO = 2a\cos(RPL_1 + \omega) = 2a\cos(2\theta - \omega).$$

Y como $\rho = PM = 2PR\cos(\theta - \omega)$, resulta, en conclusión, que

$$\rho = 4a\cos(\theta - \omega)\cos(2\theta - \omega); \quad \text{ó}$$

$$\rho = 4a\cos\theta'\cos(2\theta' + \omega), \tag{2}$$

si el *ángulo* $\theta'$, que reemplaza al $\theta$, se refiere al eje $PL_1$.

De cualquiera de las ecuaciones (1) ó (2) puede deducirse la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas, adoptando, si de la (2), la recta $PL_1$ para eje de las abscisas. Y así se obtiene la siguiente:

$$(x^2 + y^2)^2 = 4ax(x^2 - y^2)\cos\omega - 8ax^2y\,\text{sen}\,\omega.$$

Del sistema de generación del *trifolium* que se acaba de exponer dedujo Brocard esta notable propiedad de la curva:

*Cada una de las tangentes á la circunferencia $PQR$, paralelas á la recta $OL$, toca al trifolium en dos puntos equidistantes del de contacto con la misma circunferencia.*

Pues, en efecto: cuando la recta $SR$, moviéndose paralelamente á la $PL_1$, tiende á confundirse con la tangente á la circunferencia $KT$, los puntos $S$ y $R$ se aproximan indefinidamente al $K$, y á la $PK$ la recta $PR$. Y como los segmentos $RM$ y $Sm$ son iguales á $PR$, los puntos de la curva, $M$ y $m$, tienden á confundirse en uno solo, $U$, donde se verifica que $KU = PK$, y por el cual pasa la recta $KT$, tangente común á la circunferencia $PKQ$ y al *trifolium*. Y del mismo modo puede demostrarse que aquella recta es tangente á la curva en el punto $V$, donde $KV = PK$.

Al mismo Brocard se debe también la demostración de que los puntos donde la circunferencia $PKR$ corta al trifolium (excluyendo el $P$) son los vértices de un triángulo equilátero.

De la ecuación de la circunferencia, $\rho = 2a\cos\theta$, y de la (1), que se puede escribir de este otro modo:

$$\rho = 2a\cos\theta + 2a\cos(3\theta - 2\omega),$$

resulta, para determinar los valores de $\theta$ en aquellos puntos, la nueva ecuación

$$\cos(3\theta - 2\omega) = 0,$$

que admite estas cuatro soluciones:

$$\theta = 30^0 + \frac{2}{3}\omega, \quad \theta = 90^0 + \frac{2}{3}\omega, \quad \theta = 150^0 + \frac{2}{3}\omega,$$

$$\text{y} \quad \theta = 210^0 + \frac{2}{3}\omega.$$

Los ángulos que forman con $PO$ las rectas tiradas desde el centro de la circunferencia á los puntos de su intersección con la curva son, pues, respectivamente iguales á

$$60^0 + \frac{4}{3}\omega, \quad 180^0 + \frac{4}{3}\omega, \quad 300^0 + \frac{4}{3}\omega, \quad \text{y} \quad 420^0 + \frac{4}{3}\omega;$$

cuya diferencia constante es de $120^0$.

**245.** Con estos antecedentes, la forma de la curva que estudiamos se desprende fácilmente del análisis de la ecuación (2).

Supongamos, para fijar las ideas, que sea $\omega < \frac{\pi}{2}$.

La ecuación (2) muestra que, cuando $\theta'$ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$, $\rho$ varía desde $4a\cos\omega$ hasta 0, y el punto generador de la curva describe el arco $ABP$ (fig. 72).

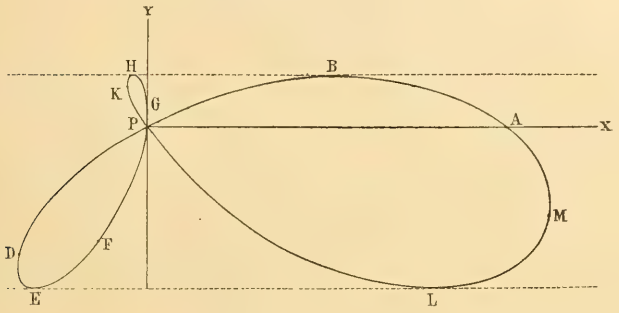



Figura 72.

Cuando, después, $\theta'$ varía desde $\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, $\rho$ es negativo, y su valor absoluto aumenta desde 0 hasta un límite superior, y decrece en seguida hasta 0, describiendo el punto generador de la curva el arco $PDEFP$.

Cuando $\theta'$ varía desde $\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{3}{4}\pi - \frac{\omega}{2}$, el punto generador describe el arco $PGHKP$.

Y, finalmente, cuando $\theta'$ varía desde $\frac{3}{4}\pi - \frac{\omega}{2}$ hasta $\pi$, $\rho$ varía desde 0 hasta $-4a\cos\omega$, y el punto generador describe el arco $PLA$.

A los valores de $\theta'$, superiores á $\pi$, no corresponden puntos de la curva distintos de los anteriores.

De lo que precede se concluye que el punto $P$ es *triplo,* y que las tangentes á la curva en este punto forman ángulos iguales á $\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, y $\frac{3}{4}\pi - \frac{\omega}{2}$ con el eje de las abscisas. *Una de las tangentes en el punto*

*triplo coincide, pues, con el eje de las ordenadas, y las otras dos son perpendiculares una á otra* (BROCARD).

Las tangentes paralelas al eje de las abscisas tocan á la curva cada una en dos puntos, $H$ y $B$, y $E$ y $L$ (Núm. **244**), hallándose por medio de la expresión, igualada á cero,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(4\theta' + \omega)}{2\cos\theta' \operatorname{sen}(3\theta' + \omega)},$$

los cuatro valores de $\theta'$ en estos puntos,

$$\frac{\pi}{8} - \frac{\omega}{4}, \quad \frac{3}{8}\pi - \frac{\omega}{4}, \quad \frac{5}{8}\pi - \frac{\omega}{4}, \quad \text{y} \quad \frac{7}{8}\pi - \frac{\omega}{4}.$$

Valiéndose de la misma fórmula, se advierte que los valores de $\theta'$ en los puntos en que la tangente es paralela al eje de las ordenadas tienen por expresión

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\omega}{3} \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{3} - \frac{\omega}{3}.$$

**246.** A estas meras indicaciones reduciremos aquí el *interesante* estudio del trifolium. Para ampliarle, acúdase á los trabajos especiales, anteriormente mencionados, y principalmente á la memoria titulada: *Le trifolium (Journal de Mathématiques Spéciales*, 1891), donde la curva á que se refiere fué analizada por BROCARD con bastante detenimiento. Conforme también puede verse en el resumen del mismo trabajo, igualmente publicado por BROCARD en *El Progreso Matemático* (t. II, p. 71), que, hasta poco tiempo há, editaba en Zaragoza el profesor GALDEANO.

## X

### BICORNIO

**247.** Los ingleses dan el nombre de *Cocket Hat* á la curva que tiene por ecuación

$$x^4 + x^2 y^2 + 4ax^2 y - 2a^2 x^2 + 3a^2 y^2 - 4a^3 y + a^4 = 0,$$

estudiada por LONGCHAMPS en el *Journal de Mathématiques Spéciales*, 1896, con el nombre de *bicornio*, sugerido por BROCARD.

Escribiendo la ecuación anterior del modo siguiente:

$$(x^2 - a^2)^2 + 4ay\,(x^2 - a^2) + 3a^2 y^2 + x^2 y^2 = 0,$$

ó

$$(1) \qquad y = -\frac{a^2 - x^2}{2a \mp \sqrt{a^2 - x^2}},$$

obtiénese fácilmente la forma de la curva (fig. 73).

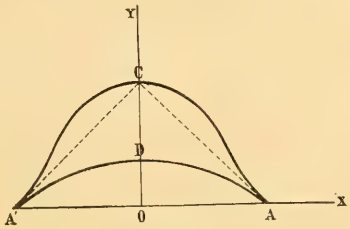


Figura 73.

Porque, en primer lugar, se advierte que es simétrica relativamente al eje de las ordenadas, y que las paralelas á este eje, cuyas abscisas se hallan comprendidas entre $+a$ y $-a$, la cortan en dos puntos. Y, además, cuando $x = \pm a$, resulta que $y = 0$: luego las dos ramas de la curva cortan al eje de las abscisas en los puntos $A$ y $A'$.

Por otra parte, como de la igualdad

$$y' = \frac{-4ax \pm x\sqrt{a^2 - x^2}}{\left(2a \mp \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2},$$

se desprende que $y' = -1$, cuando es $x = a$; é $y' = 1$, cuando $x = -a$, conclúyese que $A$ y $A'$ son *puntos de retroceso*, donde las tangentes forman ángulos de $-45^0$ y $+45^0$ con el eje de las abscisas.

Por ser $y = a$ é $y = \frac{1}{3}a$, cuando es $x = 0$, y ser también en este caso $y' = 0$, conclúyese asimismo que la curva corta al eje de las ordenadas en los puntos $(0, a)$ y $\left(0, \frac{1}{3}a\right)$, y que en estos puntos la tangente es paralela al eje de las abscisas.

Poniendo en la ecuación (1)

$$x = \sqrt{a^2 - t^2}, \quad \text{resulta que} \quad y = \frac{t^2}{2a \mp t}.$$

Y de estas ecuaciones se deducirán los *puntos de inflexión* de la curva, con auxilio de la fórmula

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^3} = \frac{a^2 (3t \mp 2a)}{t (2a \mp t)^3} = 0, \quad \text{ó} \quad 3t \mp 2a = 0,$$

que, combinada con las ecuaciones inmediatas precedentes, determina los puntos de inflexión buscados:

$$\left(x = \pm \frac{a}{3}\sqrt{5}, \quad y = \frac{a}{3}\right).$$

**248.** Si entre $t$ y $z$ establecemos la relación siguiente:

$$\sqrt{a^2 - t^2} = z\,(t + a), \quad \text{ó} \quad t = \frac{a\,(1 - z^2)}{1 + z^2},$$

las expresiones de $x$ é $y$, en función de $t$, se transformarán en estas otras:

$$x = \frac{2az}{1 + z^2} \quad \text{é} \quad y = \frac{a\,(1 - z^2)^2}{(1 + z^2)\,(1 + 3z^2)},$$

por referencia á la rama superior de la curva, y

$$x = \frac{2az}{1 + z^2} \quad \text{é} \quad y = \frac{a\,(1 - z^2)^2}{(1 + z^2)\,(3 + z^2)},$$

tratándose de la inferior: fórmulas que dan los valores de $x$ é $y$ en función racional de $z$, y de las cuales se deduce, en consecuencia, que el *bicornio pertenece á la clase de curvas unicursales.*

**249.** El *bicornio* puede ser fácilmente construído por el siguiente procedimiento, ideado por Carlota Scott, de *Pensilvania.—E. U. (Intermédiaire des Mathématiciens,* 1896, *p.* 250).

Trácense dos circunferencias, $C$ y $C'$, del mismo radio, $a$, y una á otra tangentes exteriormente, conforme representa la figura 74; y tómense, para origen de las coordenadas, el centro de la $C$; para ejes de las ordenadas, la línea $CC'$ de los centros, y de las abscisas, la $Cx$, perpendicular á ésta. Y, por un punto cualquiera, $M$, de la circunferencia $C'$, trácese la paralela $MP$ á la línea de los centros, y, finalmente, la *polar* $AB$ de aquel punto, relativamente á la otra circunferencia $C$. Pues aquella paralela y la polar se cortarán en otro punto, $K$, que es precisamente un punto del bicornio.

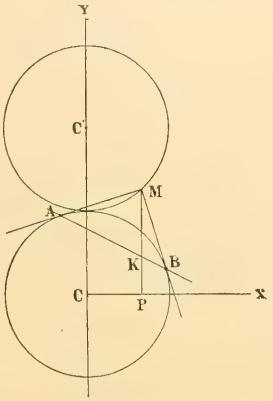


Figura 74.

Para demostrarlo, adviértase que las ecuaciones de las dos circunferencias consideradas, $C$ y $C'$, son éstas:

$$X^2 + Y^2 = a^2 \quad \text{y} \quad X^2 + (Y - 2a)^2 = a^2.$$

Y, siendo $x_1$ é $y_1$ las coordenadas del punto $M$, la *polar* $AB$, ya definida, tendrá por ecuación

$$Xx_1 + Yy_1 = a^2;$$

y las de los puntos $K$, $x$ é $y$ satisfarán, en consecuencia, á estas otras relaciones:

$$x = x_1 \quad \text{y} \quad xx_1 + yy_1 = a^2; \quad \text{ó} \quad x = x_1 \quad \text{é} \quad y = \frac{a^2 - x^2}{y_1}.$$

Mas, por ser también $x_1$ é $y_1$ las coordenadas de un punto correspondiente á la circunferencia $C'$, deberá verificarse que

$$x_1^2 + (y_1 - 2a)^2 = a^2.$$

Pues por eliminación de estas coordenadas, $x_1$ é $y_1$, entre las tres últimas ecuaciones, hállase finalmente esta otra:

$$x^2 + \left(\frac{a^2 - x^2}{y} - 2a\right)^2 = a^2,$$

que coincide con la del *bicornio,* poco más atrás consignada y discutida

## XI

### LA CURVA K

**250.** Atribuyó AUBRY *(Journal de Mathématiques Spéciales,* 1895, *p.* 201) el nombre de *cappa,* K, á la curva dotada de la ecuación, en coordenadas polares,

$$\rho = a \operatorname{tang} \theta;$$

ó de esta otra, equivalente, en coordenadas cartesianas:

$$x^2 (x^2 + y^2) = a^2 y^2.$$

Esta curva fué ya considerada por BARROW en sus *Lectiones geometricæ,* publicadas por los años 1669, con el siguiente procedimiento para construirla.

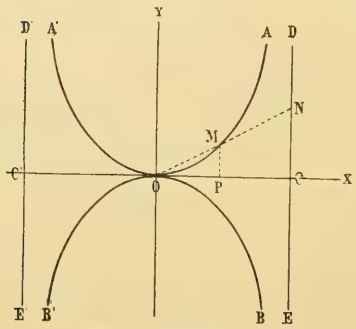


Figura 75.

Trácese (fig. 75) una recta *CD,* paralela al eje de las ordenadas, y á la distancia *a* del mismo eje; y sobre ella señálese el segmento *CN,* arbitrario. Tómese después sobre *ON,* á partir de *O,* el segmento *OM,* igual á *NC.* Y el lugar que describa *M,* cuando *CN* varíe, será la curva pedida.

**251.** Fácil es ver que esta curva tiene la forma indicada en la figura: simétrica relativamente á los ejes de las coordenadas; con dos ramas infinitas, *AOB* y *A'OB',* tangen-

tes al eje de las abscisas en el punto $O$; y dos asíntotas, $CD$ y $C'D'$, cuyas ecuaciones son $x = a$ y $x = -a$.

**252.** Las tangentes á la curva K pueden obtenerse muy fácilmente por el siguiente procedimiento, no advertido hasta ahora, que sepamos.

La ecuación general de las tangentes, referida á coordenadas polares, es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\theta - \theta_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' \operatorname{sen}(\theta - \theta_1),$$

representando por $\theta_1$ y $\rho_1$ las coordenadas del punto de contacto.

Aplicándola á la curva considerada, resulta

$$\frac{a}{\rho} = \frac{\cos\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_1}\cos(\theta - \theta_1) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_1}\operatorname{sen}(\theta - \theta_1).$$

Y poniendo en esta ecuación $\theta = 2\theta_1$, se deduce que

$$\frac{a}{\rho} = -\operatorname{sen}\theta_1.$$

Luego la tangente pasa por el punto cuyas coordenadas polares son $2\theta_1$ y $-\dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta_1}$; esto es, por el punto de intersección del vector correspondiente al ángulo $2\theta_1$ con la recta $\rho = -\dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta}$, ó $y = -a$ en coordenadas cartesianas.

**253.** El radio de curvatura de la curva considerada se halla expresado por la fórmula

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\theta\right)^{\frac{3}{2}} a}{(2 + \operatorname{sen}^2\theta)\cos^4\theta},$$

que en el punto $O$ se reduce á $R = \dfrac{1}{2}a$.

**254.** Y el área de la figura, limitada por el arco $OM$ de la curva y por las rectas $OP$ y $PM$, se desprende de la fórmula

$$A = \int_0^x \sqrt{\frac{x^4}{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}.$$

De la cual, cuando sea $x = a$, resulta:

$$A = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Luego *el área de la figura, comprendida entre la curva y una asíntota, es igual á la mitad del área del círculo de radio igual á a.*

## XII

### CONCOIDES FOCALES DE LAS CÓNICAS

**255.** Dada una *elipse*, si á partir de uno de sus *focos* se traza un haz de rectas divergentes, y sobre todas estas rectas, desde los puntos de sus respectivas intersecciones con la curva, se toma un segmento de longitud constante $h$, el lugar geométrico, determinado por los extremos de este segmento, se denomina *concoide focal* de aquella elipse: no por analogía de forma con la *concoide de Nicomedes*, ni menos de propiedades, sino por mera semejanza de trazado.

De la ecuación polar de la elipse, referida á un foco,

$$\rho_1 = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

se desprende, por definición, que á la *concoide* corresponde esta otra:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} + h. \tag{1}$$

en la cual $h$ representa una longitud constante, *positiva ó negativa;* y $p$ y $e$, en función de los semiejes $a$ y $b$ de la elipse, lo que sigue:

$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{y} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}.$$

Ó, en coordenadas cartesianas,

$$(x^2 + y^2 - hex)^2 = (x^2 + y^2)(p + h - ex)^2. \tag{2}$$

**256.** El estudio de la curva á que esta ecuación corresponde se faci-

lita comenzando por hallar sus *puntos múltiplos*, para lo cual basta igualar á *cero*, independientemente, las derivadas *parciales* de la misma ecuación, relativamente á $x$ é $y$. Y de esta manera se deduce que la curva posee *tres puntos duplos*, definidos por las expresiones siguientes:

$$(x=0, y=0);\ \text{y}\ \left[x=\frac{p+h}{e}=x_1,\ y=\pm\sqrt{\frac{(p+h)(he^2-p-h)}{e^2}}=\pm y_1\right].$$

Para hallar las tangentes á la curva en el punto $(x=0, y=0)$, hay que diferenciar dos veces la ecuación (2) con relación á $x$, considerando la $y$ como función de la misma $x$, y poner después en el resultado $x=0$ é $y=0$. Con lo cual los coeficientes angulares de las tangentes en este punto quedan determinados por la expresión

$$y'=\pm\sqrt{\frac{h^2e^2-(p+h)^2}{(p+h)^2}}:$$

de la cual, cuando

$$h^2e^2\gtrless(p+h)^2,\quad \text{ó}\quad b^2+2ah+h^2\lessgtr 0,\quad \text{ó}\quad (h+a+c)(h+a-c)\lessgtr 0,$$

se deducen *dos valores reales* para $y'$, iguales y de signos contrarios, esto es, en el caso de ser $h$ negativa y hallarse su valor absoluto comprendido entre $a-c$ y $a+c$, ó coincidir aquel valor con los de $a-c$ ó $a+c$. En los demás supuestos, los valores de $y'$ resultan *imaginarios*.

Luego *la curva posee un nodo en el origen de las coordenadas, cuando h es negativa y su valor absoluto se encuentra comprendido entre* $a-c$ *y* $a+c$; *y un punto de retroceso en el mismo origen, cuando* $h=c-a$ ó $h=-(a+c)$. En los demás casos, el origen representa *un punto aislado* de la curva.

Del análisis del radical que figura en la composición de $y_1$, se deduce que $y_1$ solamente será *real* cuando sean

$$p+h>0\quad \text{y}\quad he^2>p+h;\quad \text{ó}\quad p+h<0\quad \text{y}\quad he^2<p+h;$$
$$\text{ó}\quad p+h=0;\quad \text{ó}\quad he^2=p+h.$$

Las primeras dos desigualdades exigen que $h>-p$ y $h<-a$, una con otra incompatibles.

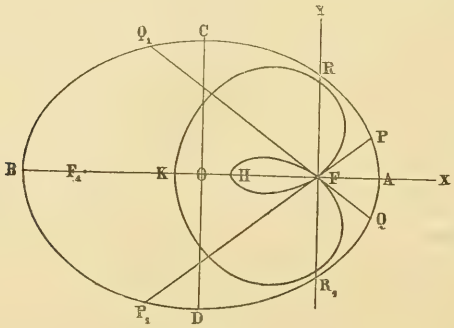
La tercera y cuarta que $h < -p$ y $h > -a$.

Y las dos últimas que $h = -p$ ó $h = -a$.

Luego los puntos $(x_1, \pm y_1)$ serán *puntos duplos reales* de la curva cuando $h$ sea *negativa* y su valor *absolulo* se halle comprendido entre $p$ y $a$; ó igual, en absoluto también, á una ú otra de estas dos cantidades.

La existencia de estos *puntos duplos reales* admite fácil explicación geométrica.

Cuando, en efecto, $h$ sea negativa y su valor absoluto se halle comprendido entre $a - c$ y $a + c$, ó entre $FA$ y $FB$, existen dos *vectores* de la elipse; $FP$ y $FQ$ (fig. 76), de longitudes iguales á la de $h$. Luego el *foco* $F$



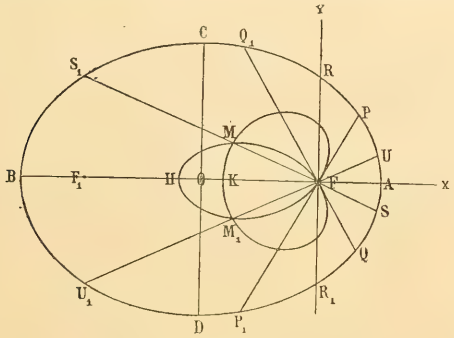

($h = AK = BH > FA$ y $< FB$).

Figura 76.

es un punto de la *concoide*, correspondiente á los puntos $P$ y $Q$ de la *elipse*. Y del mismo modo, cuando el valor absoluto de $h$ esté comprendido entre $p$ y $a$, ó $FR$ y $AO$ (fig. 77), existen dos cuerdas iguales de la elipse, $SS_1$ y $UU_1$, que pasan por el foco, y cuyo valor es igual al doble del valor absoluto de $h$, y los puntos medios $M$ y $M_1$ en la misma figura de estas cuerdas corresponden, en consecuencia, según el modo de construcción de la *concoide*, á los dos extremos de las mismas cuerdas, y constituyen así otros dos *puntos duplos*.

**257.** De lo que precede, y teniendo siempre en cuenta el modo de construir, con arreglo á su definición, la curva de que se trata, resulta que ésta admite varias formas.

Si $h$ es negativa y su valor absoluto se halla comprendido entre $a - c$ y $p$, ó entre $a$ y $a + c$, la curva, según lo acabado de exponer, presen-




$(h = AK = BH > FR$ y $< AO)$.

Figura 77.

tará la forma indicada en la figura 76. Y si el valor absoluto de $h$ está comprendido entre $p$ y $a$, la apuntada en la figura 77.

En ambos casos las abscisas de los puntos $H$ y $K$ son $x = a - c + h$ y $x = -(a + c + h)$; y las tangentes á la curva en el punto $F$ se hallan representadas por $FP$ y $FQ$.

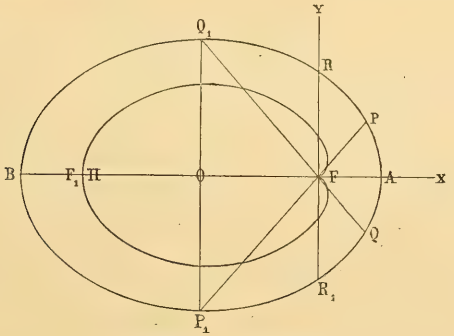



Figura 78. $(h = FA)$.

Si $h = c - a$ ó $h = -(c + a)$, el punto $H$ coincide con el $F_1$, y la curva presenta un *punto de retroceso* en $F$ (fig. 78).

Si $h = -p$ ó $h = -FR$, las tangentes $FP$ y $FQ$, ahora $FR$ y $FR_1$ (fig. 79), coinciden con el eje $y$ de las ordenadas. Y uno con otro los pun-

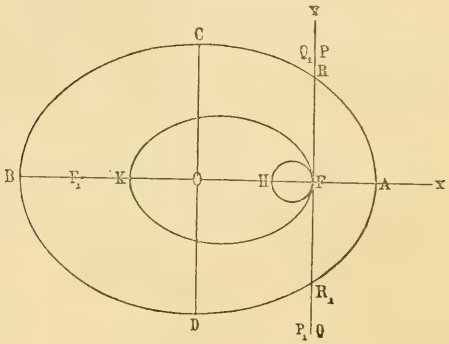



Figura 79. ($h = FR$).

tos $H$ y $K$ de la figura 80, que tenían por abscisas $FH = a - c + h$ y $FK = a + c + h$, cuando $h = -a$.

En los demás casos la curva es de figura ovalada, sin *puntos duplos reales*, pero siempre con un *punto aislado* en $F$.

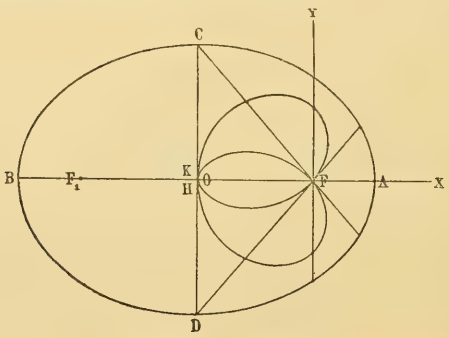



Figura 80. ($h = AO$).

**258.** Pasemos ahora al estudio de la *concoide focal de la hipérbola*. Como la ecuación *polar* de esta curva, por referencia á su foco, tiene por expresión

$$\rho_1 = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

en la cual, representando por $a$ y $b$ los semiejes, y por $p$ y $e$ el parámetro y la excentricidad,

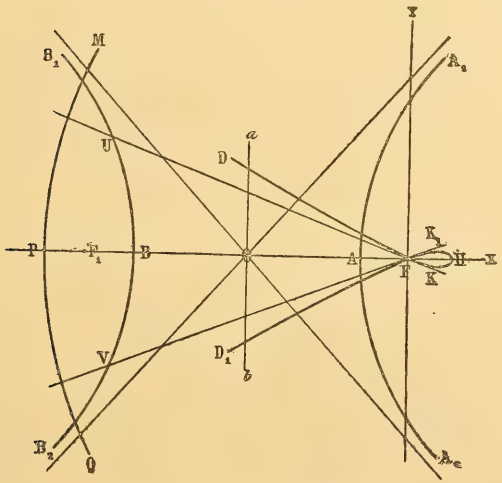
$$p = \frac{b^2}{a} \quad \text{y} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{c}{a},$$

la ecuación de su *concoide focal* será

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} + h:$$

ó, en coordenadas cartesianas,

$$(x^2 + y^2 - hex)^2 = (x^2 + y^2)\,(p + h - ex)^2.$$




$(h = AP = BH > FO + OB).$

Figura 81.

Procediendo ahora en el análisis de esta ecuación como se procedió en

el caso de la anterior, conclúyese que la curva presentará un *nodo* en el origen de las coordenadas cuando

$$b^2 + 2ah - h^2 < 0, \quad \acute{o} \quad (h - a - c)(h - a + c) > 0:$$

para lo cual es menester que sea

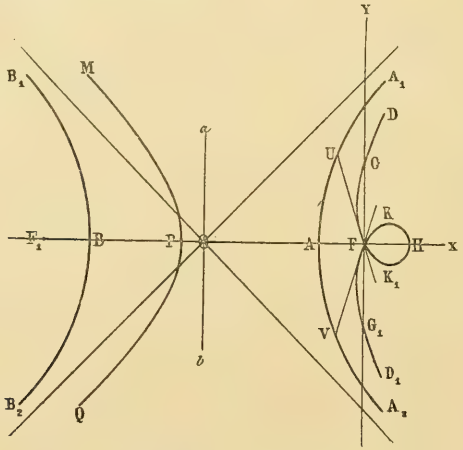
$$h > a + c \quad \acute{o} \quad h < a - c.$$

El *nodo* se reducirá á *punto de retroceso* cuando $h = a \pm c$, y á simple *punto aislado* en los demás casos.

Y con igual facilidad se concluye que los puntos

$$\left[x = \frac{p+h}{e} = x_1, \quad y = \pm\sqrt{\frac{(p+h)(he^2 - p - h)}{e^2}} = \pm y_1\right]$$

serán *puntos duplos reales* cuando $h \geq a$, y también cuando $h \leq -p$; é *imaginarios* en los demás casos.




($h = AII = BP > FA$).

Figura 82.

La curva se compone de dos ramas infinitas, correspondientes á las de la hipérbola, que una á otra se cortan cuando $h > a$; ó simplemente se

tocan, si $h = a$. Una de estas ramas, $MPQ$ (figs. 81, 82 y 83), asemé́jase á las de la hipérbola. Pero la otra, $DFKHK_1FD_1$, presenta la forma indicada en la figura 81, cuando $h > a + c$, ó en la 82, $DFK_1HKFD_1$, cuando $h < a - c$ y $h \gtreqless -p$; y la indicada en la figura 83, cuando $h < a - c$ y $h < -p$. Si fuese $h = a + c$, ó $h = a - c$, los puntos

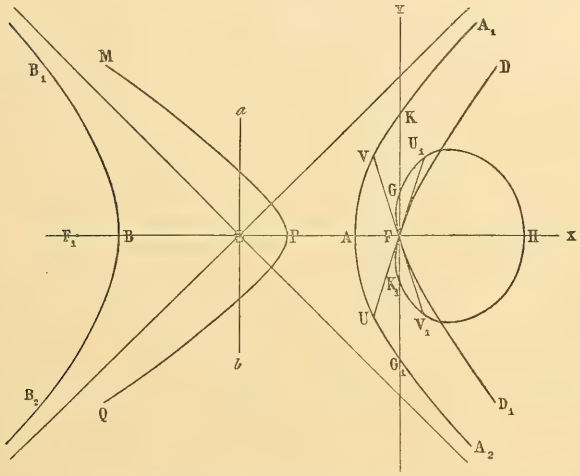



Figura 83. $(h = AH \lessgtr BP > FK)$.

$H$ y $F$ coincidirían uno con otro, y la rama de la curva presentaría un *punto de retroceso* en $F$, como en el caso de la elipse á que la figura 78 se refiere. Y, si es $h = -p$, la curva adquiere en las proximidades de $F$ una forma, que asimismo recuerda el caso de la *concoide elíptica*, representado en la figura 79, coincidiendo entonces las tangentes en $F$ con el eje de las ordenadas. En los demás casos, la segunda rama de la concoide se asemeja, como la primera, á una rama de la hipérbola de donde se derivan.

**259.** Consideremos ahora, más en particular, los casos de ser $h = -a$, tratándose de la *concoide elíptica;* y $h = +a$, por referencia á la hiperbólica.

La ecuación de las dos concoides se expresará entonces de este modo:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \mp a = \mp c\,\frac{c + a\cos\theta}{a + c\cos\theta},$$

la cual coincide con la de las curvas encontradas por JARABEK *(Mathesis, t.* v, *p.* 116), en la resolución del siguiente problema:

Representando por $M$, figura 84, un punto de una circunferencia de centro $C$; por $A$ otro punto fijo, tomado en el plano de la misma circunferencia; por $AK$ una perpendicular á la recta $AM$; y por $K$ el punto de intersección de la $AK$ con la $CM$, hallar el lugar geométrico descrito por $K$, cuando el $M$ varía de posición sobre la circunferencia y la describe por completo.

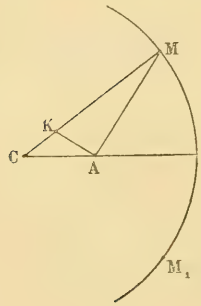


Figura 84.

Para deducir la ecuación de la curva así engendrada, designemos por $a$ el radio de la circunferencia, y por $c$ la distancia $CA$; y supongamos, por de pronto, que $c < a$, ó que el punto $A$ se halla comprendido dentro de la circunferencia.

Representando por $\rho$ y $\theta_1$ las coordenadas polares $CK$ y $KCA$, hállase que

$$\overline{KM}^2 = (a - \rho)^2 = \overline{AK}^2 + \overline{AM}^2.$$

Y como

$$\overline{AK}^2 = \rho^2 + c^2 - 2\rho c\cos\theta_1 \quad \text{y} \quad \overline{AM}^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta_1,$$

inmediatamente se deduce que

$$\rho = c\,\frac{c - a\cos\theta_1}{c\cos\theta_1 - a};$$

ó, poniendo $\theta_1 = \theta - \pi$,

$$\rho = -c\,\frac{c + a\cos\theta}{a + c\cos\theta}.$$

Luego la curva que satisface al problema propuesto es una *concoide elíptica*, correspondiente al supuesto de ser $h = -a$.

Y del mismo modo se concluiría que, cuando sea $c > a$, ó el punto $A$ se halle situado fuera de la circunferencia, al mencionado problema satisface la *concoide hiperbólica*, obtenida en el caso de ser $h = a$.

Las llamadas *curvas de* JARABEK fueron atentamente estudiadas por DEWULF, quien por primera vez demostró su conformidad con las dos concoides mencionadas *(l. c., p.* 113); así como NEUBERG *(l. c., p.* 115) hizo ver la frecuencia de su manifestación en distintos problemas de Geometría, de dos y de tres dimensiones.

**260.** De la *concoide focal de la parábola*, ya por incidencia se trató en el Núm. **74**, pág. 67, de este libro, donde vimos, poniendo ahora $2p$ por $a$, y $h$ por $k$, que su ecuación es como sigue:

$$(x^2 + y^2 + hx)^2 = (p + h + x)^2 (x^2 + y^2).$$

Ecuación que coincide con la que se desprende, en el supuesto de ser $e = -1$, de la correspondiente á la *concoide elíptica*.

Para hallar los *puntos duplos* de la nueva curva, bastará, pues, introducir en las fórmulas que determinan estos puntos en la primera, la hipótesis $e = -1$, y se hallará que la *concoide focal de la parábola* posee *un punto duplo*, en coincidencia con el foco: *nodo*, si $h < -\frac{p}{2}$; *punto de retroceso*, si $h = -\frac{p}{2}$; y *punto aislado*, cuando sea $h > -\frac{p}{2}$.

Como asimismo se concluye fácilmente que la curva tiene además otros *dos puntos duplos*

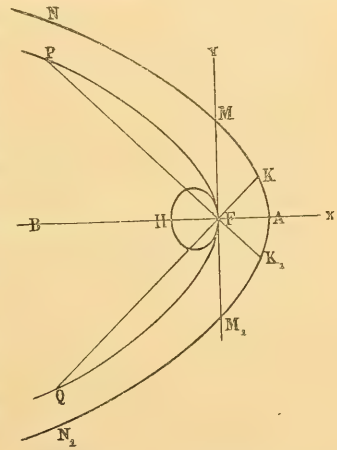



Figura 85. $(h = AH = p)$.

$$\left[x = -(p + h), \quad y = \pm\sqrt{-p(p + h)}\right]:$$

*reales*, cuando $h \gtrless -p$; é *imaginarios* en otro caso.

Dada la parábola $NMAM_1N_1$ (figs. 85, 86 y 87), con el *foco* en $F$, á la distancia éste, $FA$, del *vértice* $A$, igual á $\frac{p}{2}$, cuando sea $h > -\frac{p}{2}$, la *concoide parabólica* estará representada por *una sola rama* de apariencia,

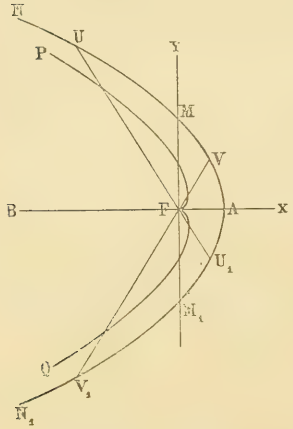



Figura 86. $(h = FA)$.

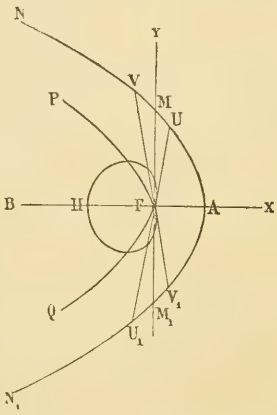



Figura 87. $(h = AH > FM)$.

ahora análoga á la curva á que se refiere, pero con *un punto aislado* en $F$, situado en la región interior de la misma parábola.

Cuando sea $h = -p$, la concoide adquiere la forma repsesentada en la figura 85, como desprendida de la 79 por prolongación indefinida del eje $AB$ de la elipse. Y forma análoga adquiere cuando $h$ está comprendida entre $-\frac{p}{2}$ y $-p$.

Si $h = -\frac{p}{2}$, la concoide, figura 86, presenta *un punto de retroceso* en $F$, como la *concoide elíptica* de la figura 78, en otro supuesto análogo.

Y si es $h < -p$, como $h = AH$, la concoide resultante será la representada en la figura 87, en *forma de lazada*, como la concoide hiperbólica de la figura 83.

De advertir es, en conclusión, que entre los modos de tender hacia lo infinito las ramas de las concoides hiperbólicas y de las parabólicas existe una diferencia esencial, por cuanto las concoides de la hipérbola poseen

dos asíntotas rectilíneas, que coinciden con las de la hipérbola á que se refieren, mientras que la concoide parabólica carece de asíntotas rectilíneas, á distancia finita. Por definición, sin embargo, resulta en cambio que la concoide del último nombre admite por asíntota curvilínea la misma parábola de donde procede.

## XIII

### BREVE NOTICIA DEL ORIGEN Y DESCUBRIMIENTO DE LA TEORÍA DE LAS CUÁRTICAS

**261.** Daremos punto á la reseña individual de las *cuárticas* más notables y de mayor interés que conocemos, someramente efectuada en los dos capítulos IV y V de este libro, cerrando el último, como complemento indispensable de todo lo expuesto en ambos, con algunas muy breves indicaciones de los trabajos de mayor valer referentes al origen y desenvolvimiento de la teoría general de aquellas curvas, y también, para satisfacción del curioso lector, de las obras donde se encuentran consignados.

El estudio, en conjunto y en los detalles, de las curvas de *cuarto orden* debe considerarse como continuación inmediata, y natural ampliación, del de las de *tercero,* iniciado éste y fundamentado, conforme ya en lugar oportuno se advirtió (pág. 98) por NEWTON en su célebre *Enumeratio.* Mas, por ser el nuevo estudio mucho más difícil y complejo que el primero, sus progresos no fueron tan rápidos como los en relativamente breve tiempo conseguidos en éste; y hoy es el día en que el capítulo de la *Geometría de las Curvas,* referente á las *cuárticas* en particular, no posee todavía una organización sistemática tan armónica y perfecta como el que trata de las cúbicas. Lo cual se comprende fácilmente, porque el número de las formas que es menester considerar en las primeras supera con grande exceso al de las segundas; las dificultades del análisis, discusión y clasificación ó agrupamiento razonado de aquéllas, muy superiores también á las que atañen á las segundas; y, aunque ambas clases de curvas posean propiedades hasta cierto punto comunes ó análogas, bien mirado el asunto, percíbense múltiples diferencias en los detalles, que por todo extremo complican la teoría de las cuárticas.

De las curvas de este nombre trataron, en primer término, MACLAURIN en su *Geometria Organica*, publicada en 1730; y casi á la vez BRAGELONGUE en tres distintas memorias, presentadas á la Academia de Ciencias de París por los años 1730, 1731 y 1732. Y, no mucho más tarde, insistieron en el mismo asunto, EULER en el capítulo XI del tomo II de su *Introductio in Analysim infinitorum*, y CRAMER en su *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes* (1750, pág. 369), donde se encuentran las primeras clasificaciones de aquellas curvas, fundadas, como la propuesta por NEWTON para las *cúbicas*, en la naturaleza de los puntos situados en lo infinito.

La clasificación de EULER fué de nuevo muy atentamente tomada en cuenta por PLÜCKER, y publicada, después de corregida de algunos errores inadvertidamente cometidos por aquel gran geómetra, su autor, en una memoria inserta en el tomo I del *Journal de Liouville*. Y, posteriormente, el mismo PLÜCKER incluyó otra nueva y mucho más perfecta clasificación de las *cuárticas*, basada en la naturaleza de los *puntos singulares*, en su *Theorie des algebraichen Curven*. (Bonn, 1839).

Pero quien estudió el problema de la enumeración sistemática de las formas que presentan las *cuárticas* con mayor profundidad, sutileza de ingenio, y riqueza en los detalles, fué ZEÜTHEN, en una importante memoria, publicada en el tomo VII, pág. 140 de los *Mathematische Annalen*. A la cual sirve de precioso complemento el opúsculo recientemente publicado en New-York por R. GENTRY, con el título de *On the forms of the Plane Quartic Curves:* en cuyas páginas con gran lucidez se exponen, amplían y comentan los trabajos del eminente geómetra dinamarqués, líneas antes mencionado.

En la clasificación de las *cuárticas*, discurrida por ZEÜTHEN, á que acabamos de referirnos, tómanse en consideración y desempeñan papel fundamental las *bitangentes* á las mismas curvas: *rectas singulares* que no existen en el caso de las *cúbicas*, pero que, por referencia al de las *cuárticas*, han servido de base para muy hermosos y fecundos trabajos, entre los cuales, por su importancia fundamental en el concepto matemático, merecen mencionarse el de STEINER, inserto en el tomo 49 del *Journal de Crelle*, y los de O. HESSE en los 49, 52 y 55 de la misma importante publicación periódica.

Á la clasificación de las *cuárticas* por medio de sus *puntos singulares*, á que acabamos de aludir, menester es que preceda un estudio profundo de estos puntos. Comenzando por advertir que, en el caso de las *cuárticas*, hay que tener en cuenta no solamente los *puntos singulares*, ya estudiados al tratar de las *cúbicas*, sino los de contacto de las *tangentes dobles:* á todos los cuales se aplica el nombre de *puntos singulares ordinarios;* y, además, otros puntos singulares de *orden más elevado.* La enumeración de estos nuevos puntos y determinación de la equivalencia de cada uno de ellos con un cierto número de *puntos ordinarios* son cuestiones previas, de resolución indispensable para proceder á la clasificación de las *cuárticas*, estudiadas con admirable perspicacia por CAYLEY en diversos trabajos, insertos en el tomo V de los *Mathematical Papers.*

Entre los problemas previos auxiliares, de mayor eficacia para penetrar luego con desembarazo en el estudio de las cuárticas, han preocupado, además, preferentemente la atención de ilustres geómetras el de la distribución en estas curvas de los *puntos de inflexión*, y el de la determinación del número de puntos *reales* de este nombre. Problema, el primero, sin solución satisfactoria hasta ahora, cuando las cuárticas carecen de *puntos duplos;* mas no tanto en el supuesto contrario, conforme demostró BRILL en diversas publicaciones interesantes, insertas en los *Mathematische Annalen (tomo* XII, *p.* 90; y XIII, *p.*$^s$ 103, 175 y 517). Así como en el análisis del segundo logró ZEÜTHEN deducir *(l. c.)* que las curvas de cuarto orden, *sin puntos duplos,* poseen *ocho de inflexión reales.*

A todo lo cual añadiremos, en conclusión, que quien desee profundizar, con relativa facilidad, en la materia de que tratamos, comenzando por enterarse de los trabajos en ella efectuados, y expuestos en orden y estilo didáctico, debe dedicarse seriamente al estudio de la obra magistral de SALMON, *Higher plane Curves,* tantas veces por nosotros ya citada, con merecido elogio siempre, y en la cual hallará el lector condensada la doctrina general y fundamental de las cuárticas, en muy meditado y substancioso capítulo.

# CAPÍTULO SEXTO

## SÉXTICAS Y BICUÁRTICAS MAS NOTABLES

### I

### LA CURVA DE WATT

**262.** Entre las curvas de *quinto orden, ó quínticas,* no estudiadas sistemáticamente todavía, no conocemos ninguna dotada de nombre propio y verdaderamente notable por sus propiedades, ora en el concepto teórico, ya por la importancia y alcance de sus aplicaciones. Y otro tanto podemos decir á propósito de las de *séptimo.*

Por lo cual prescindimos de todas ellas, y pasamos á tratar abreviadamente de las *séxticas* más notables, tampoco numerosas, comenzando por la titulada *curva de* WATT, y de alguna de *octavo orden, bicuártica,* merecedora también de particular estudio.

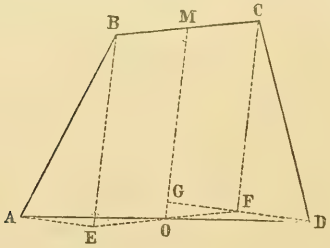


Figura 88.

La *curva de* WATT, engendrada por el punto medio $M$ del lado $BC$ de un *cuadrilátero articulado, ABCD* (fig. 88), cuyo lado $AD$ permanece fijo, mientras los $AB$ y $CD$, de igual longitud, articulados en $A$ y $B$ el primero, y el segundo en $C$ y $D$, varían de posición. Esta figura desempeña, en efecto, interesante papel en el artificio cinemático para las transmisiones del movimiento en las Máquinas de Vapor, imaginado á fines del siglo pasado por el célebre ingeniero de aquel nombre.

En la teoría de la curva de WATT se han ocupado varios muy distingui-

dos geómetras: como PRONY, antes que otro alguno, en su *Nouvelle Architecture Hydraulique (Paris,* 1796); HACHETTE, en su *Histoire des Machines à vapeur,* el cual presentó la ecuación de la curva sin descender á su minuciosa análisis; VINCENT, en las *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Lille,* 1837; S. ROBERTS, CAYLEY y CLIFFORD, en los *Proceedings of London Mathematical Society* (años 1876 y 1878); LACOLONGE, en las *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux* (1885, *p.* 101); etc., etc.

**263.** La ecuación de la curva de WATT se puede hallar por el siguiente muy sencillo procedimiento, propuesto por CATALAN *(Mathesis,* 1885, *p.* 154).

Sean *MO* la recta que pasa por el medio de *BC* y *AD; BE* y *CF* dos paralelas á *MO;* y *EF* una paralela á *BC.* Como sin dificultad se advierte que los triángulos *AEO* y *OFD* son iguales, é iguales también, por consecuencia, las rectas una á otra paralelas, *AE* y *FD,* conclúyese de aquí que los triángulos *AEB* y *FCD* serán iguales asimismo.

De donde resulta que los ángulos *AEB* y *DFC* son parecidamente iguales; y como, por la disposición de sus lados, además de iguales son suplementarios uno de otro, ambos serán necesariamente rectos.

Esto sentado, supongamos que $AO = a$, $BM = c$ y $AB = b$; y que $\rho$ y $\theta$ representan las *coordenadas polares, OM* y *MOD,* del punto *M,* generador de la curva de que se trata, referidas al punto *O* como *polo,* y á la recta *OD* como *eje.*

De los triángulos rectángulos *CDF, ODG* y *OFG* se desprenden estas igualdades:

$$\rho^2 = b^2 - \overline{FD}^2, \quad DG = a \operatorname{sen}\theta, \quad \text{y} \quad FG = \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2\theta}.$$

Luego, para *ecuación polar de la curva de Watt* deduciremos la que sigue:

$$\rho^2 = b^2 - \left[a \operatorname{sen}\theta - \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2\theta}\right]^2,$$

debiendo variar $\theta$ desde $-\pi$ hasta $\pi$; ó

$$\rho^2 = b^2 - \left[a \operatorname{sen}\theta \pm \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2\theta}\right]^2,$$

en la cual basta que $\theta$ varíe desde 0 hasta $\pi$.

Y de ésta, poniendo $x = \rho \cos\theta$ é $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, y suprimiendo el factor común $x^2 + y^2$, se deduce la siguiente, de *sexto grado,* en coordenadas cartesianas (LACOLONGE: *l. c.*):

$$(y^2 + x^2)^3 - 2B^2(x^2 + y^2)^2 + (B^4 + 4a^2y^2)(x^2 + y^2) - 4a^2b^2y^2 = 0,$$

donde

$$B^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

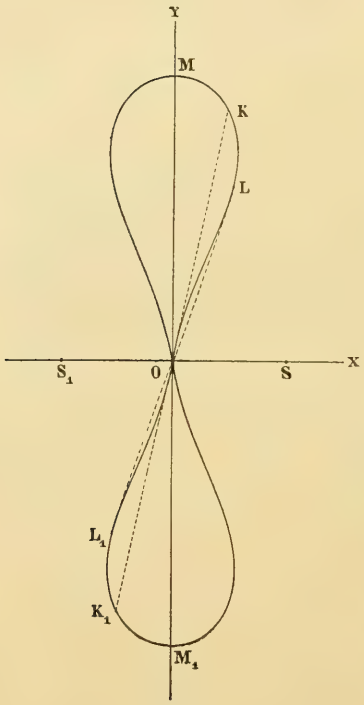



Figura 89.

**264.** Por medio de la ecuación polar de la curva de WATT, y atendiendo á su modo de generación, hállase fácilmente su forma, fig. 89, infiriéndose en primer lugar: que la curva es simétrica por referencia á los dos ejes coordenados; que corta perpendicularmente al de las ordenadas en dos puntos reales, $M$ y $M_1$, dados por la ecuación

$$\rho^2 = b^2 - (a - c)^2,$$

y en dos *imaginarios,* y también al de las abscisas en otros dos puntos, $S$ y $S_1$, definidos por la ecuación

$$\rho^2 = a^2 + b^2 - c^2 = B^2,$$

donde las tangentes forman con el eje de las abscisas ángulos, $\omega$, determinados por la expresión

$$\operatorname{tang}\omega = \pm \frac{B^2}{a\sqrt{c^2 - a^2}},$$

y los cuales, suponiendo, como en el problema mencionado de Mecánica se supone, que $a > c$, son *reales*, pero *aislados;* y que no posee ramas infinitas. Y, en segundo lugar, que la figura de la curva se asemeja á la de las lemniscatas, cuando los lados del cuadrilátero pueden tomar la posición indicada en la figura 90, coincidiendo el punto medio de $BC$ con el $O$: lo cual solamente se verificará cuando las tres rectas $a$, $b$ y $c$ puedan formar un triángulo.

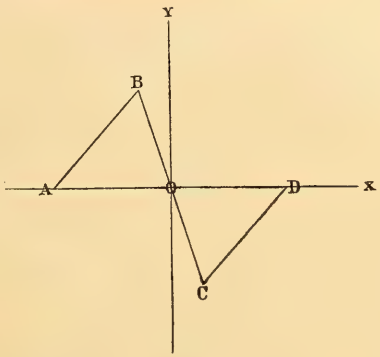


Figura 90.

Considerando, con Watt, solamente este caso, de inmediata aplicación en la Teoría de las Máquinas de Vapor, procuremos hallar, por medio de la ecuación polar de la curva, los valores de $\theta$, cuando $\rho = 0$. Si por $\theta'$ se designan estos valores particulares, la fórmula

$$\operatorname{sen}\theta' = \frac{B^2}{2ab},$$

servirá para determinar los ángulos de las tangentes á la curva, en el origen, con el eje de las abscisas. Pero adviértase bien que á cada valor de $\theta'$, dado por esta ecuación, corresponden, además del valor $\rho = 0$, estos otros valores, dados por la ecuación

$$\rho^2 = \frac{b^4 - (a^2 - c^2)^2}{b^2} = \frac{(b^2 - a^2 + c^2)(b^2 + a^2 - c^2)}{b^2};$$

*reales* cuando se supone, como también en el problema á que nos referimos se admite, que $b^2 + c^2 > a^2$. Conclúyese, pues, que cualquier tangente á la curva de Watt, en el origen de las coordenadas, la corta además en dos puntos, $K$ y $K_1$ (fig. 89).

Para hallar el punto $L$, donde el radio vector forma con $Ox$ un ángulo *mínimo*, nos valdremos de la ecuación

$$c^2 = a^2 \cos^2 \theta;$$

la cual expresa que los dos valores de $\rho$, correspondientes á un valor determinado de $\theta$, son iguales en este caso. Representando, pues, por $\theta''$ este ángulo, resulta

$$\cos\theta'' = \frac{c}{a}.$$

El valor de $\rho$ en el punto $L$ se desprende de la fórmula

$$\rho^2 = b^2 + c^2 - a^2.$$

La curva de WATT tiene dos puntos de inflexión reunidos en su centro. Otro, evidentemente, de inflexión también, entre $O$ y $L$. Y tres más, correspondientes á éste, en los otros tres cuadrantes.

**265.** En la aplicación de la curva de WATT á las Máquinas de Vapor es necesario dar á los lados del cuadrilátero longitudes tales que la curva se desvíe poco de su eje. Y el procedimiento propuesto por el inventor para conseguirlo, fué el de hacer pequeño el ángulo de las rectas $OK$ y $OL$, prolongando en lo posible la forma alargada de las inflexiones en el punto $O$. Por lo cual desígnanse muchas veces las curvas de esta especie con el nombre de *curvas de larga inflexión.*

**266.** En el precedente análisis de la ecuación de la curva considerada se ha supuesto que las constantes que en ella figuran han de satisfacer á determinadas condiciones del problema mecánico á que se refiere. Pero, aun en el caso de no satisfacer á condición alguna restrictiva, el estudio de aquella ecuación se efectúa del mismo modo, habida cuenta de las siguientes consideraciones, relacionadas con la naturaleza de los puntos singulares que la curva posee.

1.ª El *origen* de las coordenadas es un *punto duplo*, en el cual las tangentes forman con el eje de las abscisas ángulos, cuyos valores, $\theta'$, tienen por expresión

$$\operatorname{sen}\theta' = \pm \frac{B^2}{2ab};$$

debiéndose emplear el signo + cuando $B^2$ sea positivo, y el — en el caso contrario.

La curva poseerá, pues, en el origen un *nodo*, si $4a^2b^2 > B^4$; y un punto *aislado* cuando sea $4a^2b^2 < B^4$.

2.ª Los puntos $(\pm B, 0)$ son *duplos*, y las tangentes en ellos á la curva forman con el eje de las abscisas los ángulos $\omega$, que se desprenden de esta fórmula:

$$\operatorname{tang}\omega = \pm \frac{B^2}{a\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Por lo tanto, cada uno de estos puntos representará un *nodo real* cuando $B^2 > 0$ y $c > a$; un *nodo imaginario* cuando $B^2 < 0$ y $c > a$; y un *punto aislado* cuando $c < a$.

A todo lo cual conviene agregar que las asíntotas de la curva admiten por ecuaciones las que siguen:

$$y = \pm ix; \quad y = \pm i(x + a); \quad \text{ó} \quad y = \pm i(x - a).$$

De las cuales se desprende, por conclusión, que *la curva tiene dos puntos triplos imaginarios situados en lo infinito.*

## II

### LA ASTROIDE

**267.** Recibe el nombre de *astroide* la curva envolvente de las rectas que cortan á los lados de un ángulo recto, de tal modo, que la longitud del segmento $ao$, limitado por aquellos lados (fig. 91), sea constante.

Para hallar la ecuación de la curva, tomemos como ejes de las coordenadas los lados del ángulo, y advirtamos que la ecuación de la recta móvil, poniendo $Oo = \beta$, $Oa = \alpha$ y $ao = l$, tiene por expresión

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1,$$

debiendo $\alpha$ y $\beta$ satisfacer á la condición siguiente:

$$\alpha^2 + \beta^2 = l^2.$$

La ecuación de la envolvente pedida resulta de la eliminación de $\alpha$, $\beta$ y $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre estas ecuaciones y las

$$-\frac{x}{\alpha^2} - \frac{y}{\beta^2}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad \text{y} \quad \alpha + \beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

que se obtienen derivando las anteriores, relativamente á $\alpha$, y considerando á $\beta$ como función de $\alpha$. Para efectuar esta eliminación, notemos que las dos últimas ecuaciones dan

$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3};$$

de manera que, poniendo

$$\frac{x}{\alpha^3} = \frac{y}{\beta^3} = \lambda,$$

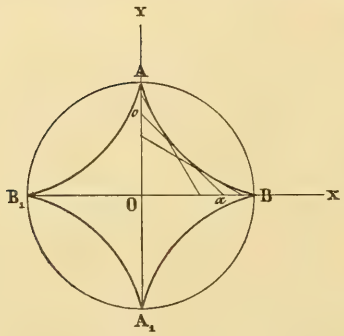



Figura 91.

la ecuación $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ se convierte en esta otra:

$$\lambda\,\alpha^2 + \lambda\,\beta^2 = 1;$$

y de la ecuación $\alpha^2 + \beta^2 = l^2$ se deduce luego que $\lambda = \frac{1}{l^2}$.

En consecuencia:

$$\alpha = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} = (l^2\,x)^{\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad \beta = \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} = (l^2\,y)^{\frac{1}{3}};$$

y, por lo tanto,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}, \tag{1}$$

que es precisamente la ecuación buscada de la *astroide*.

Ecuación de 6.° grado, en realidad, que puede escribirse de este modo:

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 + 27 l^2 x^2 y^2 = 0.$$

**268.** Partiendo de la ecuación (1), y teniendo presentes las ecuaciones

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{é} \quad y'' = -\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{xy' - y}{x^2},$$

cosa fácil es determinar la forma de la curva: simétrica, relativamente, á los ejes de las coordenadas; con cuatro *retrocesos* (fig. 91) en los puntos $A$, $A_1$, $B$, $B_1$, colocados á la distancia $l$ del centro $O$; y sin puntos de inflexión.

**269.** La ordenada $Y_0$ del punto en que la tangente corta el eje de las ordenadas, la subtangente, la subnormal, y las longitudes de la tangente y de la normal, se hallan expresadas por las fórmulas

$$Y_0 = (l^2 y)^{\frac{1}{3}}; \quad S_t = -(y^2 x)^{\frac{1}{3}}; \quad S_n = -\left(\frac{y^4}{x}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$T = (y^2 l)^{\frac{1}{3}}; \quad \text{y} \quad N = y\left(\frac{l}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

**270.** Comparando la ecuación de la tangente á la astroide,

$$Y + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} X - (l^2 y)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

con la ecuación

$$u\,Y + v\,X + 1 = 0,$$

hállanse las relaciones

$$u = -(l^2 y)^{-\frac{1}{6}} \quad \text{y} \quad v = -(l^2 x)^{-\frac{1}{3}};$$

y con esto la ecuación de la curva, en coordenadas cartesianas, poco antes consignada, se transforma en esta otra, en coordenadas tangenciales,

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = l^2:$$

de la cual se deduce que la curva á que se refiere es de *cuarta clase.*

**271.** De la fórmula general, adecuada al objeto, dedúcese la siguiente expresión del radio de curvatura de la astroide:

$$R^3 = 27\, l\, x\, y,$$

según la cual, *el cubo del radio de curvatura de la astroide en el punto* $(x, y)$ *es proporcional al rectángulo de las coordenadas del mismo punto.*

**272.** Para hallar la *evoluta* de la *astroide* por muy sencillo procedimiento, adviértase que la *astroide* admite por ecuaciones las siguientes

$$(2) \qquad x = l \operatorname{sen}^3 t \quad \text{é} \quad y = l \cos^3 t:$$

en las cuales $t$ representa una nueva variable independiente, por cuanto los valores de $x$ é $y$, así expresados, satisfacen evidentemente á la (1), cualquiera que sea el de $t$.

Partiendo de estas ecuaciones, y aplicando las fórmulas adecuadas al objeto, demostradas en el Cálculo Diferencial, hállase que las coordenadas, $x_1$ é $y_1$, del *centro de curvatura*, correspondiente al punto de la curva $(x, y)$, se hallan determinadas por estas otras expresiones:

$$x_1 = l \operatorname{sen}^3 t + 3l \cos^2 t \operatorname{sen} t \quad \text{é} \quad y_1 = l \cos^3 t + 3l \operatorname{sen}^2 t \cos t.$$

Y cambiando ahora de ejes coordenados, y adoptando para los nuevos las bisectrices de los ángulos formados por los primitivos, encuéntranse estas igualdades:

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - y_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} l\,(\operatorname{sen} t - \cos t)^3 = 2l \operatorname{sen}^3\left(t - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{é}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} l\,(\operatorname{sen} t + \cos t)^3 = 2l \cos^3\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ó, suponiendo que $t = t_1 + \frac{\pi}{4}$,

$$x_2 = 2l \operatorname{sen}^3 t_1 \quad \text{é} \quad y_2 = 2l \cos^3 t_1.$$

Ecuaciones éstas correspondientes á la *evoluta de la astroide*, según las cuales la nueva curva es *otra astroide con el mismo centro que la primitiva, é inscripta en un círculo, de radio doble de aquel á que la primitiva se refería.* Con la particularidad de que *las rectas que pasan por su centro y por los puntos de retroceso forman ángulos de 45° con las rectas análogas, correspondientes á la primera astroide, de donde procede la segunda.*

**273.** Para determinar el área, limitada por la astroide, por el eje de las abscisas, y por las ordenadas de los puntos cuyas abscisas son 0 y $x$, emplearemos la fórmula

$$A = \int_0^x \sqrt{\left(l^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}\, dx;$$

de la cual, poniendo $x^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}} t^2$, se deduce este resultado:

$$A = 3\, l^2 \int_0^t t^2 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} l^2 \left[ -\sqrt{1 - t^2} \left( t^5 - \frac{7}{4} t^3 + \frac{3}{8} t \right) + \frac{3}{8} \operatorname{arc\,sen} t \right].$$

De donde se concluye para expresión del área total, limitada por la astroide, poniendo $t = 1$, y multiplicando el resultado por 4, la siguiente: $\frac{3}{8} \pi l^2$.

**274.** La rectificación del arco de la astroide, comprendido entre los puntos que tienen por abscisas 0 y $x$, se obtiene por medio de esta otra fórmula:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}\, dx = \int_0^x \left(\frac{l}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} (lx^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Luego el *cubo de la longitud del arco de astroide, comprendido entre los puntos* $(0, l)$ *y* $(x, y)$, *es proporcional al cuadrado de la abscisa* $x$.

(Haton de la Goupillière: *Journal de l'École Polytechnique, Paris,* xliii, *p.* 141).

Y la longitud de un cuadrante de la curva es igual á $\frac{3}{2}\,l$ (Juan Bernoulli: *Opera omnia, t.* iii, *p.* 446).

**275.** En el lugar acabado de citar de sus obras, estudió el mismo Juan Bernoulli la astroide, basándose en la definición del Núm. **267**, y halló su ecuación, su forma y su longitud.

Trató de ella también d'Alembert en las *Memorias de la Academia de Berlín,* año 1747, y después en sus *Opúsculos* (*t.* iv, xxiii).

Amstein (*Société vaudaise des Sciences Naturelles, t.* xv, *p.* 175), le dió el nombre que la distingue, y que recuerda su forma.

Y por parte de otros geómetras ha sido objeto con posterioridad de interesantes estudios, referentes muchos á sus distintos modos de generación, según puede verse en la curiosa noticia sobre la materia, publicada por Haton de la Goupillière *en los Nouvelles Annales des Mathématiques* (*2.ª serie, t.* xiii, *p.* 534; y *t.* xix, *p.* 94).

De aquellos modos de generación, que constituyen otras tantas definiciones de la curva, mencionaremos los siguientes:

1.° La envolvente de las elipses, dotadas del mismo centro y con ejes en la misma dirección, siempre que la suma de estos ejes permanezca además constante, es una *astroide* (Desgranges, *Nouvelles Annales des Mathématiques, 1.ª serie, t.* xx, *p.* 351).

2.° La *astroide* es también el lugar geométrico del vértice de una parábola, que se desliza entre dos rectas perpendiculares entre sí, deformándose al propio tiempo, de tal modo que el foco describa una circunferencia alrededor del punto de intersección de aquellas rectas (Bispal, *Nouvelles Annales des Mathématiques, 2.ª serie, t.* iv, *p.* 331).

3.° *Astroide* asimismo es el lugar de los puntos que tienen por coordenadas rectangulares los radios de curvatura de la elipse en las extremidades de sus diámetros conjugados (Brassine, *Nouvelles Annales des Mathématiques, 2.ª serie, t.* ii, *p.* 12).

4.° Y *astroide,* finalmente, la curva descrita por un punto de una circunferencia, que rueda, sin resbalar, sobre otra circunferencia fija, exterior á ella y de radio cuatro veces mayor que la móvil. Como se verá cuando tratemos de las curvas que admiten este modo de generación *(epicicloides).*

Apoyándose en este último modo de generación de la curva, la astroide fué designada por MONTUCCI *(Comptes rendus de l'Académie de Paris, t.* LX, *p.*$^{s}$ 440, 846) con el nombre de *cubo-cicloide.*

A los procedimientos de generación mencionados, todavía podrían agregarse los muy curiosos propuestos por PIGEON *(Nouvelles Annales des Mathématiques, 2.ª serie, t.* III, *p.* 60); por LEMOINE *(l. c., t.* XIII, *p.* 334); y por BARBARIN *(l. c., t.* XIV, *p.* 328): etc., etc.

## III

### LAS CURVAS PARALELAS Á LA ASTROIDE

**276.** Denomínanse, en general, *curvas paralelas* á otra curva cualquiera las obtenidas tomando sobre las *normales* á ésta, en uno ú otro sentido, segmentos de longitud arbitraria $h$, constante en cada caso. De esta definición resulta que entre los *radios de curvatura* de ambas curvas consideradas, $R$ de la propuesta, y $R_1$ de la en particular deducida por el indicado procedimiento, existe la relación $R_1 = R \pm h$.

Cuando la curva fundamental es una *astroide,* las *curvas paralelas* poseen algunas propiedades interesantes, que han fijado la atención de insignes geómetras, y que, por lo mismo, consideramos aquí dignas de estudio.

De las ecuaciones de la *astroide*

$$(1) \qquad x = l \operatorname{sen}^3 t \quad \text{é} \quad y = l \cos^3 t$$

dedúcese que $\frac{dy}{dx} = -\cot t$; y, por lo tanto, que $t$ representa el ángulo formado por la normal á la curva con el eje de las abscisas.

Y como las *curvas paralelas á la astroide* se forman tomando sobre cada una de las normales, á partir del punto á que corresponden, un segmento de longitud constante, $h$, conclúyese que las coordenadas de aquellas *curvas paralelas* se hallarán expresadas de este modo:

$$(2) \qquad x = l \operatorname{sen}^3 t + h \cos t \quad \text{é} \quad y = l \cos^3 t + h \operatorname{sen} t.$$

**277.** De estas ecuaciones fácil es inferir la forma de cualquiera de las

curvas que representan, dotadas todas, por definición, de *ejes de simetría,* en coincidencia con los rectangulares de las coordenadas, y desprovistas todas de *ramas infinitas reales.*

De sus *derivadas,* con relación á $t$, dedúcese, en efecto, que

$$\frac{dx}{dt} = 3l \operatorname{sen}^2 t \cos t - h \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = -3l \cos^2 t \operatorname{sen} t + h \cos t;$$

y esto basta para demostrar que las curvas de que se trata poseen *cuatro puntos de retroceso,* correspondientes á los valores de $t$, determinados por la ecuación

$$3l \operatorname{sen} t \cos t = h, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} 2t = \frac{2h}{3l};$$

*reales,* cuando $4h^2 \gtrless 9l^2$; *é imaginarios,* en el supuesto contrario.

Y como la *astroide,* de donde proceden, carece de *puntos de inflexión,* también de ellos carecerán las *curvas paralelas,* de forma *oval convexa,* siempre que sea $4h^2 > 9l^2$, y de la forma indicada en la figura 92, $M\,M_1\,M_2\,M_3$, en los demás casos.

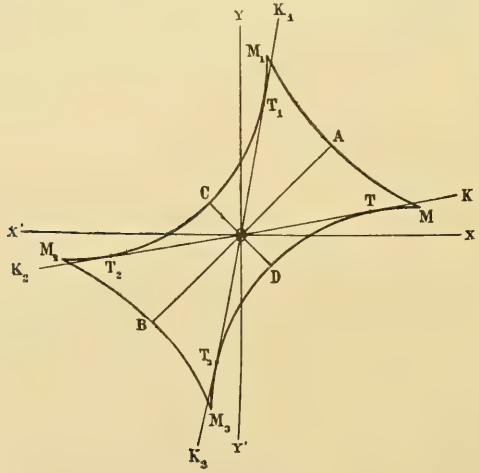



Figura 92.

**278.** Para continuar el estudio de las curvas mencionadas, propongámonos ahora hallar la longitud del segmento determinado, sobre una tangente cualquiera, por los puntos de intersección de esta tangente con las rectas á que corresponden las siguientes ecuaciones:

$$Y = X \operatorname{tang}\beta \quad \text{é} \quad Y = X \operatorname{tang}\beta'.$$

Como la tangente considerada tiene por ecuación

$$Y - (l\cos^3 t + h \operatorname{sen} t) = -\cot t\,[X - l\operatorname{sen}^3 t - h\cos t],$$

las coordenadas de aquellos puntos $(X_1, Y_1)$ y $(X_2, Y_2)$ serán

$$X_1 = \frac{(l\operatorname{sen} t\cos t + h)\cos\beta}{\cos(\beta - t)} \quad \text{é} \quad Y_1 = \frac{(l\operatorname{sen} t\cos t + h)\operatorname{sen}\beta}{\cos(\beta - t)}, \quad \text{y}$$

$$X_2 = \frac{(l\operatorname{sen} t\cos t + h)\cos\beta'}{\cos(\beta' - t)} \quad \text{é} \quad Y_2 = \frac{(l\operatorname{sen} t\cos t + h)\operatorname{sen}\beta'}{\cos(\beta' - t)}.$$

Y la longitud, $\Delta$, del segmento de tangente, comprendida entre ambos puntos, se hallará expresada por la fórmula

$$\Delta = \frac{(l\operatorname{sen} t\cos t + h)\operatorname{sen}(\beta - \beta')}{\cos(\beta - t)\cos(\beta' - t)}.$$

**279.** Condición necesaria y suficiente para que las rectas consideradas limiten, en todas las tangentes á una cualquiera de las *curvas paralelas á la astroide,* una longitud constante, $\Delta$, es que cualquier valor de $t$ satisfaga á la siguiente relación, consecuencia inmediata de la fórmula que acaba de obtenerse:

$$\operatorname{sen}(\beta - \beta')(l\operatorname{sen} t\cos t + h) = \Delta\,[\cos\beta\cos\beta' - \cos(\beta + \beta')\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}(\beta + \beta')\operatorname{sen} t\cos t].$$

La cual se resuelve en estas tres ecuaciones condicionales:

$$(3) \qquad h\operatorname{sen}(\beta - \beta') = \Delta\cos\beta\cos\beta', \quad \operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\beta' = 1, \quad \text{y}$$

$$l\operatorname{sen}(\beta - \beta') = \Delta\operatorname{sen}(\beta + \beta').$$

Para determinar el valor de $\beta$, eliminaremos en la última ecuación los de $\beta'$ y $\Delta$ con auxilio de las dos primeras, y así se obtendrá la que sigue:

$$h \operatorname{tang}^2 \beta - l \operatorname{tang} \beta + h = 0, \tag{4}$$

de la cual se deduce que

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4h^2}}{2h}.$$

Y de análoga manera se hallaría por eliminación, también en la última de las (3), de las $\beta$ y $\Delta$, que

$$\operatorname{tang} \beta' = \frac{l \mp \sqrt{l^2 - 4h^2}}{2h}.$$

Luego $\operatorname{tang} \beta$ y $\operatorname{tang} \beta'$ son las dos raíces de la ecuación (4).

Y así, determinados los valores de $\beta$ y $\beta'$, de la primera ecuación (3) se concluirá sin dificultad el de $\Delta$.

De todo lo cual se deduce que, *dada una paralela á la astroide, existen dos rectas que, por sus intersecciones con las tangentes á la curva, determinan segmentos de longitud constante.*—Rectas, entiéndase bien, *reales,* cuando $l^2 > 4h^2$; *imaginarias,* si $l^2 < 4h^2$; y coincidentes una con otra, cuando $l^2 = 4h^2$.

Como asimismo se concluye que, *en el caso de ser* $l^2 > 4h^2$, *cualquier curva paralela á la astroide es envolvente de una recta, móvil de manera que la longitud de un segmento de esta recta, comprendido entre otras dos rectas fijas, permanezca constante.*

**280.** Con igual facilidad se deduce de los antecedentes expuestos que, recíprocamente, *la envolvente de una recta, móvil de manera que permanezca constante el segmento suyo, comprendido entre otras dos rectas dadas, que una á otra se corten, es una paralela á la astroide.*

Pues, en efecto, adoptando para eje de las abscisas la recta que pasa por el punto de intersección de las otras dos rectas mencionadas y forma un ángulo de 45° con la bisectriz del ángulo $2\alpha$ de estas mismas rectas, y designando por $\beta$ y $\beta'$ los ángulos que una y otra forman también con el eje de las abscisas, tendremos que

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha \quad \text{y} \quad \beta' = \frac{\pi}{4} + \alpha.$$

Luego estos ángulos, $\beta$ y $\beta'$, satisfacen á la segunda de las ecuaciones (3); y, si por $\Delta$ representamos la longitud constante del segmento, las primera y tercera de aquellas ecuaciones determinarán los valores de $h$ y $l$. Y la curva buscada, resultará así paralela á la *astroide*, determinada por las ecuaciones

$$x = \frac{\Delta}{\operatorname{sen} 2\alpha} \operatorname{sen}^3 t \quad \text{é} \quad y = \frac{\Delta}{\operatorname{sen} 2\alpha} \cos^3 t;$$

y la distancia de sus puntos á los correspondientes de esta astroide lo estará por la expresión

$$h = -\Delta \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\operatorname{sen} 2\alpha} = -\frac{1}{2} \Delta \cot 2\alpha.$$

**281.** Las envolventes de las rectas, secantes de los lados de un ángulo cualquiera, en términos de que los segmentos de las mismas, comprendidos entre los lados del ángulo, sean de longitud constante, fueron por vez primera estudiadas, en los tomos I y V de los *Nouvelles Annales des Mathématiques*, por MERLIEUX y JOACHMISTHAL.

SALMON *(Higher plane Curves*, 3.ª ed., n.º 118), advirtió su relación con las *curvas paralelas á la astroide;* y algunos autores, fijando la atención en sus *cuatro puntos de retroceso reales* á distancia finita, les dieron el nombre de *tetracúspides.* Nombre que nosotros, en un artículo publicado en el tomo I (serie 2.ª) de *El Progreso Matemático* (Zaragoza, 1899), propusimos sustituir por el de *astroides de dos ejes* cuando $\alpha \gtrless \frac{\pi}{4}$, y por el de *astroide de cuatro ejes* cuando se trate, en particular, de la curva correspondiente al supuesto de ser $\alpha = \frac{\pi}{4}$. De la cual son, efectivamente, ejes las rectas que pasan por su centro, y también por cada par de puntos de retroceso opuestos con relación al mismo centro, y asimismo las bisectrices de los ángulos formados por estas rectas.

**282.** El área de la curva, representada por las ecuaciones (2), se determina con auxilio de la fórmula

$$A=\frac{1}{2}\int_0^t\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\left(-h^2\frac{3}{8}l^2\right)t$$

$$+\frac{hl}{4}\cos 2t-\frac{3}{64}\operatorname{sen}^4 t-\frac{hl}{4}.$$

De la cual, para expresión del área total, limitada por la curva, se desprende esta otra:

$$A=\pi\left(h^2-\frac{3}{8}\,l^2\right).$$

Y también la longitud de los arcos de la misma curva puede fácilmente obtenerse, apoyándose en la ecuación

$$\frac{ds}{dt}=\pm\,(3l\operatorname{sen}t\cos t-h).$$

Pues, designando por $t_1$ y $t_2$ los valores de $t$ en los extremos del arco considerado, y suponiendo estos puntos comprendidos entre los mismos puntos de retroceso, hállase por integración que

$$s=\pm\left[\frac{3}{2}\,l\,(\operatorname{sen}2t_2-\operatorname{sen}2t_1)-h\,(t_2-t_1)\right]:$$

debiendo emplearse para expresión del resultado final el signo que produzca para $s$ un valor positivo.

**283.** Por haberlo considerado más sencillo, al precedente breve estudio de las *curvas paralelas á la astroide* hemos procedido tomando como base para ello las ecuaciones simultáneas (2), de las cuales, mediante la eliminación de sen$t$, que no estimamos pertinente detallar, se obtiene la siguiente *ecuación cartesiana*, única, de aquellas curvas:

$$[3\,(x^2+y^2-l^2)-4h^2]^3+[27\,lxy-9h\,(x^2+y^2)-18l^2h+8h^2]^2=0.$$

Como se obtiene la *tangencial* de las mismas comparando la ecuación de sus tangentes

$$\frac{\operatorname{sen} t}{l \operatorname{sen} t \cos t + h} Y - \frac{\cos t}{l \operatorname{sen} t \cos t + h} X = 1,$$

con la $uY + vX = 1$: de donde se desprende que

$$u = \frac{\operatorname{sen} t}{l \operatorname{sen} t \cos t + h} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\cos t}{l \operatorname{sen} t \cos t + h};$$

y, finalmente, por eliminación de $t$ entre ambas, esta otra:

$$l^2 u^2 v^2 + (2hl - 1)(u^2 + v^2) + h^2 (u^2 + v^2)^2 = 0.$$

## IV

### LAS EVOLUTAS DE LA ELIPSE Y DE LA HIPÉRBOLA

**284.** La *astroide* se halla comprendida en el grupo de curvas determinado por la ecuación general

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \acute{o}$$

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right]^3 + 27\left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

al cual corresponde también la *evoluta de la elipse,* indicada en la figura 93; con los ejes de simetría, $BD$ y $CA$; cuatro puntos de retroceso, $A$ y $C\,(\pm a, 0)$, y $C$ y $D\,(0, \pm b)$; y ninguno de inflexión.

**285.** La ecuación de la tangente á la curva (1) tiene por expresión:

$$(2) \qquad Y = -\left(\frac{b^2 y}{a^2 x}\right)^{\frac{1}{3}} X + b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};$$

de la cual se deduce que los puntos de intersección, $P$ y $Q$, de la tangente que representa, con los ejes coordenados, se hallan así definidos:

$$\left(0, b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}\right) \quad \text{y} \quad \left(a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}, 0\right).$$

Pues, si por estos puntos se trazan las rectas $PM$ y $QM$, paralelas á los ejes, quedará determinado el punto $M$, que tiene por coordenadas

$$x_1 = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \quad \text{é} \quad y_1 = b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};$$

y, sustituyendo estos valores de $x$ é $y$ en la ecuación (1) á que corresponden, hállase entre los de $x_1$ é $y_1$ la relación general siguiente:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

De todo lo cual se deduce que *cuando la tangente PQ á la curva* (1) *varía de situación, el punto M describe una elipse* (3), *que pasa por los puntos de retroceso de la* (1); y que, recíprocamente, *la envolvente de las posiciones diversas de la PQ, cuando M describe la elipse* (3), *coincide con la curva* (1).

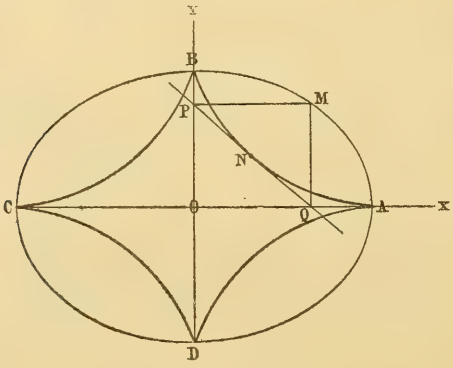



Figura 93.

**286.** Otra propiedad interesante de las curvas que estudiamos es la siguiente:

*Las curvas representadas por la ecuación* (1) *son las envolventes de las elipses á que corresponde la ecuación*

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

*cuyos semiejes satisfacen á la condición*

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1.$$

En efecto, la ecuación de las elipses consideradas puede escribirse como sigue:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2 (a - \alpha)^2} = 1.$$

Y, para hallar la que corresponde á la envolvente pedida, menester es, y basta, eliminar $\alpha$ entre la última ecuación y su derivada, por referencia á la misma $\alpha$:

$$\frac{x^2}{\alpha^3} = \frac{a^2 y^2}{b^2 (a - \alpha)^3}.$$

Eliminación que se facilita advirtiendo que

$$\frac{a - \alpha}{\alpha} = \left(\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{ó} \quad \alpha = \frac{a}{1 + \left(\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Sustituyendo este valor de $\alpha$ en la ecuación de las elipses, cuya envolvente se busca, hállase, en fin, como prueba de la proposición enunciada, el resultado siguiente:

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{b^2 x^2}{a^2 y^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[1 + \left(\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = 1;$$

ó, mediante sencillas reducciones,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

**287.** El área limitada por la curva (1), por el eje de las abscisas, y

por las ordenadas correspondientes á las abscisas 0 y $x$, resulta expresada por la fórmula

$$A_1 = \frac{b}{a}\int_0^x \left[a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} dx.$$

Ó, representando por $A$ el área limitada por la astroide, inscrita en el círculo de radio $a$ (Núm. **264**), y por las mismas ordenadas,

$$A_1 = \frac{b}{a} A.$$

Y, como corolario de esta igualdad, conclúyese que *el área limitada por la evoluta de la elipse es igual á* $\frac{3}{8}\pi ab$.

**288.** La rectificación de la curva (1) se obtiene por medio de la fórmula

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}\, dx = \frac{1}{a}\int_0^x x^{-\frac{1}{3}}\left[b^2 a^{\frac{2}{3}} + (a^2 - b^2)x^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Ó, poniendo $x = at^3$,

$$s = 3\int_0^t t\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\,t^2}\, dt = \frac{1}{a^2 - b^2}\left\{[b^2 + (a^2 - b^2)\,t^2]^{\frac{3}{2}} - b^3\right\}.$$

De donde se concluye que

$$s = \frac{1}{a^2 - b^2}\left\{\left[b^2 + (a^2 - b^2)\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} - b^3\right\}.$$

*La longitud de un cuadrante de la evoluta de la elipse será, pues, igual á* $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.

**289.** Según es fácil verificar, á la ecuación de la *evoluta de la elipse* satisfacen los valores de $x$ é $y$, dados por las expresiones

$$x = a\,\mathrm{sen}^3\, t \quad \text{é} \quad y = b\cos^3 t,$$

en las cuales $t$ representa una nueva *variable independiente*. Y, si esta variable $t$ se relaciona con otra, $x$, mediante la ecuación $\operatorname{tang}\frac{1}{2}t = x$, conclúyese que

$$x = \frac{8ax^3}{(1+x^2)^3} \quad \text{é} \quad y = \frac{b(1-x^2)^3}{(1+x^2)^3};$$

lo cual prueba que la curva de que tratamos pertenece á la categoría de las *unicursales*.

**290.** La ecuación (2) de la tangente á la evoluta de la elipse puede escribirse de este modo:

$$\frac{Y}{b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}} + \frac{X}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = 1.$$

De la cual, comparada con la

$$uY + vX = 1,$$

se desprende que

$$u = \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}} \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}.$$

Y, eliminando de la (1), con auxilio de estas dos últimas relaciones, los valores de $x$ é $y$, conclúyese, como *ecuación tangencial* de la curva de que se trata, que así resulta demostrado ser de *cuarta clase*, la siguiente:

$$\frac{1}{a^2v^2} + \frac{1}{b^2u^2} = 1.$$

**291.** La *evoluta de la hipérbola* tiene por ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

de la cual se deducen consecuencias análogas á las obtenidas en el estudio de la correspondiente á la elipse.

La nueva curva, como es fácil ver, tiene la forma indicada en la figura 94: consta de dos ramas infinitas, $MAN$ y $PBQ$; y posee *dos puntos*

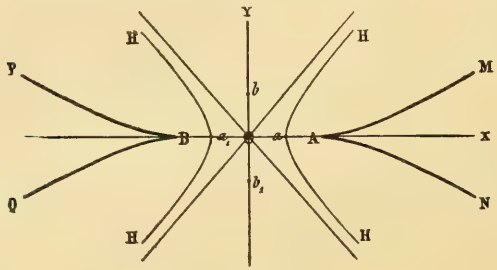



Figura 94.

*de retroceso* reales, $A$ y $B$, donde $x = \pm a$, y otros dos imaginarios $(0, \pm b\sqrt{-1})$. Y como á su ecuación satisfacen las siguientes expresiones

$$x = a\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^3 \quad \text{é} \quad y = b\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^3,$$

de las cuales, introduciendo la nueva variable $z$ por $e^t$, se desprenden estas otras

$$x = \frac{a\,(z^2+1)^3}{8z^3} \quad \text{é} \quad y = \frac{b\,(z^2-1)^3}{8z^3},$$

queda con esto, parecidamente, demostrado que, como la de la elipse, es también *unicursal* la *evoluta de la hipérbola.*

**292.** Para dar por terminado este punto, conviene recordar que entre ambas evolutas y la *cruciforme* y la *puntiforme* existen interesantes relaciones, ya advertidas anteriormente (Núms. **215** y **216**), al ocuparnos en el estudio de las dos curvas que se acaban de mencionar.

**293.** El grupo de curvas, representado por la ecuación (1),

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

es caso particular de otro grupo más amplio ó general, representado también por la misma ecuación, mas referida para ello á ejes coordenados, de dirección arbitraria, rectangulares ú oblicuos. En este último caso, cada curva es de apariencia análoga á la representada en la fig. 95, y sus tangentes en los *puntos de retroceso* son *diámetros conjugados.*

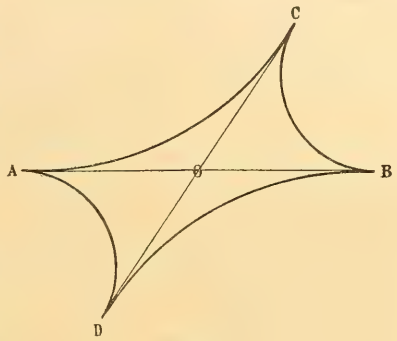


Figura 95.

Al nuevo grupo de curvas que acabamos de definir, denominadas *tetracúspides* por Bellavitis, en su *Sposizione del Metodo delle Equipollenze* (Modena, 1854, núms. 189-191), fácil sería extender las propiedades, anteriormente demostradas, por referencia á la *evoluta de la elipse.* Pero lo interesante para nuestros lectores es advertir que las *tetracúspides* de Bellavitis no deben confundirse con las *paralelas* á la astroide, estudiadas en el párrafo precedente, por cuanto en éstas las tangentes en los *puntos de retroceso* son *cuatro rectas distintas* (fig. 92), y en las otras se reducen á dos, *AB* y *BC* (fig. 95), tangente cada una á la curva en dos de aquellos puntos.

Algunos autores confunden una con otra las dos clases de curvas: sobre lo cual ya llamamos la atención en un artículo, publicado en la revista *Mathesis* (t. xxi, 1901, pág. 217.)

## V

### EL ESCARABAJO

**294.** Consideremos el ángulo recto $AOB$ (fig. 96), en cuyos lados se apoya por sus extremos el segmento, de longitud constante y posición variable, $AB$. En la bisectriz, $Ox$, del ángulo, señálese un punto fijo, $P$, que tomaremos por origen de las coordenadas; y, por este punto, trácese la

perpendicular $PM$ al segmento móvil mencionado. El lugar geométrico descrito por $M$, cuando $AB$ varía de situación, es la *podaria*, respecto del punto $P$, de la *astroide*, envolvente de $AB$, y recibe el nombre de *escarabajo* (LAURENT: *Traité de Analyse, t.* II, *p.* 183; PAINVIN: *Géométrie Analytique, p.* 432; etc.)

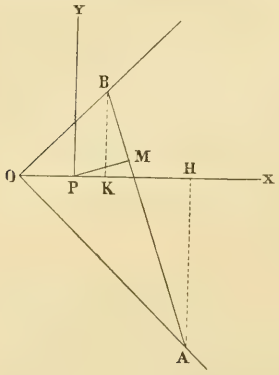


Figura 96.

Para hallar la ecuación de esta curva, supongamos que $OA = \alpha$, $OB = \beta$ $PO = a$, y $AB = l$; y formemos las ecuaciones de las rectas $AB$ y $PM$ que, por su intersección, determinan el punto $M$.

La recta $AB$ pasa por los puntos $A$ y $B$, cuyas coordenadas son

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - a, \quad -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} - a, \quad \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right),$$

y tiene por ecuación, en consecuencia, la siguiente:

$$\left(y - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)(\beta - \alpha) = \left(x - \frac{\beta}{\sqrt{2}} + a\right)(\beta + \alpha).$$

Y como la $PM$ es perpendicular á la anterior, su ecuación será ésta:

$$(\beta + \alpha)\, y + (\beta - \alpha)\, x = 0.$$

Además, es evidente que

$$\alpha^2 + \beta^2 = l^2.$$

Y, por lo tanto, eliminando $\alpha$ y $\beta$ entre estas tres ecuaciones, hallaremos la ecuación buscada de la curva.

Para efectuar la eliminación, advirtamos primeramente que la primera

de las tres ecuaciones puede escribirse, con auxilio de la segunda, como sigue:

$$\left(y - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) y + \left(x - \frac{\beta}{\sqrt{2}} + a\right) x = 0.$$

Y deduciendo luego de esta ecuación, combinada también con la segunda, los valores de $\alpha$ y $\beta$, y sustituyéndolos en la tercera, hallaremos, finalmente, esta otra como ecuación del *escarabajo:*

$$(1) \qquad 4\,(x^2 + y^2 + ax)^2\,(x^2 + y^2) = l^2\,(y^2 - x^2)^2.$$

La cual, poniendo $x = \rho \cos\theta$ é $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, sencillísimamente se transforma en la que sigue, expresada en *coordenadas polares:*

$$(2) \qquad \rho = -a\cos\theta \pm \frac{l}{2}\cos 2\theta.$$

**295**. Por medio de esta ecuación procuraremos ahora determinar la forma de la curva.

1.° Para ello comencemos por suponer que $l < 2a$.

Considerando primeramente la parte de la curva, correspondiente á la ecuación

$$(3) \qquad \rho = -a\cos\theta - \frac{l}{2}\cos 2\theta,$$

representemos por $\theta_1$ el menor de los ángulos positivos que satisfacen á la ecuación

$$a\cos\theta + \frac{l}{2}\cos 2\theta = 0,$$

dado por la ecuación

$$\cos\theta_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2l^2}}{2l},$$

inferior á $\frac{\pi}{2}$, por ser $\cos\theta_1$ positivo.

Mientras $\theta$ varíe desde 0 hasta $\theta_1$, $\rho$ será negativo, y variará desde $-a-\frac{l}{2}$ hasta 0, y el punto generador de la curva describirá el arco $AM'B$ (fig. 97). Cuando después $\theta$ varíe desde $\theta_1$ hasta $\frac{\pi}{2}$, $\rho$ variará desde 0 hasta $\frac{l}{2}$, y el punto generador de la curva producirá el arco $BC$. Y, continuando la variación de $\theta$ desde $\frac{\pi}{2}$ hasta $\pi$, $\rho$ variará desde $\frac{l}{2}$ hasta $a-\frac{l}{2}$: y así resultará descrito el arco $CD$.

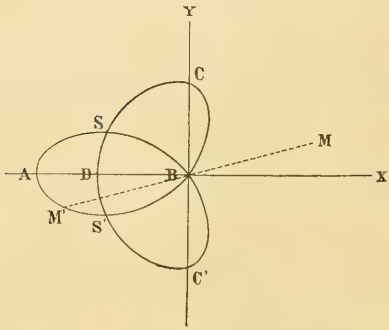


Figura 97.

La parte de la curva correspondiente á los valores crecientes de $\theta$, desde $\pi$ hasta $2\pi$, es simétrica de la precedente respecto al eje de las abscisas.

Pues fijemos ahora la atención en aquella otra parte de la curva, correspondiente á la ecuación

$$\rho = -a\cos\theta + \frac{l}{2}\cos 2\theta. \tag{4}$$

Cuando en la (3) se sustituye $\theta$ por $MBx = \theta'$, hállase la ecuación

$$\rho = -a\cos\theta' - \frac{l}{2}\cos 2\theta',$$

á la que corresponde el punto $M'$. Y cuando, en la (4), se sustituye $\theta$ por $\theta' + \pi$, dedúcese que

$$\rho = a\cos\theta' + \frac{l}{2}\cos 2\theta',$$

á la que corresponde el mismo punto $M'$. Luego los puntos de la curva

determinados por la ecuación (4), concuerdan con los que de la simple consideración de la (3) se desprenden.

2.° El caso de ser $l > 2a$ se discute de análogo modo.

De la ecuación

$$a\cos\theta + \frac{l}{2}\cos 2\theta = 0$$

se desprenden entonces para $\cos\theta$ dos valores, inferiores á la unidad y de signos contrarios, á los cuales corresponden cuatro de $\theta$, que representaremos por $\theta_1$, $-\theta_1$, $\theta_2$, $-\theta_2$: inferiores los primeros, en valor absoluto, á $\frac{\pi}{2}$; y los otros superiores. Cuando $\theta$ pasa por los valores $0, \theta_1, \frac{\pi}{2}, \theta_2, \pi$, el radio $\rho$ adquiere los designados por

$$-a-\frac{l}{2},\ 0,\ \frac{l}{2},\ 0,\ a-\frac{l}{2};$$

y la curva presenta la forma indicada en la figura 98, en la cual

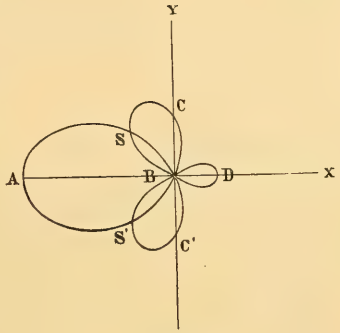


Figura 98.

$$AB = a + \frac{l}{2};\quad BD = a - \frac{l}{2};\quad \text{y}\quad BC = \frac{l}{2}.$$

**296.** De esta discusión se concluye que, en ambos casos considerados, la curva posee *tres puntos múltiplos* á distancia finita. Para determinar sus coordenadas apliquemos á la ecuación cartesiana de la curva el método general, utilizable para la investigación de los puntos de aquel nombre, y así obtendremos este doble sistema de ecuaciones:

$$x = 0 \quad \text{é} \quad y = 0;\quad \text{y}$$

$$x^2 + y^2 + ax = 0 \quad \text{é} \quad y^2 = x^2:$$

el primero de los cuales determina como *múltiplo* el origen de las coordenadas; y el segundo los valores de las coordenadas de $S$ y $S'$:

$$x = -\frac{a}{2} \quad \text{é} \quad y = \pm\frac{a}{2}.$$

Siendo de advertir además que el primero de estos puntos es *cuádruplo* y solamente *duplos* los dos últimos.

Si, en efecto, ponemos $y = \lambda x$ en la ecuación de la curva, y se procura después que $x$ tienda indefinidamente á *cero,* las ecuaciones de las tangentes á la misma curva en el origen serán de la forma $y = \lambda x$: debiendo satisfacer el coeficiente $\lambda$ á la ecuación bicuadrada

$$4a^2(\lambda^2 + 1) = l^2(\lambda^2 - 1)^2,$$

cuyas cuatro raíces, $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ y $\lambda_4$, son reales, cuando $l > 2a$, ó solamente dos cuando $\lambda < 2a$.

A todo lo cual es menester agregar que la figura transformada que se obtiene de la ecuación del *escarabajo*, poniendo en ella $x = \frac{1}{x_1}$ é $y = \frac{y_1}{x_1}$, posee dos *nodos* imaginarios en los puntos $(0, \pm i)$. Luego también el *escarabajo* posee otros *dos imaginarios,* correspondientes, en lo infinito.

**297.** La determinación de las tangentes á la curva se desprende con facilidad del valor de la *subnormal polar,* dado por la fórmula

$$S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = a\,\mathrm{sen}\,\theta \mp l\,\mathrm{sen}\,2\theta.$$

**298.** Y el área descrita por el radio vector, $\rho$, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\theta$, de esta otra:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2\,d\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^\theta (1 + \cos 2\theta)\,d\theta + \frac{l^2}{16}\int_0^\theta (1 + \cos 4\theta)\,d\theta$$

$$\mp \frac{al}{4}\int_0^\theta (\cos 3\theta + \cos\theta)\,d\theta:$$

6

$$A = \frac{1}{4}\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)\theta + \frac{l^2}{64}\operatorname{sen} 4\theta \mp \frac{al}{12}\operatorname{sen} 3\theta$$

$$+ \frac{1}{8}a^2 \operatorname{sen} 2\theta \mp \frac{al}{4}\operatorname{sen}\theta.$$

**299.** *El escarabajo, considerado en general, es la podaria, respecto del punto P, de la envolvente de la recta AB,* cualquiera que sea el ángulo *AOB:* envolvente estudiada precedentemente (Núms. **278** á **281**). Cuando el ángulo *AOB* es recto, como lo era en el caso especialmente en los anteriores párrafos examinado, la envolvente se resuelve, como es sabido, en una *astroide.*

## VI

### LA ATRIFTALOIDE

**300.** Con el nombre de *atriftaloide* designó HAUGHTON la curva que tiene por ecuación, en coordenadas polares, la siguiente:

$$(1) \qquad \rho^2(\rho - h) + k^3 \sec^2\theta = 0.$$

Curva por él encontrada en sus indagaciones sobre la forma de la superficie de los mares que cubren una esfera atractiva, y cuyas propiedades geométricas fueron luego estudiadas por R. TOWNSEND en un trabajo titulado *On geometrical properties of the Atriphthaloid,* inserto en los *Proceedings of the Royal Irish Academy,* 1882, y por LONGCHAMPS también, en un artículo publicado en el *Journal de Mathématiques Spéciales, t.* XVII, 1893, *p.* 63, donde propuso un método para construir sus tangentes *.

**301.** La ecuación de la curva, referida á coordenadas cartesianas, es

---

* La palabra *atriftaloide* procede de tres palabras griegas, fundidas en una sola: partícula privativa α; participio τριπὸσ del verbo τριβω, trillar ó desmenuzar; y θαλασσα, mar.

$$x^4 (x^2 + y^2) = (hx^2 - k^3)^2, \tag{2}$$

por medio de la cual puede construirse la *atriftaloide* fácilmente.

Poniendo, en efecto, $x^2 + y^2 = \rho^2$, resulta $x^2 (h \pm \rho) = k^3$. Y, por lo tanto, de la intersección de la circunferencia, de radio arbitrario $\rho$ y centro en el origen de las coordenadas, con las rectas cuyas ecuaciones son

$$x = \pm \sqrt{\frac{k^3}{k \pm \rho}}, \tag{3}$$

resultarán *ocho* puntos de la curva, correspondientes á cada valor particular de $\rho$, cuando el radio $\rho$ se halle comprendido entre límites convenientes.

**302.** Para hallar la figura de la curva de que se trata, advirtamos en primer lugar que, según la ecuación claramente expresa, el origen de las coordenadas es *centro* de la curva, y los ejes de las coordenadas son *ejes de simetría.*

Y, en segundo lugar, notemos que, si la ecuación (2) se escribe de este modo,

$$y^2 = \frac{(hx^2 - k^3)^2}{x^4} - x^2, \tag{4}$$

inmediatamente se ve que el eje de las ordenadas es asíntota de la curva; que las rectas paralelas á este eje la cortan en dos puntos, reales ó imaginarios; y que la ordenada $y$ solamente es infinita en el punto correspondiente á $x = 0$.

Pues escribiendo ahora la ecuación (4) bajo la forma

$$y^2 = \frac{(hx^2 - k^3 - x^3)(hx^2 - k^3 + x^3)}{x^4},$$

asimismo se advierte desde luego que las abscisas de los puntos donde la curva corta al eje de este nombre son raíces de estas otras ecuaciones:

$$x^3 - hx^2 + k^3 = 0 \quad \text{y} \quad x^3 + hx^2 - k^3 = 0, \tag{5}$$

iguales y de signos contrarios las de la primera á las de la segunda, por cuanto solamente por el signo de $x$ difieren ambas.

Representando, pues, por $\pm\alpha$, $\pm\beta$ y $\pm\gamma$ las raíces de las dos ecuaciones, podemos escribir

$$y = \sqrt{-\frac{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)}{x^4}}.$$

Respecto á la índole de las raíces $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$, tres casos pueden presentarse.

1.° Si las raíces $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son *reales*, ó si

$$4h^3 > 27k^3,$$

la curva corta al eje de las abscisas en seis puntos $A$ y $A'$ $(0, \pm\alpha)$, $B$ y $B'$ $(0, \pm\beta)$, y $C$ y $C'$ $(0, \pm\gamma)$: los $A'$, $B'$ y $C'$ serán simétricos de las

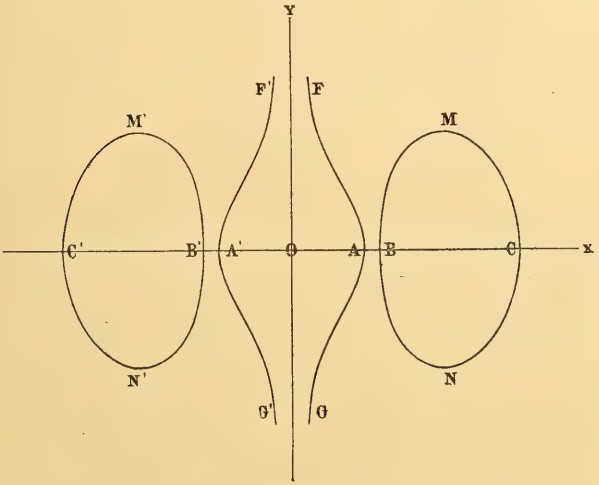



Figura 99.

$A$, $B$ y $C$ con respecto á la $Oy$. Y, suponiendo que $\alpha^2 < \beta^2 < \gamma^2$, conforme indica la figura 99, los valores de $y$ serán:

*Imaginarios*, cuando sea $x^2 > \gamma^2$;

*Reales*, cuando sea $x^2 < \gamma^2$ y $x^2 > \beta^2$;

*Imaginarios* también, cuando $x^2 < \beta^2$ y $x^2 > \alpha^2$; y

*Reales* otra vez, cuando $x^2$ sea $< \alpha^2$.

Luego la curva posee dos ramas infinitas, que pasan por los puntos $A$ y $A'$, y que tienen por asíntota común el eje de las ordenadas; y dos ramas aisladas y cerradas, que pasan por los $B$ y $C$ y los $B'$ y $C'$. En los seis puntos mencionados las tangentes á la curva son paralelas al eje acabado de citar.

2.° Si es

$$4h^3 = 27k^3,$$

dos de las raíces de cada una de las ecuaciones (5) son iguales, y, resolviendo la primera, resulta $\alpha = -\frac{1}{3}h$, $\beta = \frac{2}{3}h$, y $\gamma = \frac{2}{3}h$.

Luego los puntos $B$ y $C$ se confunden entonces uno con otro, y los óvalos se desvanecen; reduciéndose la curva á dos ramas infinitas y á dos puntos *aislados*, cuyas coordenadas son $\left(\pm\frac{2}{3}h, 0\right)$.

3.° Y si es

$$4h^3 < 27k^3,$$

dos raíces de cada una de las ecuaciones (5), las $\alpha$ y $\beta$, por ejemplo, serán imaginarias. Y como entonces el producto de los factores $x^2 - \alpha^2$ y $x^2 - \beta^2$ de la expresión de $y$ es positivo, y el valor de $y$, en consecuencia, *imaginario* cuando $x^2 > \gamma^2$, y *real* cuando $x^2$ varíe entre 0 y $\gamma^2$, la curva se reducirá á dos ramas infinitas, sin *óvalos* ni puntos *aislados* á ella adjuntos.

**303.** Determinemos ahora los puntos de la atriftaloide donde las ordenadas son máximas ó mínimas.

Consideremos para ello primeramente las ramas *finitas* de la curva, correspondientes á las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{y} \quad \rho = h - \frac{k^3}{x^2}: \quad (\rho > 0).$$

Derivando la primera ecuación relativamente á $x$, y prestando atención á la segunda, resulta

$$x + yy' = \rho \frac{d\rho}{dx} = \frac{2k^3 \rho}{x^3};$$

y, por consiguiente,

$$(A) \qquad yy' = \frac{2k^3 \rho}{x^3} - x.$$

Mediante la $y' = 0$, hállase luego que

$$2k^3 \rho = x^4:$$

ó, eliminando la $x^4$,

$$2\rho (\rho - h)^2 = k^3.$$

De la cual, poniendo $\rho = \rho_1 + h$, se concluye finalmente:

$$(6) \qquad \rho_1{}^3 + h\rho_1{}^2 - \frac{1}{2}k^3 = 0.$$

Esta ecuación y la $\rho = \rho_1 + h$ determinan los valores del radio, $\rho$, del círculo considerado en el Núm. **301**, correspondiente á los puntos donde las ordenadas de la curva adquieren valores máximos ó mínimos. Y las

$$(7) \qquad x = \pm \sqrt{-\frac{k^3}{\rho_1}}, \quad y = \pm \sqrt{\rho^2 - x^2}$$

determinan después las coordenadas de aquellos puntos, que serán reales cuando sean $0 > \rho_1 > -h$, y $\rho^2 > x^2$.

Del mismo modo, para determinar los máximos y mínimos de las ordenadas en las ramas de la curva correspondientes á las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{y} \quad \rho = \frac{k^3}{x^2} - h,$$

ó en las ramas infinitas, tenemos las ecuaciones

$$(6') \quad \rho_1{}^3 - h\rho_1{}^2 + \frac{1}{2}k^3 = 0, \ \rho = \rho_1 - h, \ x = \sqrt{\frac{k^3}{\rho_1}}, \ y = \sqrt{\rho^2 - x^2},$$

que admiten soluciones reales cuando son $\rho_1 > h$ y $\rho^2 > x^2$.

Fácil es ver también que, en el supuesto de existir los dos óvalos anteriormente considerados, la curva solamente poseerá cuatro puntos, $M$ y $N$, $M'$ y $N'$, donde las ordenadas serán máximas ó mínimas; y que, si los óvalos no existen, no habrá en la curva punto alguno donde las ordenadas satisfagan á semejante condición.

Fijémonos, en comprobación de lo dicho, en los siguientes *polinomios de Sturm*, correspondientes á la ecuación (6):

$$\rho_1^3 + h\rho_1^2 - \frac{1}{2}k^3;\ 3\rho_1^2 + 2h\rho_1;\ \frac{2}{9}h^2\rho_1 + \frac{1}{2}k^3;\ \frac{9}{4}\left(2 - \frac{27k^3}{4h^3}\right)\frac{k^3}{h}.$$

Para que existan los dos óvalos anteriormente considerados, es menester que sea $4h^3 > 27k^3$; y entonces los polinomios de que se trata, poniendo en ellos sucesivamente $\rho_1 = 0$ y $\rho_1 = -h$, adquieren los siguientes signos:

$$\begin{array}{lcccc} & & + & & \\ \rho_1 = 0 & - & \underline{0} & + & + \\ \rho_1 = -h & - & + & - & +. \end{array}$$

Luego entre $\rho_1 = 0$ y $\rho_1 = -h$ existen dos valores reales de $\rho_1$ que satisfacen á la ecuación (6), y que dan para $\rho$ valores positivos y para $x$ valores reales. Pero como el número de los puntos máximos y mínimos en cada medio óvalo $BMC$ debe ser evidentemente *impar*, solamente los valores de $y$, correspondientes á *uno* de estos valores de $\rho_1$, serán reales; y precisamente á estos valores corresponden los puntos $M$, $N$, $M'$, $N'$, donde las ordenadas son máximas en valor absoluto.

Consideremos ahora las ramas infinitas de la curva.

Para lo cual aplicaremos el *teorema de Sturm* á la ecuación (6'), buscando el número de raíces de esta ecuación comprendidas entre $h$ é $\infty$. Ó como las raíces de la ecuación (6') difieren solamente por el signo de las raíces de la (6), nos limitaremos á buscar el número de raíces de esta ecuación, comprendidas entre $-h$ y $-\infty$. Recurriendo, como anteriormente, al teorema mencionado, hállanse los resultados siguientes:

$$\begin{array}{lcccc} \rho_1 = -\infty & - & + & - & + \\ \rho_1 = -h & - & + & - & +. \end{array}$$

Lo cual prueba que no existen puntos de ordenada máxima ni mínima en esta rama.

Pero consideremos ahora el caso de no existir los óvalos, ó de ser $4h^3 < 27k^3$.

Para resolver entonces la cuestión, habremos de recurrir á la ecuación (6'), procurando determinar el número de sus raíces comprendidas entre $h$ é $\infty$, ó á la (6), entre $-h$ y $-\infty$. Y, por nueva aplicación del teorema de Sturm, obtendremos estos resultados.

1.° Si $27k^3 > 12h^3$,

$$\rho_1 = -\infty \qquad - \; + \; - \; -$$
$$\rho_1 = -h \qquad - \; + \; + \; -.$$

2.° Si $27k^3 < 8h^3$,

$$\rho_1 = -\infty \qquad - \; + \; - \; +$$
$$\rho_1 = -h \qquad - \; + \; - \; +.$$

3.° Y si $27k^3 < 12h^3$, y $27k^3 > 8h^3$,

$$\rho_1 = -\infty \qquad - \; + \; - \; -$$
$$\rho_1 = -h \qquad - \; + \; - \; -.$$

Conclúyese, pues, que el número de las raíces de la ecuación (6'), comprendidas entre $h$ é $\infty$, es igual á 0; y, por consiguiente, que en las ramas infinitas de la curva no existen tampoco en este caso puntos cuyas ordenadas sean máximas ó mínimas.

**304.** El punto donde la normal á la atriftaloide corta al eje de las abscisas, tiene por expresión

$$X = x + yy' = \pm \frac{2\rho k^3}{x^3},$$

debiendo emplearse el signo +, cuando se trate de los óvalos, y el —, cuando de las ramas infinitas. Por medio de esta fórmula, ninguna dificultad ofrece la construcción de las normales y tangentes.

**305.** La determinación de los puntos de inflexión de la atriftaloide depende de la resolución de una ecuación de 5.° grado.

Para demostrarlo advirtamos que las dos *ramas* de la curva pueden representarse por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{y} \quad x^2 = \frac{k^3}{h - \rho},$$

designando ahora $\rho$ una variable independiente, *positiva ó negativa*, y de las cuales se desprenden estas otras

$$(B) \qquad x + yy' = \frac{2k^3\rho}{x^3} \quad \text{y} \quad \rho = h - k^3 x^{-2},$$

que á su vez producen las que siguen:

$$y'^2 + yy'' + 1 = 2k^3 x^{-3}\frac{d\rho}{dx} - 6\rho k^3 x^{-4} = 4k^6 x^{-6} - 6\rho k^3 x^{-4}.$$

Y por lo tanto, poniendo $y'' = 0$, hallaremos que

$$y'^2 = 4k^6 x^{-6} - 6\rho k^3 x^{-4} - 1.$$

De la cual, eliminando la $y'$ con auxilio de la primera de las $(B)$, y sustituyendo después $y^2$ y $x^{-2}$ por sus valores

$$y^2 = \rho^2 - x^2 \quad \text{y} \quad x^{-2} = \frac{h - \rho}{k^3},$$

se deduce la siguiente ecuación de 5.° grado,

$$6\rho^5 - 12h\rho^4 + 6h^2\rho^3 + 15k^3\rho^2 - 18hk^3\rho + 4h^2k^3 = 0$$

para determinar los valores de $\rho$ en los puntos de inflexión; deduciéndose luego de las dos anteriores las coordenadas $x$ é $y$ de los mismos puntos mencionados.

**306.** Por ser

$$\int y\,dx = \int x^{-2}\sqrt{(hx^2 - k^3)^2 - x^6}\,dx,$$

ó, suponiendo $x^2 = t$,

$$\int y\,dx = \frac{1}{2}\int t^{-2}\sqrt{t\,[(ht - k^3)^2 - t^3]}\,dt,$$

con auxilio de la expresión

$$T = (h^2 - 1)\,t^3 - 2hk^3\,t^2 + k^6\,t,$$

hállase sin dificultad que

$$\int y\,dx = (h^2 - 1)\int \frac{t\,dt}{\sqrt{T}} - 2hk^3\int \frac{dt}{\sqrt{T}} + k^3\int \frac{dt}{t\sqrt{T}}.$$

De manera que las cuadraturas de las áreas, limitadas entre dos ordenadas y los arcos correspondientes de la atriftaloide, dependen de tres integrales elípticas, de *primera, segunda y tercera especie*, y de fácil reducción á la forma normal adoptada por WEIERSTRAS.

## VII

### LA CURVA DE TALBOT

**307.** Con el nombre de *Curva de* TALBOT, por haber sido empleada por este ilustre geómetra (1821), antes que por ninguno otro, para la representación de las *integrales elípticas completas de primera especie, con un módulo arbitrario (Annales de Mathématiques de* GERGONNE, *t.* XIV, *p.* 280), conforme poco más adelante explicaremos, se designa la *envolvente* de las rectas, trazadas por todos los puntos de una elipse, perpendicularmente á los diámetros que pasan por aquellos puntos. Curva que, por el motivo apuntado, mereció que fijase también en ella la atención LEGENDRE en su célebre *Tratado de las Funciones Elípticas* (1825-1832), y cuya forma estudió ROCHE (1821) en los mencionados *Annales de* GERGONNE, *t.* XIV, *p.* 207.

**308.** De la definición expuesta resulta inmediatamente que la *curva de* TALBOT posee un centro, coincidente con el de la elipse, y con relación al cual puede considerarse como *podaria* suya; y que de la misma puede asimismo desprenderse fácilmente su representación analítica.

Para lograr esto último, designemos por $a$ y $b$ los semiejes de la elipse fundamental, á la cual corresponden las ecuaciones

$$x = a\cos\varphi \quad \text{é} \quad y = b\,\text{sen}\,\varphi,$$

designando por $\varphi$ un ángulo auxiliar, en función del cual la ecuación del diámetro de la elipse, que pasa por el punto arbitrario $(x, y)$, tiene por expresión

$$Y = X\frac{b}{a}\,\text{tang}\,\varphi,$$

y la ecuación de la perpendicular en aquel punto al diámetro considerado esta otra:

$$bY\,\text{sen}\,\varphi + aX\cos\varphi - b^2\,\text{sen}^2\,\varphi - a^2\cos^2\varphi = 0.$$

De la cual se deduce, por su *derivación* con respecto á $\varphi$, la que sigue:

$$bY\cos\varphi - aX\,\text{sen}\,\varphi + 2\,(a^2 - b^2)\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi = 0.$$

Y, eliminando entre ambas ecuaciones la variable $\varphi$, se hallará la que á la *envolvente* buscada, ó *curva de* Talbot, corresponde.

Para el estudio de esta curva no es, sin embargo, menester efectuar la eliminación indicada. Porque de las dos últimas ecuaciones se desprenden desde luego estas otras:

$$(1) \quad X = \frac{\cos\varphi}{a}\,(a^2 + c^2\,\text{sen}^2\,\varphi) \quad \text{é} \quad Y = \frac{\text{sen}\,\varphi}{b}\,(a^2 - 2c^2 + c^2\,\text{sen}^2\,\varphi),$$

en las cuales $c^2 = a^2 - b^2$, adecuadas para la determinación de las coordenadas de los puntos de la *envolvente* en función del parámetro $\varphi$, ó para realizar con suma sencillez aquel estudio.

**309.** Comencemos, en efecto, por precisar la forma de la curva.

De cuya definición y procedencia resulta desde luego que es simétrica por referencia á los ejes coordenados, y tangente á la elipse en los extremos de ambos ejes de esta curva. Y también que el ángulo de sus tangentes con el eje de las abscisas variará siempre en el mismo sentido; lo cual excluye el supuesto de que la *envolvente* de que se trata pueda poseer puntos de *inflexión reales*.

Además: por ser

$$\frac{dX}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{a}(a^2 - 2c^2 + 3c^2\operatorname{sen}^2\varphi) \text{ y } \frac{dY}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi}{b}(a^2 - 2c^2 + 3c^2\operatorname{sen}^2\varphi),$$

resulta, en cambio, que la misma curva posee *cuatro puntos de retroceso*, determinados por la ecuación

$$a^2 - 2c^2 + 3c^2\operatorname{sen}^2\varphi = 0, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}^2\varphi = \frac{a^2 - 2b^2}{3c^2},$$

de la cual se deducen para $\varphi$ valores *reales* cuando $a^2 \geq 2b^2$, é *imaginarios* en el contrario supuesto.

Al eje de las ordenadas córtale la curva en los extremos del *eje menor de la elipse*, á la cual es allí tangente, y también en los puntos *imaginarios* y *duplos*, donde se verifica que $a^2 + c^2\operatorname{sen}^2\varphi = 0$. Y al de las abscisas en los extremos del *eje mayor*, y en los puntos además donde

$$a^2 - 2c^2 + c^2\operatorname{sen}^2\varphi = 0, \quad \text{ó} \quad \cos\varphi = \pm\frac{b}{c};$$

puntos *reales* cuando $a^2 \geq 2b^2$, é *imaginarios*, y *duplos* también, si se verifica lo contrario.

De cuanto precede se concluye que la curva presenta la forma indicada en la figura 100, cuando es $a^2 > 2b^2$; y la de un *óvalo convexo*, cuando

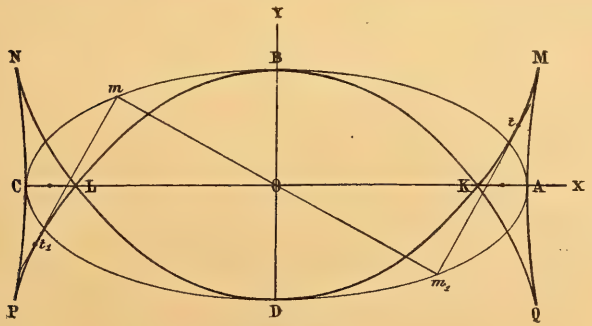



Figura 100.

$a^2 < 2b^2$. Y, si $a^2 = 2b^2$, también la de un *óvalo convexo* con *un punto triplo* en cada uno de los extremos del *eje mayor* de la elipse.

**310.** Según es fácil averiguar, el *radio de curvatura* de la *curva de* TALBOT tiene por expresión analítica la siguiente:

$$R = \frac{(a^2 - 2c^2 + 3c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)\,(a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2}.$$

**311.** Y su *rectificación* depende de una *integral elíptica de primera especie*, conforme pasamos á demostrar.

Por de pronto, en efecto,

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = (a^2 - 2c^2 + 3c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{b^2}\right):$$

ó, en el supuesto de ser

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \text{y} \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

$$ds = \frac{a^2 - 2c^2}{b} \Delta\varphi d\varphi + \frac{3c^2}{b} \operatorname{sen}^2 \varphi \Delta\varphi d\varphi.$$

Y, como

$$\operatorname{sen}^2 \varphi \Delta\varphi d\varphi = \frac{1 - k^2}{3k^2} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{2k^2 - 1}{3k^2} \Delta\varphi d\varphi - \frac{1}{6} d[\operatorname{sen} 2\varphi \Delta\varphi],$$

dedúcese, en conclusión, que

$$ds = b \frac{b\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{3c^2}{6b} d[\operatorname{sen} 2\varphi \Delta\varphi], \quad \text{ó}$$

$$s = b \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{3c^2}{6b} \operatorname{sen} 2\varphi \Delta\varphi:$$

resultado el último encontrado por el mismo TALBOT (*l. c.*). Y del cual, si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, se desprende la fórmula

$$s = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

á que nos referimos al empezar el estudio de la curva (Núm. **307**), y que, en efecto, representa la *integral elíptica de primera especie,* con el módulo $k$, mediante el arco, $s$, de la curva, aquí ahora considerado.

**312.** A todo lo cual agregaremos que esta misma curva es *unicursal:* como sencillamente se demuestra, poniendo en las ecuaciones (1)

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \cos\varphi = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Porque entonces aquellas ecuaciones se transforman en las siguientes:

$$X = \frac{2t\,[a^2 + c^2 + b^2\,t^2]}{a\,(1+t^2)^2} \quad \text{é} \quad Y = \frac{b^2 + (a^2 - 3c^2)\,t^2}{b\,(1+t^2)},$$

que determinan sus coordenadas en *función racional* de la variable $t$.

**313.** Por último: la *ecuación cartesiana* de la *curva de* TALBOT puede obtenerse, conforme ya más atrás (Núm. **308**) apuntamos, por eliminación de $\varphi$ entre las ecuaciones (1), ó por la de $t$ entre las dos anteriores, equivalentes á las primeras. Y así lo verificó por primera vez TORTOLINI *(Nouvelles Annales des Mathématiques,* 1846, *p.* 365), hallando por resultado la ecuación final siguiente, de *sexto* grado:

$$[3\,(a^2\,x^2 + b^2\,y^2) - 4\,(a^4 + b^4 - a^2\,b^2)]^3$$
$$- [9\,(2\,b^2 - a^2)\,a^2\,x^2 + 9\,(2\,a^2 - b^2)\,b^2\,y^2$$
$$- 4\,(2\,a^4 + 2\,b^4 - 5\,a^2\,b^2)]^2 = 0.$$

## VIII

### LAS TOROIDES

#### A. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES MÁS NOTABLES DE ESTAS CURVAS

**314.** Si sobre las *normales* á una curva cualquiera, y á partir de los puntos de la misma, se toman de uno ú otro lado, interior ó exterior, segmentos iguales, de longitud constante $k$, obtiénese una nueva curva,

denominada, como es ya bien sabido (Núm. **276**), *paralela* á la propuesta, ó en primer término considerada. Y, modificando el valor de $k$, dedúcense *series de curvas, paralelas* todas á la fundamental, á las cuales corresponde la misma *evoluta* de ésta, y cada una de las cuales es además *envolvente* de los círculos de *radio* $k$, y centro situado sobre la curva primitiva.

**315.** Recordadas estas nociones generales, fijemos la atención especialmente en las *curvas paralelas á la elipse*, estudiadas no há mucho tiempo por BRETON DE CHAMP en un artículo, á ellas concerniente, publicado en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884, t. III), y denominadas por él *toroides*, en razón de coincidir con las curvas que limitan las áreas obtenidas por la proyección de un *toro* sobre un plano oblicuo al plano de su ecuador. Como fácilmente puede verse, advirtiendo que la superficie del *toro* es la *envolvente* de las esferas, de radio constante, $k$, y cuyos centros se hallan situados sobre una circunferencia dada: circunferencia que se proyecta en figura de elipse sobre el mismo plano de proyección, en el cual las esferas que el *toro* envuelve se hallan representadas por círculos también, de radio $k$ y centro sobre la elipse, tangentes á las curvas que limitan la proyección del *toro*, y envolventes éstas á su vez de los mismos círculos.

**316.** La forma de las *curvas paralelas á la elipse* es fácil de obtener, partiendo de su definición, resumida en la igualdad $R = \rho \pm k$: en la cual $\rho$ representa el radio de curvatura de la elipse; $R$ el de la curva paralela, considerada en cualquier caso particular; y $k$ la distancia de las dos curvas.

De la igualdad á que nos referimos se deduce: que las *curvas paralelas* de la elipse no pueden poseer *puntos de inflexión*, puesto que el valor de $R$ ha de ser *finito* siempre, ó en todos los puntos de la curva; y que las correspondientes á la igualdad particular $R = \rho + k$, tampoco pueden poseer *puntos de retroceso* reales; pero sí las que corresponden á esta otra, $R = \rho - k$: las cuales poseerán *cuatro puntos reales* de aquel nombre, cuando el valor de $k$ se encuentre comprendido entre los valores extremos del radio de curvatura de la elipse considerada, por cuanto entonces existirán *cuatro puntos*, situados sobre la evoluta, donde será $R = 0$. Las paralelas á la elipse serán, pues, de forma *ovalado-convexa*, ó de la forma

apuntada en la fig. 101: en la cual, según el teorema fundamental de las *evolutas*, $AM$ es igual en longitud al arco $AE$, $CP$ igual al $CE$; etc., etc.: en el supuesto, bien entendido, de que $AE > AO$. Porque, si la longitud del arco $AE$ es igual á $AO$, los puntos $M$, $O$ y $N$ coincidirán, y los arcos $EMG$ y $FNH$ serán tangentes uno á otro en el punto $O$. Y cuando la longitud del arco $AE$ sea menor que $AO$, los arcos $FNH$ y $EMG$ no tendrán ningún punto común.

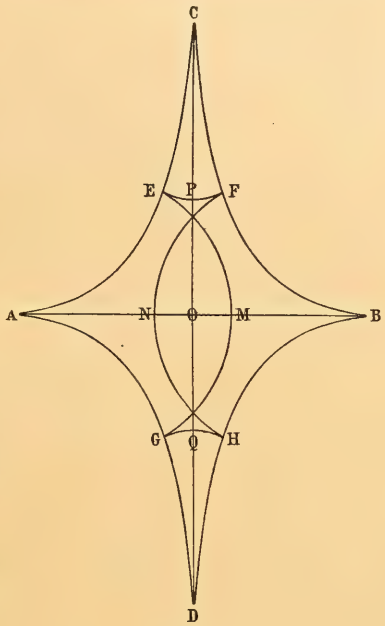


Figura 101.

**317.** La forma de las curvas paralelas á la elipse fué determinada por Breton de Champ (l. c.) por el procedimiento que acaba de apuntarse. Pero las bases de su teoría analítica estableciólas Cauchy (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1841, pág. 1062) buscando la envolvente de la circunferencia

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2,$$

cuyo centro describe la elipse

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1,$$

en el supuesto de ser

$$(1) \qquad a^2 \frac{x - \alpha}{\alpha} = b^2 \frac{y - \beta}{\beta} = \theta:$$

de donde se deducen las ecuaciones

$$(2)\qquad \frac{a^2 x^2}{(\theta + a^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(\theta + b^2)^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\theta^2 x^2}{(\theta + a^2)^2} + \frac{\theta^2 y^2}{(\theta + b^2)^2} = k^2.$$

Y, eliminando entre ellas la $\theta$, obtiénese la ecuación cartesiana de las curvas, ó de las *envolventes* buscadas.

La eliminación fué hecha por Catalan *(Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1844, t. III, pág. 553), y el resultado á que llegó se halla representado por una ecuación de *octavo grado*, que en este lugar nos dispensamos de transcribir, á causa de su complicación, y porque el estudio de la curva á que corresponde puede efectuarse directamente, y con mayor sencillez, por medio de las ecuaciones de Cauchy, conforme demostramos en un trabajo, publicado, en 1898, en las *Mémoires couronnés et autres mémoires, publiés par l'Académie Royale de Belgique*, de donde á renglón seguido pasamos á extractar la parte más esencial, ó pertinente al asunto de que ahora se trata.

**318.** Resolviendo las ecuaciones (2), relativamente á $x$ é $y$, obtiénense estos valores:

$$(3)\qquad x = \frac{\theta + a^2}{\theta}\sqrt{\frac{\theta^2 - b^2 k^2}{a^2 - b^2}} \quad \text{é} \quad y = \frac{\theta + b^2}{\theta}\sqrt{\frac{a^2 k^2 - \theta^2}{a^2 - b^2}},$$

que expresan las coordenadas de cualquier punto de la curva, en función del parámetro arbitrario $\theta$. — Los puntos reales de la curva corresponden á los valores reales de $\theta$, comprendidos entre $bk$ y $ak$, y entre $-bk$ y $-ak$: en términos de que, para cada valor de $k$, aquellas ecuaciones determinan una curva algébrica, con dos ramas reales, una de las cuales corresponde á $R = \rho + k$, y la otra á $R = \rho - k$.

De las mismas ecuaciones (2) dedúcense también las siguientes:

$$(4)\qquad \frac{dx}{d\theta} = \frac{\theta^3 + a^2 b^2 k^2}{\theta^2\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{\theta^2 - b^2 k^2}} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{\theta^3 + a^2 b^2 k^2}{\theta^2\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{a^2 k^2 - \theta^2}}; \quad \text{ó}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{\theta^2 - b^2 k^2}{a^2 k^2 - \theta^2}} = -\frac{x(\theta + b^2)}{y(\theta + a^2)}.$$

Con auxilio de las cuales puédese determinar la figura de las *toroides:* determinación poco antes ya efectuada por sencillo procedimiento, basado en la consideración de la evoluta de la elipse. Mas ahora, apoyándonos en su examen, ahondaremos más en el asunto, procurando hallar los *puntos singulares* de aquellas curvas, no solamente *reales,* sino también *imaginarios,* situados éstos á distancia finita ó infinita.

**319.** Empezando por la investigación de los *nodos,* situados á distancia finita, examinaremos los casos siguientes:

1.° $k \lesssim a$.

Suponiendo que sea $\theta = -b^2$, hállase que

$$(5)\quad x = \pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\sqrt{b^2-k^2},\quad y=0,\quad \text{é}\quad y' = \pm \frac{b^2 x}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2k^2-b^4)}}.$$

Y como, por hipótesis, $k \gtrsim a > b$, los puntos determinados por las dos primeras ecuaciones, resultan *imaginarios.* La tercera nos enseña, además, que $y'$ posee dos valores diferentes en cada uno de aquellos puntos, y, por lo tanto, que estos puntos son *nodos* de la curva.

Supongamos ahora que $\theta = -a^2$, y hallaremos que entonces

$$(6)\quad x=0,\ y = \pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\sqrt{k^2-a^2},\quad \text{é}\quad y' = \pm \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^4-b^2k^2)}}{a^2 y}.$$

Fórmulas que determinan parecidamente dos puntos de la curva, situados en el eje de las ordenadas, y en cada uno de los cuales $y'$ posee dos valores *reales,* cuando $k < \frac{a^2}{b}$, y dos también *imaginarios,* cuando $k > \frac{a^2}{b}$.

Por lo tanto, en el primer caso la curva posee *dos nodos reales* sobre el eje de las ordenadas (que uno con otro coinciden, si $k = a$); y en el segundo dos *puntos aislados.*

2.° Sean $a > k > b$.

Y la curva tendrá entonces *cuatro nodos imaginarios,* cuyas coordenadas se hallan definidas por los sistemas de ecuaciones (5) y (6).

3.° Y admitamos finalmente que sea $k \lesssim b$.

En este caso la curva tiene *dos nodos reales,* coincidentes uno con otro, cuando $k = b$, hallándose sus coordenadas definidas por las ecuaciones (5);

y otros dos *imaginarios*, por las (6). Los dos *nodos reales* se reducen á simples *puntos aislados*, cuando $k < \frac{b^2}{a}$.

De la precedente, muy sencilla, discusión resulta demostrado el siguiente teorema:

«Cada una de las curvas algébricas, representadas por las ecuaciones (3), posee, á distancia finita, *cuatro nodos: dos*, de los cuatro, *siempre imaginarios;* y otros *dos, también imaginarios*, si $k$ se halla comprendido entre $a$ y $b$; *ó reales los dos*, en el supuesto contrario. Cuando sea $k > \frac{a^2}{b}$, ó $k < \frac{b^2}{a}$, los *dos nodos reales* se convierten en *puntos aislados.*»

**320.** Los valores de $\theta$ en los *puntos de retroceso* deben satisfacer á las ecuaciones $\frac{dx}{d\theta} = 0$ y $\frac{dy}{d\theta} = 0$, ó á esta otra, en suma:

$$\theta^3 + a^2 b^2 k^2 = 0.$$

De donde se concluye que existirán *cuatro puntos de retroceso reales* cuando la raíz real de esta ecuación se halle comprendida entre $-bk$ y $-ak$, ó cuando $k$ satisfaga á las condiciones $\frac{b^2}{a} < k < \frac{a^2}{b}$; y, además, otros *ocho puntos* del mismo nombre, *imaginarios.* De no verificarse las últimas condiciones, *imaginarios* serán los *doce* puntos mencionados.

Los puntos de retroceso de la curva se pueden asimismo obtener mediante la ecuación $\rho^2 = k^2$, en la cual, como ya poco más atrás se advirtió, representa $\rho$ el *radio de curvatura* de la elipse. De la última ecuación se desprende, en efecto, esta otra:

$$a^4 \beta^2 + b^4 \alpha^2 = k^{\frac{2}{3}} b^{\frac{8}{3}} a^{\frac{8}{3}}$$

correspondiente á tres distintas elipses, *real* una é *imaginarias* las otras dos: las cuales, por sus intersecciones con la elipse propuesta, determinan los *doce puntos de retroceso* de la *toroide* considerada.

**321.** En el precedente estudio para nada se ha tenido en cuenta la condición de ser $k = \frac{a^2}{b}$ ó $k = \frac{b^2}{a}$. Supliremos la omisión ahora.

En el primero de estos casos, los *puntos de retroceso reales* y los *nodos*, también *reales*, existentes sobre el eje de las ordenadas, cuando $a < k < \frac{a^2}{b}$, forman, por su reunión ó coincidencia en los extremos del *eje mayor* de la evoluta de la elipse, dos *puntos triplos*, donde la tangente es paralela al eje de las abscisas; y la curva adquiere la forma de un *óvalo convexo*.

Y, en el segundo, los *puntos de retroceso reales* y los *nodos*, reales también, que la curva posee, situados en el eje de las abscisas, cuando

$$b > k > \frac{b^2}{a},$$

forman parecidamente, por su reunión en los extremos del *eje menor* de aquella evoluta, otros *dos puntos triplos*, donde la tangente es paralela al eje de las ordenadas: presentando entonces la curva la forma asimismo ovalado-convexa.

**322.** Fijemos ahora la atención en los puntos de la curva situados en *lo infinito*, procurando para ello determinar ante todo sus asíntotas.

De las ecuaciones (3) se concluye, por de pronto, que, cuando $\theta$ tiende hacia 0, $x$ tiende hacia $i\infty$, é $y$ hacia $\infty$; y que, en el supuesto de ser $x$ é $y$ del mismo signo, la relación $\frac{x}{y}$ tiende hacia $\frac{a}{b}i$. Y asimismo se advierte que, cuando $\theta$ tiende hacia $\infty$, $x$ tiende hacia $\infty$ también, é $\frac{y}{x}$ hacia $i$.

En el primer caso resulta que

$$\lim_{\theta=0}\left(x - \frac{a}{b}iy\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\lim_{\theta=0}\left\{ibk\left(1+\frac{a^2}{\theta}\right)\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{b^2k^2}+\ldots\right)-\frac{a^2k}{b}i\left(1+\frac{b^2}{\theta}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{a^2k^2}+\cdots\right)\right\}$$

$$= \pm i\frac{k}{b}\sqrt{a^2-b^2}.$$

Luego, en el supuesto á que nos referimos, la curva poseerá *dos asíntotas*, definidas por las ecuaciones

$$x = \frac{a}{b}iy \pm \frac{ik}{b}\sqrt{a^2-b^2}, \quad \text{ó} \quad y = -\frac{b}{a}ix \pm \frac{k}{a}\sqrt{a^2-b^2},$$

y otras dos por las que siguen:

$$y = \frac{b}{a}\, ix \pm \frac{k}{a}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Y, en el segundo, se concluye que

$$\lim_{\theta=\infty}(y - ix) = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\lim_{\theta=\infty}\left\{i\theta\left(1 + \frac{b^2}{\theta}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2 k^2}{\theta^2} + \ldots\right)\right.$$

$$\left. - i\theta\left(1 + \frac{a^2}{\theta}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{b^2 k^2}{\theta^2} + \ldots\right)\right\} = \pm i\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Luego la curva posee, además, otras *cuatro asíntotas,* determinadas por las ecuaciones

$$y = ix \pm i\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \text{é} \quad y = -ix \pm i\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Y como á cada uno de estos pares de asíntotas corresponde un *nodo,* situado en lo infinito, infiérese que las *toroides* poseen *cuatro nodos imaginarios* en la situación mencionada.

**323.** Puesto que, según lo acabado de ver, las toroides poseen *doce puntos de retroceso* y *ocho nodos; ó dos puntos triplos, seis nodos* y *ocho puntos de retroceso,*—conclúyese que estas curvas son del *género uno.* En corroboración de lo cual las ecuaciones (3) enseñan que las coordenadas $x$ é $y$ de las mismas curvas son funciones reales de $\theta$ y del radical

$$\sqrt{(\theta^2 - b^2 k^2)(a^2 k^2 - \theta^2)}.$$

De donde fácilmente se deduce, aplicando una fórmula de PLÜCKER, ya varias veces empleada, que la *clase de las toroides es igual á cuatro,* debiendo ser, en consecuencia, de *cuarto grado* la ecuación tangencial de las toroides.

Para hallar la cual, tomemos, por de pronto, la de su tangente

$$\frac{\sqrt{a^2 k^2 - \theta^2}}{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}}\, Y + \frac{\sqrt{\theta^2 - b^2 k^2}}{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}}\, X = 1;$$

que, comparada con esta otra,

$$uY + vX = 1,$$

exige, para su identificación, las dos siguientes condiciones:

$$u = \frac{\sqrt{a^2 k^2 - \theta^2}}{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{y} \quad v = \frac{\sqrt{\theta^2 - b^2 k^2}}{(\theta + k^2)\sqrt{a^2 - b^2}};$$

de donde, por eliminación de $\theta$, se desprende la ecuación pedida:

$$[(a^2 - k^2) v^2 + (b^2 - k^2) u^2 - 1]^2 = 4 k^2 (u^2 + v^2).$$

Y si, basándose en esta ecuación, nos proponemos hallar los *focos* de la curva á que se refiere, con auxilio esto de un método conocido, y ya en este libro varias veces aplicado, hallaremos que la toroide de que en particular se trata posee *dos focos* en coincidencia con los de la elipse: *focos, singulares,* donde se cortan las asíntotas, determinadas por ecuaciones con coeficientes $+ i$ y $- i$.

**324.** El estudio de las toroides puédese también efectuar por distinto procedimiento del expuesto.

Representando, en efecto, por $\alpha$ y $\beta$ las coordenadas de los puntos de la elipse, y por $\varphi$ un ángulo auxiliar, podremos escribir que $\alpha = a \operatorname{sen}\varphi$ y $\beta = b \cos\varphi$: con lo cual, para determinar las toroides que de la misma elipse proceden, dispondremos de estas ecuaciones

$$(x - a \operatorname{sen}\varphi)^2 + (y - b \cos\varphi)^2 = k^2, \quad \text{y}$$

$$\frac{a(x - a \operatorname{sen}\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{b(y - b \cos\varphi)}{\cos\varphi};$$

la segunda de las cuales resulta de la *derivación,* con respecto á $\varphi$, de la primera.

De estas ecuaciones, suponiendo que $\lambda^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, se desprenden las que siguen:

$$x = a \operatorname{sen}\varphi + \frac{bk \operatorname{sen}\varphi}{a\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \quad \text{ó} \quad y = b \cos\varphi + \frac{k \cos\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2\varphi}},$$

que pueden servir para demostrar las varias propiedades de las toroides, renglones antes deducidas de la consideración de las ecuaciones (3).

No emprenderemos aquí, sin embargo, por considerarlo innecesario, este nuevo estudio, y nos limitaremos á señalar la utilidad de las últimas fórmulas para hallar el valor, $A$, de las áreas y el $s$ de las longitudes de los arcos, de las curvas á que se refieren.

Para lo cual advirtamos que de aquellas fórmulas se infieren sencillamente estas otras, diferenciales suyas:

$$\frac{dx}{d\varphi} = a\cos\varphi + \frac{kb\cos\varphi}{a(1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \text{ y } \frac{dy}{d\varphi} = -b\operatorname{sen}\varphi - \frac{kb^2\operatorname{sen}\varphi}{a^2(1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

y que, en consecuencia, aplicando, por de pronto, la fórmula general

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi}\left(y\frac{dx}{d\varphi} - x\frac{dy}{d\varphi}\right)d\varphi,$$

se deduce esta otra:

$$A = \frac{1}{2}\left[ab\varphi + \frac{bk^2}{a}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi} + ka\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi + \frac{b^2k}{a}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Pero

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{b^2}\left[\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi - \frac{\lambda^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right], \text{ é}$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{a}{b}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\cot\varphi\right)\right].$$

Luego, finalmente:

$$A = \frac{1}{2}\left[ab\varphi + k^2\frac{\pi}{2} - k^2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\cot\varphi\right) - ab\lambda^2\frac{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + 2ka\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi\right].$$

Y de esta fórmula se concluye que el área descrita por el radio vector de un punto de la curva, cuando $\varphi$ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, es

$$A_1 = \frac{1}{4}\left[ab\pi + k^2\pi + 4ka\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi\right],$$

debiendo atribuirse á $k$ el signo *positivo* cuando se trate de la rama exterior de la curva considerada, y el *negativo* cuando de la interior.

El área comprendida entre dos ramas de la toroide tiene, pues, por expresión, encontrada por CAUCHY (*l. c.*), la siguiente:

$$A_2 = 8ka\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi.$$

De análogo módo, para determinar la longitud, $s$, de los arcos de toroide, representemos por $s_1$ la de los arcos de elipse correspondientes, á que se refiere la expresión

$$\left(\frac{ds_1}{d\varphi}\right)^2 = a^2(1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi).$$

Y como, además,

$$\frac{dx}{d\varphi} = a\cos\varphi + kba^2\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right)^3 \quad \text{y}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -b\operatorname{sen}\varphi - kab^2\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^3,$$

infiérese que

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left[\frac{ds_1}{d\varphi} + kab\left(\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^2\right]^2.$$

De donde, por integración, se deduce

$$s = s_1 + kab\int\left(\frac{d\varphi}{ds_1}\right)^2 d\varphi = s_1 + kab\int\frac{d\varphi}{a^2(1-\lambda^2\operatorname{sen}^2\varphi)}$$

$$= s_1 - k\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\cot\varphi\right) + C.$$

Ó, tomando por origen de los arcos $s$ y $s_1$ los puntos de la elipse y de la toroide, correspondientes á $\varphi = 0$, esta otra igualdad:

$$s = s_1 + k\,\frac{\pi}{2} - k \text{ arc tang}\left(\frac{a}{b}\cot\varphi\right).$$

Recordando, finalmente, la relación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\tan\varphi,$$

y representando por $\omega$ el ángulo formado por el eje de las abscisas con la *normal* á la toroide, en el punto correspondiente al valor considerado de $\varphi$, hállase que

$$\tan\omega = \frac{a}{b}\cot\varphi;$$

y, en consecuencia (Breton de Champ, *l. c.*),

$$s = s_1 + k\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right).$$

### B. PODARIAS CENTRALES DE LAS TOROIDES

**325.** En nuestra Memoria sobre las *Curvas paralelas á la elipse*, mencionada en el Núm. **317**, hicimos el estudio, por vez primera creemos, de las propiedades de la *podaria central de cualquier toroide*, del cual es trasunto compendioso lo que á renglón seguido pasamos á exponer.

Sean $X$ é $Y$ las coordenadas de un punto de la *podaria* considerada, correspondiente al $(x, y)$ de la toroide. De las ecuaciones de la tangente á esta curva, Núm. **323**, y de la perpendicular á esta tangente, trazada por el origen de las coordenadas, $Y = \sqrt{\frac{a^2k^2 - \mathfrak{h}^2}{\mathfrak{h}^2 - b^2k^2}}\,X$, se desprenden los siguientes resultados:

$$(7)\quad X = \frac{\mathfrak{h} + k^2}{k^2}\sqrt{\frac{\mathfrak{h}^2 - b^2k^2}{a^2 - b^2}} \quad \text{é} \quad Y = \frac{\mathfrak{h} + k^2}{k^2}\sqrt{\frac{a^2k^2 - \mathfrak{h}^2}{a^2 - b^2}},$$

ó valores de $X$ é $Y$, correspondientes á un punto de la *podaria*, en función del parámetro variable $\theta$.

Cada *podaria*, según esto, consta de dos ramas reales distintas, correspondiente una á la rama exterior, y otra á la interior, de la toroide de que en particular se trata, deduciéndose los *puntos reales* de la primera rama por la variación de $\theta$ entre $bk$ y $ak$, y los de la segunda por la variación análoga de $\theta$ entre $-bk$ y $-ak$; resultando fácilmente definida la forma de la curva por medio de las ecuaciones (7) y de esta otra:

$$(8) \qquad \frac{dY}{dX} = -\frac{2\theta^2 + k^2\theta - a^2k^2}{2\theta^2 + k^2\theta - b^2k^2}\sqrt{\frac{\theta^2 - b^2k^2}{a^2k^2 - \theta^2}}.$$

Las dos ramas son simétricas una de otra por referencia á los ejes coordenados, á los cuales cortan en los puntos $(a \pm k, 0)$ y $(0, b \pm k)$, donde las tangentes á la podaria son además perpendiculares al eje que por ellos pasa. La rama exterior posee *cuatro puntos*, donde el valor absoluto de la ordenada es máximo, correspondientes á la *raíz positiva* de la ecuación

$$2\theta^2 + k^2\theta - a^2k^2 = 0,$$

cuando esta raíz se halla comprendida entre $bk$ y $ak$. Y la interior otros *cuatro*, donde el valor absoluto de la ordenada es también máximo, correspondientes á la *raíz negativa* de la misma ecuación, cuando esta raíz se halla comprendida entre $-bk$ y $-ak$.

A los valores de $\theta$, determinados por la ecuación

$$2\theta^2 + k^2\theta - b^2k^2 = 0,$$

puede suceder que no corresponda *ningún* punto de la curva, ó que correspondan *cuatro*, situados en cada rama, donde el valor absoluto de la abscisa pasa por un máximo.

Si $k > a$, ó $k < b$, el origen de las coordenadas representará un *punto cuádruplo aislado*. Y, si $b < k < a$, un *nodo cuádruplo real*. Pero, en este caso, solamente dos de las tangentes que pasan por el nodo serán distintas, hallándose determinados sus coeficientes por la expresión $\pm\sqrt{\frac{a^2 - k^2}{k^2 - b^2}}$, y presentando entonces la rama interior la forma indicada en la fig. 102.

Finalmente, cuando sean $k = a$ ó $k = b$, la curva tiene, además, un *nodo cuádruplo* en el origen de las coordenadas, y la rama interior se compone de dos óvalos, tangentes en este punto al eje de las abscisas, si $k = a$, ó al de las ordenadas, si $k = b$.

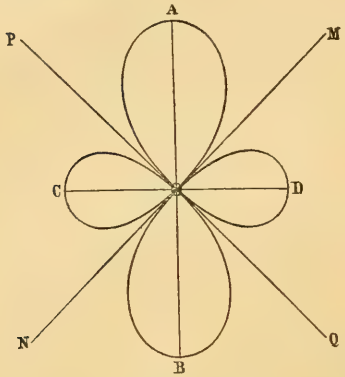


Figura 102.

**326.** Con auxilio de las ecuaciones (7) obtiénese fácilmente la ecuación cartesiana de la *podaria central de la toroide.*

De aquellas ecuaciones dedúcese, en efecto, primeramente que

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{\theta^2 - b^2 k^2}{a^2 k^2 - \theta^2};$$

y sustituyendo en una de aquellas ecuaciones (7) el valor de $\theta^2$, procedente de la última, conclúyese esta otra, que es la buscada ahora:

$$(9) \quad [(x^2+y^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2) - k^2(x^2+y^2)]^2 = 4k^2(a^2x^2+b^2y^2)(x^2+y^2).$$

De la cual se desprende, en primer lugar, que la curva posee *cuatro asíntotas,* determinadas por las ecuaciones

$$y = ix \pm \frac{1}{2} i\sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{é} \quad y = -ix \pm \frac{1}{2} i\sqrt{a^2 - b^2},$$

y que cada una de estas asíntotas es *doble.* Y de las mismas ecuaciones se deduce también que la curva posee *dos puntos cuádruplos* en lo *infinito,* y *dos focos singulares,* así definidos: $\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$.

**327.** La misma ecuación (9) puede también escribirse de este modo:

$$[(x^2 + y^2)^2 - (a^2 x^2 + b^2 y^2) + k^2(x^2 + y^2)]^2 = 4k^2(x^2 + y^2)^3.$$

Ó, suponiendo que $x = \rho \cos\theta$ é $y = \rho \operatorname{sen}\theta$,

$$(k \pm \rho)^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

De donde se infiere que las curvas consideradas tienen por *ecuación polar* la que sigue:

$$\rho = k \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

De la cual inmediatamente resulta demostrado que *las podarias de las curvas paralelas á la elipse son concoides de lemniscata elíptica* (Número 121). Teorema también resultante de una proposición general, de fácil demostración, según la cual las *podarias*, relativas á un mismo punto, de dos curvas paralelas son *concoides* una de otra, y de la particular, ya demostrada anteriormente, según la cual la *lemniscata elíptica* es la *podaria central de la elipse.*

328. Si eliminamos la variable $\theta$, entre la ecuación de la *podaria central* de las toroides

$$(\rho - k)^2 = a^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \operatorname{sen}^2 \theta\right),$$

y la de una recta, que pasa por el punto $(0, y_0)$,

$$\rho \operatorname{sen} \theta = A \rho \cos \varphi + y_0,$$

hállase que

$$\frac{(1 + A^2)^2}{(b^2 - a^2)^2} (\rho^8 - 4 k \rho^7)$$

$$+ 2 \frac{1 + A^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{(3 k^2 - a^2)(1 + A^2)}{b^2 - a^2} - A^2\right] \rho^6 + \ldots + y_0{}^4 = 0:$$

ecuación que determina los valores de $\rho$, en los puntos donde la recta corta á la curva de que se trata. Valores, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_8$, que deben satisfacer á esta condición:

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_7 + \rho_8 = 4k.$$

La cual, en lenguaje vulgar, vale tanto como decir que *la suma de las distancias del centro á los puntos donde una recta cualquiera corta á la curva es igual á* $4k$.

Asimismo se deduce de lo expuesto que

$$\Sigma \rho_1 \rho_2 = -\frac{b^2 - a^2}{1 + A^2} K,$$

representando por $\Sigma \rho_1 \rho_2$ la suma de los productos binarios de las cantidades $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_8$, y por $K$ una cantidad independiente de $y_0$. Y, en consecuencia:

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots \rho_8^2 = 2\,\frac{b^2 - a^2}{1 + A^2} K.$$

La cual significa que *la suma de los cuadrados de las distancias del centro á los puntos en que una recta cualquiera corta á la curva permanece constante, cuando la recta se mueve paralelamente á sí misma.*

Y, por ser $A = \text{tang}\omega$, conclúyese también que

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_8 = \frac{y_0^4 (b^2 - a^2)^2}{(1 + A^2)^2} = y_0^4 (b^2 - a^2)^2 \cos^4 \omega,$$

representando por $\omega$ el ángulo de la recta dada con el eje de las abscisas. Expresión que se transforma en la que sigue, si por $\Delta$ se designa la distancia de la recta al centro de la curva:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \ldots \rho_8 = \Delta^4 (a^2 - b^2)^2,$$

y de la cual se concluye que *el producto de las distancias del centro de la curva á los puntos de intersección de esta curva con una recta es constante, por referencia á todas las rectas equidistantes del expresado centro.*

**329.** Análogamente: la circunferencia que tiene por ecuación

$$\rho^2 - 2\,\alpha\rho\cos\theta - 2\,\beta\rho\,\text{sen}\,\theta + \alpha^2 + \beta^2 = R^2,$$

corta á la *podaria* de cualquier curva paralela á la elipse en *ocho puntos:* siendo cosa fácil averiguar que los valores de $\rho$ en estos puntos satisfacen á las siguientes condiciones, en las cuales $K_1$ representa una cantidad independiente de $R$.

$$\rho'_1 + \rho'_2 + \dots + \rho'_8 = K_1, \quad \text{y}$$

$$\rho'_1 \rho'_2 \dots \rho'_8 = \frac{(b^2 - a^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2)^4}{[4(\alpha^2 + \beta^2) - (b^2 - a^2)]^2 + 16\beta^2(a^2 - b^2)},$$

que, puestas en castellano, dirían:

*La suma de las distancias de su centro á los puntos en que una circunferencia cualquiera corta á la podaria de una toroide es independiente del radio de la circunferencia.*

*Y el producto de las mismas distancias no varía tampoco cuando la podaria, considerada en primer término, se sustituye por la de otra toroide, paralela á la misma elipse, ó á otra elipse, homofocal de la primitiva.*

## IX

### LA CURVA EQUIPOTENCIAL

**330.** En un artículo, publicado en el *Phylosophical Magazine* (1857, *t.* XIV, *p.* 142), denominó CAYLEY *curva equipotencial* á la que, en *coordenadas bipolares*, tiene por ecuación la siguiente:

$$(1) \qquad \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} = \frac{k}{a},$$

en la cual $m$, $m'$ y $k$ designan cantidades constantes, y $r$ y $r'$ las distancias de uno cualquiera de sus puntos á otros dos *fijos*, en el plano de la misma curva, separados por la distancia invariable $a$. Curva que desempeña en Física importante papel, porque representa el *meridiano* de aquella superficie de resolución, en la cual se verifica que el *potencial* de las *masas*, $m$ y $m'$, de dos *centros de atracción ó de repulsión*, situados en su eje, á la distancia $a$ uno de otro, es constante en toda la superficie: de donde procede el nombre que á la *curva* atribuyó el mencionado eminente geómetra.

**331.** Para hallar su ecuación en *coordenadas cartesianas*, adoptemos por origen de las mismas uno de los centros fijos, y por eje de las absci-

sas la recta que relaciona ambos centros; é inmediatamente podremos establecer las ecuaciones siguientes:

$$(2) \qquad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad r'^2 = (x-a)^2 + y^2.$$

De las cuales, por su combinación con la (1), para eliminar las $r$ y $r'$, se desprende la ecuación pedida, de grado 8.°:

$$\{a^2 m^2 [(x-a)^2 + y^2] + a^2 m'^2 (x^2 + y^2)$$
$$- k^2 (x^2 + y^2) [(x-a)^2 + y^2]\}^2 = 4a^4 m^2 m'^2 (x^2 + y^2) [(x-a)^2 + y^2].$$

Con auxilio de esta ecuación, conclúyese fácilmente que cada una de las rectas $y = \pm ix$ é $y = \pm i(x-a)$ corta á la curva en dos puntos *coincidentes* uno con otro, situados á distancia finita. Luego el *origen de las coordenadas* $(0, 0)$ y el punto $(a, 0)$, *centros* de las coordenadas *bipolares* consideradas, son *focos ordinarios* de la curva.

Y, por medio de la misma ecuación, conclúyese también que las mismas rectas son asíntotas de la curva, y, por consecuencia, que los referidos puntos son además *focos singulares;* y que también son *dobles* las mencionadas asíntotas.

La curva posee, pues, dos *puntos cuádruplos* en lo infinito, con dos *tangentes distintas* en cada uno de ellos.

**332.** Los valores de las coordenadas, $x$ é $y$, de los puntos de la curva pueden expresarse fácilmente en función de $r$. Para lo cual basta acudir á las ecuaciones (1) y (2), de donde se desprenden estas otras:

$$(3) \qquad x = \frac{(a^2 + r^2)(kr - am)^2 - a^2 m'^2 r^2}{2a(kr - am)^2}, \quad \text{é}$$

$$(4) \qquad y = \frac{k^2 \sqrt{-(r-\alpha_1)(r-\alpha_2)\ldots(r-\alpha_8)}}{2a(kr - am)^2}:$$

representando por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_8$ las raíces de las ecuaciones de *segundo grado*

$$(5) \qquad \begin{cases} (r-a)(kr - am) - am' r = 0, \\ (r-a)(kr - am) + am' r = 0, \\ (r+a)(kr - am) - am' r = 0, \\ (r+a)(kr - am) + am' r = 0. \end{cases}$$

*Reales* siempre y *desiguales*, por pares, si corresponden á las ecuaciones *primera, tercera* y *cuarta;* y *reales*, solamente, las correspondientes á la *segunda*, cuando

$$(k + m - m')^2 - 4km \gtrless 0, \quad \text{ó}$$

$$\left[k - (\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2\right]\left[k - (\sqrt{m} - \sqrt{m'})^2\right] \gtrless 0;$$

é *imaginarias* en el supuesto contrario.

Ó, en otros términos, por referencia exclusiva á las raíces de la ecuación segunda: *reales* y *desiguales* si $k > (\sqrt{m}+\sqrt{m'})^2$, ó $k < (\sqrt{m}-\sqrt{m'})^2$; *imaginarios* cuando $k$ se encuentra comprendida entre ambos valores; é *iguales* cuando $k = (\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2$, ó $k = (\sqrt{m} - \sqrt{m'})^2$.

**333.** Fundándose en estos resultados y en las igualdades

$$\frac{dx}{dr} = \frac{r\left[(kr - am)^3 + a^3 mm'^2\right]}{a\,(kr - am)^3}, \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dr} = \frac{k^2}{2a}\,\frac{F'(r)\,(kr - am) - 4kF(r)}{2\,(kr - am)^3\sqrt{F(r)}}, \tag{7}$$

en las cuales

$$F(r) = -(r - \alpha_1)(r - \alpha_2)(r - \alpha_3)\ldots(r - \alpha_8),$$

puédese hallar la forma general de la curva, distinguiendo tres casos para ello.

1.° Supongamos que las raíces $\alpha$ sean todas *reales* y *desiguales*, y que $\alpha_8 > \alpha_7 > \ldots > \alpha_1$.

En este caso $y$ será *real* y *finita* cuando $r$ se halle comprendida en los intervalos $(\alpha_8\,\alpha_7)$, $(\alpha_6\,\alpha_5)$, $(\alpha_4\,\alpha_3)$ y $(\alpha_2\,\alpha_1)$; é *imaginaria* en los demás.

Luego la curva se compondrá entonces de *cuatro óvalos*, simétricos con relación al *eje de las abscisas*, al cual cortan normalmente en los puntos donde $r$ es igual á cualquiera de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_8$.

Para hallar los puntos de estos óvalos, donde las tangentes son paralelas al eje de las abscisas y *eje* también *de la curva*, hay que resolver la ecuación de *octavo* grado, relativamente á $r$:

$$F'(r)\,(kr - am) - 4kF(r) = 0. \tag{8}$$

Respecto á la cual comenzaremos por advertir que, siendo

$$F'(r) = -[(r-\alpha_7)(r-\alpha_6)\ldots(r-\alpha_1)$$
$$+(r-\alpha_8)(r-\alpha_6)\ldots(r-\alpha_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(r-\alpha_8)(r-\alpha_7)\ldots(r-\alpha_2)],$$

la función $F'(r)$ será *negativa* cuando sea $r = \alpha_8, \alpha_6, \alpha_4$ ó $\alpha_2$; y *positiva* cuando $r = \alpha_7, \alpha_5, \alpha_3$ ó $\alpha_1$; y, por lo tanto, que el primer miembro de la ecuación (8) variará de signo seis ó siete veces, cuando sucesivamente se atribuyan á $r$ los valores $\alpha_8, \alpha_7, \alpha_6, \ldots \alpha_1$. Luego tres de los óvalos considerados poseen *un* punto á cada lado del eje, donde la tangente es paralela á este mismo eje, y el cuarto puede poseer uno ó tres puntos, dotados de igual propiedad.

La tangente es perpendicular al eje de las abscisas ó *eje de la curva* en los puntos en que le corta, y en aquellos otros correspondientes á los valores de $r$, dados por la ecuación

$$(kr - am)^3 + a^3 mm'^2 = 0, \quad \text{ó} \quad r = \frac{am - a\sqrt[3]{mm'^2}}{k}.$$

A los cuales corresponden dos puntos, simétricamente situados con respecto al eje de las abscisas: *reales* cuando $r$ se halla comprendido en los intervalos $(\alpha_8, \alpha_7)$, $(\alpha_6, \alpha_5)$, $(\alpha_4, \alpha_3)$ y $(\alpha_2, \alpha_1)$, é *imaginarios* en el caso contrario.

2.° Si dos de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_8$ fuesen imaginarias, veríase de análogo modo que la curva se compone de *tres óvalos*, con un eje común, coincidente con el de las abscisas; y los puntos donde las tangentes á la curva son paralelas, ó perpendiculares al mismo eje, se determinarán por medio de las mismas ecuaciones que en el caso anterior.

3.° Y cuando las dos raíces de la segunda de las ecuaciones (5) sean iguales, los valores de $r$, que satisfarán á esta ecuación, tendrán por expresión

$$r = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{m'}}, \quad \text{ó} \quad r = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m} - \sqrt{m'}},$$

conforme sea $k = (\sqrt{m} + \sqrt{m'})^2$, ó $k = (\sqrt{m} - \sqrt{m'})^2$.

Dos de los óvalos á que nos referimos tendrán entonces un punto común, situado sobre el eje de las abscisas: necesariamente *punto duplo* de la curva, cuya abscisa estará representada en cualquier caso por el valor de $r$ que le corresponda.

334. Previas las indicaciones que acabamos de exponer, en cualquier caso es factible precisar, con relativa sencillez, la figura de la curva. Y así se comprende que, en su hermosa é importante memoria, poco más atrás mencionada, lograse CAYLEY determinar, por modo casi intuitivo, y sin detenerse en detalles analíticos, la distribución de los *óvalos componentes,* por referencia á los *focos,* y las modificaciones que en su forma y disposición experimentan conforme el valor de $k$ varía. Asunto sobre el cual no insistiremos aquí, limitándonos á recomendar con empeño la lectura de la memoria original, y en grado sumo instructiva, del ilustre geómetra citado. No daremos, sin embargo, por ultimada nuestra tarea sin antes demostrar algunas propiedades de los puntos de intersección de una transversal cualquiera con la curva de que se trata.

Y, para ello, supongamos que la ecuación de la transversal sea ésta:

$$Ax + By + C = 0.$$

Por su combinación con las (3) y (4), ó eliminación entre las tres de las coordenadas $x$ é $y$, hállase la siguiente, condicional, á que deben satisfacer los valores de $r$, correspondientes á los *ocho puntos* de intersección:

$$A[(a^2+r^2)(kr-am)^2-a^2m'^2r^2]+Bk^2\sqrt{F(r)}+2aC(kr-am)^2=0; \quad \text{ó}$$

$$B^2k^4F(r)-\{(kr-am)^2[2aC+A(a^2+r^2)-a^2m'^2r^2\}^2=0;$$

ó, finalmente:

$$k^4(A^2+B^2)r^8-4amk^3(A^2+B^2)r^7$$
$$+\ldots+a^4m^4[B^2a^4+(2aC+Aa^2)^2]=0.$$

Y de esta ecuación se deduce:

1.° Que la suma de las distancias $r_1, r_2, \ldots, r_8$, de los puntos de inter-

sección de la transversal con la curva, al foco adoptado por origen de las coordenadas, satisface á la condición

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_8 = 4\frac{am}{k};$$

y que, del propio modo, la suma de las distancias $r'_1, r'_2, \ldots, r'_8$, de los mismos puntos al segundo foco, satisface á esta otra:

$$r'_1 + r'_2 + \ldots + r'_8 = -4\frac{am'}{k}.$$

Lo cual, en términos generales, significa que *la suma de las distancias, á cualquiera de los focos de la equipotencial, de los puntos en que una transversal arbitraria corta á la curva, es cantidad constante.*

Y 2.° Que el producto de las *ocho* distancias ó valores de $r$ tiene por expresión la siguiente:

$$r_1 r_2 \ldots r_8 = \frac{a^6 m^4}{k^4}\left[a^2 + 4\frac{C(C+Aa)}{A^2+B^2}\right].$$

Expresión que se transforma en esta otra

$$r_1 r_2 \ldots r_8 = \frac{a^8 m^4}{k^4},$$

suponiendo que

$$C + Aa = 0, \quad \text{ó} \quad A(x-a) + By = 0,$$

ó que la transversal pasa por el foco $(a, 0)$.

De donde se deduce que *el producto de las distancias, á uno de los focos, de los puntos donde las transversales que pasan por el otro cortan á la curva, es asimismo cantidad constante.*

Las dos propiedades que acabamos de demostrar parécenos que, por vez primera, fueron por nosotros advertidas en un artículo publicado en los *Archiv der Mathematik und Physik* (3.ª serie, t. III), así como el procedimiento analítico, líneas antes empleado, para el estudio de la *curva equipotencial* á que se refiere.

## X

### NOTA FINAL COMPLEMENTARIA, REFERENTE Á LA HISTORIA DE LAS CURVAS ALGEBRICAS

**335.** Dimos por terminada la reseña de las curvas más notables de *tercer grado*, y exposición de sus más salientes propiedades, con una breve noticia histórico-bibliográfica, págs. 98 y 99, concerniente á tan interesante asunto. Y de análoga manera procedimos (págs. 253-255), después de efectuado el examen individual de las curvas de *cuarto*, por su número y la dificultad de su análisis, todavía de mayor interés que las de *tercero*. Pues al hacer punto en el estudio, cada vez más complicado, de las curvas algébricas, de grados ú órdenes superiores, antes de pasar al de las *transcendentes*, natural es que procedamos de análoga manera.

**336.** La *Enumeratio linearum tertii ordinis de* NEWTON, ya varias veces por nosotros mencionada, constituye el fundamento de la Teoría de las Curvas algébricas, no solamente porque en aquella obra admirable se encuentran consignados los primeros teoremas generales á tales curvas referentes, sino también porque la demostración de los resultados relativos á las *cúbicas*, en ella contenidos, exigió la adopción de razonamientos de, relativamente, fácil ampliación á las de los órdenes superiores: tanto que, en sentir de CRAMER, poco faltó á STIRLING, sucesor inmediato y muy sagaz comentador de la original producción de NEWTON, para formular la primera teoría de las mencionadas curvas algébricas, y ahorrar á los géometras que le sucedieron todo trabajo en este sentido, á no ser el complementario en los detalles.

**337.** A los teoremas de NEWTON, á que acabamos de referirnos, agregaron otros, de interés y transcendencia asimismo, NICOLE, MACLAURIN, COTES, EULER y CRAMER: organizadores, estos dos, de la doctrina matemática de aquellas mismas curvas, que sistemáticamente expusieron, aquél, en su *Introductio in Analysin Infinitorum*, y, el último, en su *Introduction à l'Analyse des Lignes courbes*. Producciones ambas de grande y merecida celebridad, donde se hallan expuestos los fundamentos de la teoría de las *intersecciones* de las curvas algébricas, de sus *centros* y *diámetros*, de sus *puntos singulares*, y de sus *asíntotas:* ampliados posteriormente

con nuevos é importantes teoremas, descubiertos por los sagaces geómetras que á los mencionados sucedieron en gran número, hasta los tiempos actuales.

**338.** Los primeros importantes progresos en la *Teoría de las Curvas algébricas* fueron, posteriormente, debidos al eminente geómetra PLÜCKER, quien estableció la noción general y fecunda de los *focos (Journal de* CRELLE, tomo X, 1833), varias veces en este nuestro libro recordada y utilizada; introdujo en el análisis geométrico las *coordenadas tangenciales (System der analytischen Geometrie,* 1835); mostró la importancia del nuevo modo de representación analítica de las curvas algébricas, en tan provechoso artificio basado; y dió á conocer (l. c.) las fórmulas que llevan su nombre, y que ligan los números expresivos del *orden* y de la *clase* de una curva cualquiera, con los que designan cuántos *puntos* y *rectas singulares* la misma curva posee: descubrimientos notables todos, que sirvieron de punto de partida y de eficaz estímulo para otros, de sumo interés asimismo, emprendidos por diversos ilustres geómetras del apenas finado siglo XIX, con el fin, unos, de precisar el número y situación de los *focos,* y de indagar las *propiedades focales* de las curvas; otros, con el de estudiar á fondo la naturaleza de aquellos *puntos* y *rectas,* y de extender ó ampliar la aplicación de las *fórmulas* de PLÜCKER; y, otros, con el de discurrir y exponer nuevos procedimientos para determinar más fácil y sistemáticamente lo antes de ellos trabajosamente encontrado, y no todavía presentado con la claridad que lo abstruso y extraño de la materia para su pronta difusión exigía.

**339.** A la noción de *orden* y *clase* de las curvas, introducida por PLÜCKER en la ciencia geométrica, agregó poco más tarde RIEMANN la del *género,* de no menor transcendencia, según poco después hizo ver CLEBSCH, al tratar del problema de la representación de las mismas curvas por medio de funciones, de naturaleza determinada, con un parámetro arbitrario: demostrando que las del género *cero* son *unicursales;* que las coordenadas correspondientes á las del *uno* pueden expresarse por funciones racionales de un parámetro arbitrario y de la raíz cuadrada de otra función entera, de tercero ó cuarto grado, del mismo parámetro; etc., etc. Con lo cual introdujo en el estudio de las curvas, no unicursales, el uso de las funciones *elípticas, hiperelípticas* y *abelianas,* empleando las propiedades de estas

funciones para deducir otras, correspondientes á las curvas: relacionando de esta manera las doctrinas más elevadas de la Geometría con las superiores del Análisis; y abriendo con esto amplio camino de inesperadas investigaciones á la insaciable y fecunda curiosidad de los más ilustres geómetras de los tiempos presentes.

**340.** Sin remontarse á tanta altura, es de advertir que en el estudio muy variado de las curvas empléanse con frecuencia los llamados *métodos de transformación*, por medio de los cuales redúcense el análisis y detallado conocimiento de una curva á los de otra, por algún concepto más sencilla, y ligada con la primera por las mismas condiciones, analíticas ó geométricas, que sirven para bien definir la transformación. Distinguiéndose entre las muchas y muy variadas transformaciones que pueden emplearse, por su sencillez y fecundidad, las denominadas *lineales* ú *homográficas*, que comprenden la *proyectiva*, profundamente estudiada por PONCELET y por CHASLES; las *birracionales* de cualquier grado, por CREMONA; y las que se efectúan por *polares recíprocas*, también, por los mismos primeros geómetras mencionados, cuidadosa y muy ampliamente estudiadas y empleadas. Con la advertencia de que, por resultado de las primeras, no varían ni el número ni la naturaleza de los *puntos singulares* de las curvas á que se aplican; y que, por medio de las segundas, conforme NOETHER demostró, se pueden siempre reducir las curvas en que existen *puntos duplos* con *tangentes coincidentes*, á otras que posean *puntos*, sí, *del mismo nombre*, pero con tangentes *distintas*. A todo lo cual hay que agregar todavía que, ni las *transformaciones birracionales*, ni las de carácter general, limitadas por la condición de que á cada punto de la curva en primer término considerada, solamente corresponda en la transformada otro punto, alteran el *género* de la curva propuesta, según RIEMANN consiguió demostrar.

**341.** Suele completar el estudio de las curvas, minuciosamente consideradas, el de otras curvas muy notables, que de ellas se derivan y que á ellas se asocian con diversos fines: verdaderas *transformadas* suyas, por procedimiento bien definido. Como las *evolutas* y las *evolventes*, las *podarias*, las *recíprocas*, las *paralelas*, las *concoides*, las *polares* con relación á un punto, y otras muchas, cuyo detenido estudio constituye otros tantos interesantes capítulos de Geometría: mereciendo, entre ellas, espe-

cial atención las denominadas *covariantes*, introducidas en la ciencia por HESSE, CAYLEY y STEINER, y que, en honor de estos célebres geómetras, y en razón de su importancia indiscutible en la moderna *Teoría de las Curvas*, son conocidas y frecuentemente designadas por los nombres de *hessiana*, *cayleyana* y *steineriana*.

**342.** Otras muchas cuestiones, referentes á las curvas algébricas, sin conexión bien perceptible ó inmediata con las en los precedentes renglones mencionadas, han sido objeto de penoso, y al fin satisfactorio, estudio, para distinguidos matemáticos de nuestros días, como KLEIN, que encontró interesante relación entre el número de sus *puntos y tangentes singulares reales;* CAYLEY, GERBALDI, y otros, que se ocuparon en la determinación de aquellos puntos en que una curva cualquiera admite con una *cónica* un contacto de *quinto orden;* STAUDT, ZEUTHER, y algunos más, en la del número de sus *ramas;* CREMONA, CAPORALI, GUCCIA..., que estudiaron los *sistemas lineales* de las curvas, y, con especialidad, los *haces* y las *redes;* y BRILL, NOETHER, SEGRE..., las propiedades de los *grupos de puntos,* resultantes de cortar una curva dada por sistemas definidos de otras curvas, de cualesquiera órdenes: etc., etc.

**343.** En tantos y tan complicados trabajos de investigación matemática, unos investigadores han empleado procedimientos puramente geométricos, y preferido otros utilizar, para el logro de sus fines, los métodos analíticos, más fecundos, y también, en general, de más fácil aplicación, entre ellos, como es natural, los derivados del Álgebra, y, muy en particular, de aquella parte de esta ciencia consagrada á la *Teoría de las Formas,* que en la *Geometría Superior de las Curvas* es donde más importantes resultados ha producido.

**344.** El número de notas y memorias, destinadas á la exposición y dilucidación de tan múltiples y variados puntos de doctrina como dejamos señalados, compréndese, sin esfuerzo, que ha de ser inmenso: como de ello puede cualquiera convencerse con solamente repasar los índices de las revistas científicas y publicaciones matemáticas en los últimos cincuenta años dadas á luz en Europa y en los Estados Unidos de América. Mencionarlas aquí, á nada útil conduciría, y por eso nos limitaremos á citar, como de lectura provechosa para cuantos deseen adquirir compendioso conocimiento de la *Historia* y *Bibliografía* de la *Teoría general de las Curvas*

*Algébricas*, á que nos referimos, íntimamente conexionadas con las de las *Funciones* del mismo nombre, así en los tiempos antiguos como en los modernos, sin olvidar las obras ya mencionadas (págs. 99 y 255), por referencia á la *Historia* de las *cúbicas* y de las *cuárticas*, el famoso *Aperçu historique de* CHASLES (París, 1875), y la notable *Información* sobre tan vasto asunto, presentada por BRILL y NOETHER á la *Sociedad Matemática de Alemania*, y por ésta publicada en el tomo III de su *Jahresbericht*, correspondiente al año 1894, pág. 107 y siguientes. Así como, para el estudio sistemático de asunto tan hermoso y de tanta importancia recomendamos, preferentemente, las obras didácticas de SALMON y de CLEBSCH, ya citadas en el Núm. **104**, á propósito de la *Teoría general de las Cúbicas*, donde la doctrina de las curvas se encuentra admirablemente tratada por métodos analíticos; y á la de CREMONA, titulada *Introduzione a una Teoria geometrica delle Curve piane* (Bolonha, 1862), merecedora también de grande elogio, y en cuya exposición se emplean los sintéticos.

# CAPÍTULO SÉPTIMO

## CURVAS TRANSCENDENTES NOTABLES

### I

### LA LOGARÍTMICA

**345.** Aplicó HUYGENS el nombre de *logarítmica* á la curva representada por la ecuación, en coordenadas cartesianas,

$$y = a e^{\frac{x}{m}}, \quad \text{ó} \quad \frac{x}{m} = \log \frac{y}{a}:$$

años antes, en 1644, ya considerada por TORRICELLI, en carta dirigida á RICCI, contenida en la colección de las de aquel perspicaz geómetra, publicada en 1864 por GHINASSI, y, poco más adelante, también por JAMES GREGORY, que trató de esta curva en su *Geometriæ pars prima*, dada á luz en 1668, definiéndola en términos equivalentes á la igualdad

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^{x''-x'} = \left(\frac{y''}{y'}\right)^{x-x'}:$$

en la cual las coordenadas $x$ é $y$ se refieren á un punto variable, y las $x'$ é $y'$, y $x''$ é $y''$ á dos puntos fijos de la curva. Pero el estudio de sus propiedades, como el nombre, debe atribuirse principalmente á HUYGENS, quien determinó sus áreas, sus tangentes, el volumen de los sólidos de revolución por ella engendrados, etc., etc. (HUYGENS: *De causa gravitatis*, 1691). Siendo de advertir que los resultados en estos varios conceptos obtenidos por aquel célebre geómetra fueron por él simplemente enunciados, y demostrados más tarde por NICOLAS en su obra *De spiralibus hyperbolicis et lineis logarithmicis*, publicada en 1696; y también por el P. GUIDO-GRANDI, en un trabajo titulado *Demonstratio theorematum Hugenianorum*.

**346.** Como la forma de la curva es siempre la misma, cualesquiera que sean los signos de $a$ y $m$, supondremos que $a$ y $m$ son positivos, y en tal supuesto procuraremos determinarla.

Cuando $x$ varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$, $y$ se conserva siempre positiva, y aumenta, constante é indefinidamente, desde 0 hasta $\infty$. Luego la curva consta de una rama única, que por derecha é izquierda se extiende indefinidamente (fig. 103) en el sentido de las abscisas positivas y negativas, y tiene por asíntota el eje de este nombre. Al eje de las ordenadas le corta la curva en el punto $A$, donde $OA = a$. Y como la derivada $y''$ no se anula en punto alguno, resulta que la curva tampoco posee ninguno de *inflexión*.

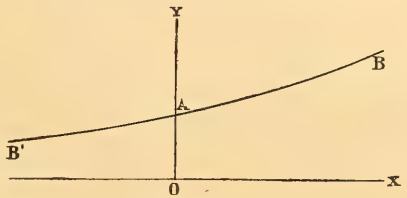


Figura 103.

**347.** La subtangente, la subnormal, la longitud de la tangente y la longitud de la normal de la logarítmica hállanse expresadas por las fórmulas

$$S_t = m, \quad S_n = \frac{y^2}{m}, \quad T = \sqrt{y^2 + m^2}, \quad \text{y} \quad N = \frac{y}{m}\sqrt{y^2 + m^2};$$

la primera de las cuales muestra que *la subtangente de la logarítmica es cantidad constante.*

**348.** El radio de curvatura tiene por expresión

$$R = \frac{(y^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{my} = \frac{m^2 N^3}{y^4} = \frac{N^3}{S_n^2}.$$

**349.** Y el área de la zona, comprendida entre la logarítmica, el eje de las abscisas y las ordenadas de los puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$, esta otra, sencillísima:

$$A = a\int_{x_0}^{x_1} e^{\frac{x}{m}} dx = m\,(y_1 - y_0).$$

**350.** La longitud del arco, comprendido entre los mismos puntos de la curva, se desprende de la fórmula

$$s = \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\, dy = \int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{y} \sqrt{y^2 + m^2}\, dy$$

$$= \sqrt{y_1^2 + m^2} + \frac{m}{2} \log \frac{\sqrt{y_1^2 + m^2} - m}{\sqrt{y_1^2 + m^2} + m}$$

$$- \left[ \sqrt{y_0^2 + m^2} + \frac{m}{2} \log \frac{\sqrt{y_0^2 + m^2} - m}{\sqrt{y_0^2 + m^2} + m} \right];$$

ó

$$s = T_1 - T_0 + \frac{m}{2} \log \frac{(T_1 - m)(T_0 + m)}{(T_1 + m)(T_0 - m)};$$

representando por $T_0$ y $T_1$ las longitudes de las tangentes á la curva en los puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$.

**351.** Y el volumen del sólido engendrado por la zona plana, cuya área hemos poco antes determinado, cuando gira alrededor del eje de las abscisas, de esta otra fórmula, también por su sencillez notable:

$$V = \frac{m\pi}{2} (y_1^2 - y_0^2).$$

A este volumen corresponde un área, $U$, de la superficie lateral del sólido á que se refiere, determinada como sigue:

$$U = 2\pi \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{y^2 + m^2}\, dy.$$

Ó, representando por $s_1$ la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2mx$, comprendido entre los puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$,

$$U = 2\pi m s_1.$$

**352.** Con la curva que acabamos de estudiar hállase estrechamente ligada, analítica y geométricamente, la que tiene por ecuación

$$y = \frac{q}{p}\,x + \frac{bx}{a}\,\log\frac{x - \frac{1}{2}a}{p - \frac{1}{2}a},$$

que el ingeniero español D. E. Saavedra utilizó en la resolución práctica del problema de «hallar la forma y dimensiones mejores de las gradas de un anfiteatro, para que todos los espectadores que en ellas tomen asiento puedan ver sin estorbo un punto determinado de la sala.» *(Anales de la Construcción y de la Industria. Madrid,* 1886, *p.s* 329-332). Curva á que el ilustre sabio, su descubridor, después de estudiarla minuciosamente en el lugar designado, al cual, para más detalles, remitimos al lector, denominó *visoria,* porque, en la solución del mencionado problema, pasa, ó debe pasar, por el órgano visual de los espectadores que ocupan una misma fila del anfiteatro.

La conexión de la *visoria* con la *logarítmica* puede establecerse fácilmente, deduciéndose de ella un procedimiento sencillo de construir la primera curva y sus tangentes por referencia á la segunda.

Para demostrarlo, transformemos la ecuación de la *visoria,* poniendo en ella $y = \frac{Yx}{a}$, y hallaremos esta otra:

$$Y = \frac{qa}{p} + b\left[\log\left(x - \frac{1}{2}a\right) - \log\left(p - \frac{1}{2}a\right)\right], \quad \text{ó}$$

$$Y - \beta = b\log\left(x - \frac{1}{2}a\right),$$

en la cual

$$\beta = \frac{qa}{p} - b\log\left(p - \frac{1}{2}a\right).$$

Y, hecho esto, constrúyase la *logarítmica,* referida á los ejes coordenados (fig. 104), $O'x'$ y $O'y'$, que tenga por ecuación

$$y' = b\log x'.$$

Ó la siguiente, por referencia á las $Ox$ y $Oy$,

$$Y - \beta = b \log \left( x - \frac{1}{2} a \right):$$

en la cual $-\frac{1}{2} a$ y $-\beta$ representan las coordenadas del punto $O$, con relación á los anteriores ejes.

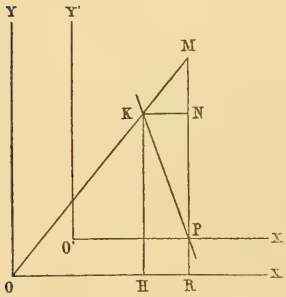



Figura 104.

Designemos ahora por $N$ un punto de esta segunda logarítmica; por $NK$ y $NR$ dos paralelas á los ejes coordenados, trazadas por el punto $N$; y por $KH$ otra paralela al eje de las ordenadas, trazada á la distancia $a$ de $Oy$: y tendremos

$$\frac{MR}{NR} = \frac{MR}{KH} = \frac{OR}{OH}, \quad \text{ó} \quad \frac{y}{Y} = \frac{x}{a}.$$

Luego $M$ es un punto de la *visoria*.

Y, por análoga construcción á la empleada en el Núm. 78, es cosa fácil ver, asimismo, que las tangentes á las dos curvas consideradas, en los puntos $M$ y $N$, se cortan en otro punto de la recta $KP$; de manera que el trazado de la tangente á la *visoria* se desprende inmediatamente del que á la tangente á la *logarítmica* corresponde.

De la ecuación de la *visoria* y de su *derivada* segunda,

$$y'' = \frac{2b}{a\left(x - \frac{1}{2} a\right)} \left[ 1 - \frac{x}{2\left(x - \frac{1}{2} a\right)} \right],$$

se deducen sin dificultad las siguientes consecuencias, suficientes para definir la forma y propiedades más notables de la curva á que se refieren.

Curva que posee una *asíntota*, determinada por la ecuación $x = \frac{1}{2} a$, hacia la cual indefinidamente converge cuando $x$ varía desde $\infty$ hasta $\frac{1}{2} a$,

si $p > \frac{1}{2}a$, ó desde $-\infty$ hasta $\frac{1}{2}a$, si $p < \frac{1}{2}a$; un *punto de inflexión real*, cuando $x = a$, en el primer supuesto, é *imaginario* en el segundo; y dos de *intersección* con el eje de las abscisas, allí donde sea

$$x = 0, \quad \text{ó} \quad x = \frac{1}{2}a + \left(p - \frac{1}{2}a\right)e^{-\frac{aq}{bx}},$$

uno de ellos *aislado*.

Todo lo cual es de inmediata y útil aplicación en la práctica.

## II

### LA CATENARIA

**353.** Por los años 1690, JACOBO BERNOULLI propuso en las *Acta Eruditorum*, p. 219, el problema de hallar *la curva formada por un hilo pesado, flexible, inextensible, y de densidad constante en toda su longitud, fijo ó suspenso por sus dos extremos.* Y en el mismo volumen de las *Acta* (p. 360) declaró poco tiempo después LEIBNITZ que había él resuelto aquel problema; pero que no publicaba la solución hasta ver si algún otro geómetra también le resolvía. Como efectivamente le resolvieron el autor de la cuestión, su hermano JUAN BERNOULLI, y HUYGENS, en el volumen de las *Acta* correspondiente á 1691.

La misma curva fué también encontrada por JUAN BERNOULLI como solución del problema que tiene por objeto *determinar la figura de una vela*, impelida é hinchada por el viento *(Opera omnia, t.* I, *p.* 59). Habiendo sido sus propiedades principalmente estudiadas por aquel tan eminente geómetra, en varios lugares de sus obras. *(Opera omnia, t.* I, *p.* 49; *t.* III, *p.* 495-504, etc.)

A la curva á que nos referimos se da el nombre de *catenaria*, que, según en la Mecánica Racional se demuestra, tiene por ecuación

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

De la cual fácilmente se infiere que el eje de las $y$ es eje de simetría de la curva, y la tangente en el punto inferior, $A$, cuya ordenada $OA = c$ (figura 105), paralela al eje de las abscisas. La $y$ además crece desde $c$ hasta $\infty$, conforme $x$ varía desde 0 hasta $\pm\infty$. Y, por conservarse siempre positiva y finita la $y''$, la curva presenta constantemente su convexidad al eje de las abscisas, sin inflexiones en ningún punto, según claramente indica la figura.

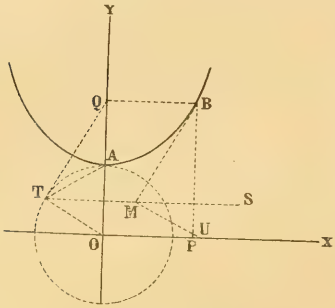


Figura 105.

**354.** De la ecuación

$$\sqrt{y^2 - c^2} = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

hállase que

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c}.$$

Expresión de la cual se deduce el siguiente sencillo procedimiento para construir la tangente á la curva en un punto cualquiera $B$.

Desde $O$ como centro y con el radio $OA$, igual á $c$ (fig. 105), descríbase una circunferencia; y desde $Q$, sobre el eje de las ordenadas, á la misma distancia que el $B$ del eje de las abscisas, trácese la tangente $QT$ á la circunferencia de que se trata. Por ser $OQ = y$, y $OT = c$, será

$$QT = \sqrt{y^2 - c^2}.$$

Y, si $TS$ es paralela al eje de las abscisas, resultará además que

$$\text{tang } QTS = \text{tang } QOT = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c} = y'.$$

Luego la tangente á la curva en el punto $B$ será también paralela á $QT$.

**355.** El radio de curvatura de la catenaria resulta expresado por la fórmula

$$R = \frac{1}{c}\, y^2.$$

De manera que en el punto $A$, donde $y$ es mínima é igual á $c$, también $R$ posee un valor *mínimo*, é igual á esta misma cantidad $c$: ó resulta *máxima* la curvatura de la catenaria.

**356.** Representando por $s$ la longitud del arco $AB$ de la curva, hállase que

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{c}} + e^{-\frac{2x}{c}} - 2\right)}\, dx = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

$$= \sqrt{y^2 - c^2} = QT = BM.$$

Igualdad de la cual se desprende una consecuencia importante, con auxilio de los *teoremas de* HUYGENS, relativos á la teoría de las evolutas.

En efecto: el lugar geométrico descrito por el punto, $M$, de intersección de la recta $BM$ con la $TS$, es una evolvente de la catenaria considerada; y, debiendo ser la tangente á ésta perpendicular á $BM$, deberá ser también paralela á $OT$; y, por lo tanto, $MU = TO$. Luego *la evolvente de la catenaria, engendrada por M, es una curva tal que los segmentos de las tangentes, comprendidos entre los puntos de contacto y una recta fija, son constantes.*

Por consideraciones geométricas sencillas se vería asimismo que las demás evolventes de la catenaria gozan todas de la misma propiedad.

Las curvas que la poseen se llaman *tractrices*, y serán poco más adelante especialmente estudiadas.

**357.** Designando por $A$ el área $BPOA$, sencillamente se encuentra que

$$A = \frac{c^2}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) = cs = c\sqrt{y^2 - c^2}:$$

lo cual demuestra que $A$ varía proporcionalmente al arco $AB = s$.

**358.** La curva plana que pasa por dos puntos dados y engendra una área mínima, cuando gira en rededor de un eje situado en su mismo plano, es una catenaria.

Aplicando, en efecto, el *método de las variaciones* á la integral

$$2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

que representa el valor del área descrita por un arco de curva plana, comprendido entre los puntos cuyas abscisas son $x_0$ y $x_1$, cuando gira en rededor del eje de las abscisas, obtiénese, para determinar la curva, la ecuación

$$yy'' - y'^2 - 1 = 0$$

que, por integración, produce esta otra,

$$\frac{x-a}{c} = \log \frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c};$$

en la cual $a$ y $c$ representan constantes arbitrarias. Ó las que siguen:

$$\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c} = c^{\frac{x-a}{c}}, \quad \text{y}$$

$$\frac{c}{y+\sqrt{y^2-c^2}} = \frac{y-\sqrt{y^2-c^2}}{c} = e^{-\frac{x-a}{c}}.$$

De donde, por adición, se deduce finalmente que

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-a}{c}} + e^{-\frac{x-a}{c}}\right),$$

fácilmente reducible á la forma en que se presentó anteriormente la ecuación de la catenaria, por una simple traslación ó cambio del origen de las coordenadas.

Pero adviértase bien que, si el análisis precedente nos enseña que al problema á que se refiere, dado que admita solución, solamente puede satisfacer la *catenaria*, de ninguna manera prueba que la admita en realidad: siendo menester para decidirlo, ó poner este punto preliminar en claro, recurrir á la *variación de segundo orden* de la función integral de

donde se partió. Para lo cual puede consultar el lector la obra de TODHUNTER, titulada *Researches in the Calculus of Variations*, p. 55.

**359.** De todas las curvas planas de igual perímetro, que pasan por dos puntos dados, la catenaria es también aquella que, girando alrededor de un eje trazado en su mismo plano, engendra la superficie de revolución de área máxima ó mínima.

Para demostrarlo basta, como en el caso anterior, aplicar el *método de las variaciones* á la integral

$$2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

llevando en cuenta la igualdad

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2} = l,$$

que expresa la condición de que todas las curvas son de igual perímetro. Y así se obtiene la misma ecuación diferencial del número precedente y se demuestra el teorema acabado de enunciar.

Advirtamos á propósito de este asunto que de las condiciones á que deben satisfacer los dos puntos dados, para que el área considerada resulte precisamente *mínima*, trató con especialidad LINDELÖFF en un trabajo inserto en los *Math. Annalen*, t. II, p. 160, al cual remitimos al lector que estime necesario consultarle.

Y asimismo nos parece pertinente advertir que la superficie, en este y el anterior párrafo estudiada, á la cual suele aplicarse el nombre de *catenoide* ó de *aliseide*, posee, además de las expuestas, la propiedad de que cualquier contorno cerrado, sobre ella descrito, comprende una *área mínima:* como MEUSNIER demostró por vez primera *(Mémoires des Savants étrangers*, t. X, p. 477).

**360.** Por último, adviértese fácilmente que la ecuación de la catenaria, en *coordenadas intrínsecas*, es

$$cR = s^2 + c^2,$$

comprendida en la siguiente

$$cR = s^2 + a^2,$$

la cual corresponde á una clase de curvas, designadas por CESÀRO con el nombre de *alisoides*—de αλυσις: cadena. *(Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1886, *p.* 75).

## III

### LA TRACTRIZ DE LEIBNITZ

**361.** El problema de *hallar una curva, cuya tangente sea de longitud constante, c,* depende de la integración de la ecuación

$$y\sqrt{1 + y'^2} = cy',$$

de la cual se deduce esta otra:

$$(1) \qquad x + a = \pm\left[\sqrt{c^2 - y^2} - c\log\frac{\sqrt{c^2 - y^2} + c}{y}\right],$$

designando por *a* la constante arbitraria.

Esta ecuación representa diferentes curvas, todas iguales, pero diferentemente distribuídas con relación á los ejes de las coordenadas, y á todas las cuales se aplica el nombre de *tractrices,* ó de *curvas de tangentes iguales.*

El primer geómetra que descubrió las *tractrices* fué LEIBNITZ *(Acta eruditorum,* 1693), al buscar la curva descrita por un punto en movimiento que se dirige constantemente hacia otro, móvil también éste, en línea recta, de manera que la distancia comprendida entre ambos puntos no varíe. En la curva que satisface á este problema, el segmento de la tangente comprendido entre el punto de contacto y la recta dada es, en efecto, de longitud constante. Del mismo problema trataron también HUYGENS y CLAIRAUT, el primero de los cuales denominó *tractoria* á la curva que le satisface.

**362.** Consideremos una de las curvas representadas por la ecuación (1), ó sea la correspondiente en particular á la ecuación

$$x = -\sqrt{c^2 - y^2} + c \log \frac{\sqrt{c^2 - y^2} + c}{y}.$$

Por medio de esta ecuación y de la diferencial de donde procede,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{c^2 - y^2}},$$

se ve que, cuando $y$ propende hacia 0, $x$ se aproxima constante é indefinidamente á $+\infty$, y $\frac{dy}{dx}$ tiende hacia 0: luego el eje de las abscisas es (figura 106) asíntota de la curva.

Cuando $y = c$, resulta que $x = 0$, y $\frac{dy}{dx} = \infty$: de manera que la curva toca al eje de las ordenadas en un punto $A$, cuya ordenada es igual á $c$: *punto singular de partida ó parada (point d'arrêt)*, pues á valores de $y$, superiores á $c$, corresponden *valores imaginarios* de $x$. Como corresponden también á los *negativos* de la misma ordenada $y$, cualesquiera que sean sus valores absolutos.

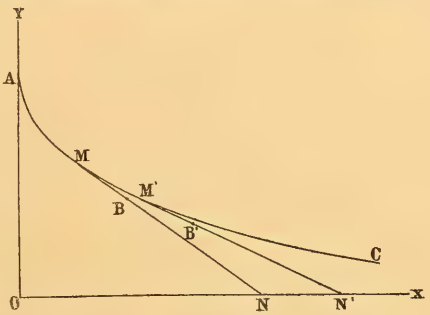


Figura 106.

**363.** Por ser $OA = c$, y ser también igual á $c$ la longitud de todas las tangentes á la curva, se puede construir la tangente á ésta en un punto cualquiera, $M$, describiendo desde el mismo punto como centro una circunferencia de radio igual á $AO$, y uniéndole por una recta al punto $N$, colocado del lado de las abscisas positivas, donde la circunferencia corta al eje de las abscisas.

**364.** Y como

$$y'' = \frac{c^2 y}{(c^2 - y^2)^2},$$

resulta también que el radio de curvatura tiene por expresión

$$R = \frac{c\sqrt{c^2 - y^2}}{y},$$

y que las coordenadas, $x_1$ é $y_1$, del centro de curvatura, pueden asimismo expresarse de este modo:

$$x_1 = c \log \frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y} \quad \text{é} \quad y_1 = \frac{c^2}{y}.$$

De donde se deduce que

$$\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y} = e^{\frac{x_1}{c}}, \quad \text{ó} \quad \frac{c - \sqrt{c^2 - y^2}}{y} = e^{-\frac{x_1}{c}};$$

y, por consiguiente,

$$y_1 = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_1}{c}} + e^{-\frac{x_1}{c}}\right).$$

Luego *la evoluta de la tractriz es una catenaria:* teorema recíproco del demostrado en el Núm. **356**.

**365.** Para determinar el área comprendida entre la curva, el eje de las abscisas y dos paralelas al eje de las ordenadas, advertiremos que

$$A = \int_{y_0}^{y_1} \frac{y}{y'}\, dy = -\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{c^2 - y^2}\, dy.$$

$$= \frac{c^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{y_0}{c} + \frac{y_0}{2}\sqrt{c^2 - y_0^2} - \frac{c^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{y_1}{c} - \frac{y_1}{2}\sqrt{c^2 - y_1^2}.$$

De donde se desprende que el área comprendida entre la curva y los dos ejes coordenados es igual á $\frac{\pi c^2}{4}$.

**366.** La longitud del arco de la tractriz, comprendido entre los puntos $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, tiene por expresión sencillísima la que sigue:

$$s = \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}\, dy = c \log \frac{y_1}{y_0}.$$

**367.** Y el área de la superficie de revolución engendrada por la tractriz al girar en derredor del eje de las abscisas, esta otra, no menos notable por su sencillez:

$$U = 2\pi \int_0^{\infty} y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx = 2\pi c^2.$$

La superficie de revolución, á que corresponde el área determinada por la última fórmula, se denomina *pseudo-esfera,* y fué cuidadosamente estudiada por Beltrami, quien demostró su importancia en la interpretación de la *Geometría* de Lobatchevsky, según puede verse en el *Giornale di Matematiche,* Napoli, t. VI, 1868.

**368.** La tractriz hállase comprendida en el grupo de curvas especialmente considerado por el geómetra español Sr. Durán Lóriga *(Intermédiaire des Mathématiciens,* t. IV, p. 148), que individualmente satisfacen á la condición de ser constante el perímetro del triángulo formado por la *tangente* á una cualquiera de tales curvas; por la *ordenada* en el punto de contacto; y por el *eje de las abscisas,* cualquiera que sea el ángulo, $\theta$, de este eje con el de las ordenadas.

Representando, en efecto, por $x$ é $y$ las coordenadas del punto de contacto, y por $x_0$ la abscisa del punto en que la tangente corta al eje de su nombre, las longitudes de los lados del triángulo serán

$$\sqrt{y^2 + (x_0 - x)^2 - 2y(x_0 - x)\cos\theta},\ y,\ \text{y}\ x_0 - x:$$

igual la última á $-y\dfrac{dx}{dy}$.

Y la constancia del perímetro resultará expresada, en consecuencia, por esta ecuación:

$$y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)\cos\theta + (y^2 - c^2) = 0.$$

De la cual se deduce que ha de ser

$$x = -\frac{1}{2}\cos\theta \pm c\left[\sqrt{1-\frac{y^2}{q^2}} - \log\frac{q+\sqrt{q^2-y^2}}{y}\right],$$

suponiendo que

$$q^2 = \frac{4c^2}{4-\cos^2\theta}.$$

Y si en esta ecuación, que representa el grupo de curvas antes definido, se supone que $\theta = \frac{\pi}{3}$, hallaremos la correspondiente, en particular, á la tractriz, en los párrafos anteriores considerada.

## IV

### LA SINTRACTRIZ DE SYLVESTER

369. Sea $B$ (fig. 106) un punto de la tangente $MN$ á la tractriz; $c$ la longitud de $MN$; y $a$ la longitud de $BN$. Al lugar descrito por $B$, cuando la tangente varía, sin variar $a$, fué dado por SYLVESTER el nombre de sintractriz (Συν: *cum, pariter*).

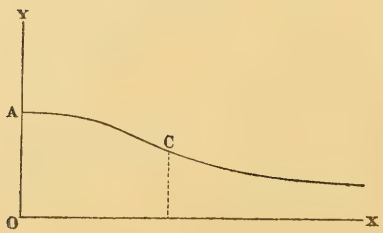


Figura 107.

Para hallar la ecuación de esta curva, representando por $x$ é $y$ las coordenadas del punto $B$, y por $X$ é $Y$ las del punto $M$, se hallará, por de pronto, que

$$\frac{Y}{y} = \frac{c}{a}, \quad \text{y} \quad x - X = \sqrt{c^2 - Y^2} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Y, eliminando ahora $X$ é $Y$ entre estas ecuaciones y la correspondiente á la tractriz,

$$X + \sqrt{c^2 - Y^2} = c \log \frac{c + \sqrt{c^2 - Y^2}}{Y},$$

resultará para ecuación de la sintractriz esta otra:

$$x + \sqrt{a^2 - y^2} = c \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

**370.** Para determinar su forma basta fijar la atención en la ecuación que se acaba de encontrar y en las dos siguientes, derivadas suyas:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 - ac}{y\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{a\,[(a - 2c)\,y^2 + a^2 c]}{y^2\,(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Y, recordando que $a < c$, se concluirá entonces fácilmente que la nueva curva, compañera como inseparable de la tractriz, considerada en el Número **362**, es de la forma indicada en la figura: con un *punto de parada* ó *arranque* sobre el eje de las ordenadas, en $A$, donde la ordenada máxima adquiere el valor $a$; una tangente en este punto, paralela única al eje de las abscisas; una inflexion en el $C$, cuya ordenada tiene por expresión $y = a\sqrt{\frac{c}{2c - a}}$; y una asíntota, en coincidencia con el mismo eje de las abscisas.

**371.** El radio de curvatura de la sintractriz se determina por la fórmula

$$R = \frac{a^{\frac{1}{2}}\,[y^2\,(a - 2c) + ac^2]^{\frac{3}{2}}}{y\,[(a - 2c)\,y^2 + a^2 c]}.$$

**372.** Y la longitud de los arcos de la misma curva y el valor de sus áreas pueden también determinarse por medio de funciones elementales.

En efecto: representando por $A$ el área limitada por la curva, por el eje de las ordenadas, y por la ordenada del punto $(x, y)$, sin dificultad se encuentra que

$$A = \int_a^y \frac{y^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy = -\frac{1}{2}\,y\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2}\,(a - 2c)\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{y}{a} - \frac{\pi}{2}\right].$$

Y, poniendo $y = 0$, conclúyese para expresión del valor del área, comprendida entre la curva, la asíntota, y el eje de las ordenadas esta otra:

$$A_1 = \frac{1}{4}\,\pi a\,(2c - a).$$

Como, de análogo modo, se hallará que la longitud de los arcos de la curva depende de la integral

$$\int \frac{\sqrt{(a-2c)\,y^2 + ac^2}}{y\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy:$$

ó de la siguiente, expresable por funciones elementales,

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{(a-2c)\,t + ac^2}}{t\sqrt{c^2 - t}}\,dt,$$

si ponemos en la anterior por $y^2$ la nueva variable $t$.

**373.** En los renglones precedentes hemos supuesto que $c > a$; ó, lo que vale tanto, que el punto generador de la curva, $B$, se halla comprendido entre el correspondiente de la tractriz, $M$, y el $N$, donde la tangente $MN$ corta al eje de las abscisas. Y del mismo modo puede considerarse el caso de ser $c < a$.

Las propiedades especiales de la curva, en el supuesto de ser $a = 2c$, fueron estudiadas por M. D'OCAGNE en los *Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1871, p. 82.

## V

### CATENARIA DE IGUAL RESISTENCIA

**374.** Dase el nombre de *catenaria de igual resistencia* á la curva correspondiente á la ecuación

$$y = -\,a \log \cos \frac{x}{a} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{x}{a} \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Curva por vez primera estudiada por MINCHIN en su *Treatise of Statics*

*Oxford*, 1877, según dice RAMSEY en el *Intermédiaire des Mathématiciens*. (1896, *p.* 30).

**375.** De la ecuación anterior se infiere fácilmente que la catenaria de igual resistencia es de la forma representada en la figura 108: simétrica relativamente al eje de las ordenadas; tangente en $O$ al eje de las abscisas; con dos asíntotas rectas, $KL$ y $K'L'$, definidas por las ecuaciones $x = \pm \frac{a\pi}{2}$; y sin ningún punto de inflexión.

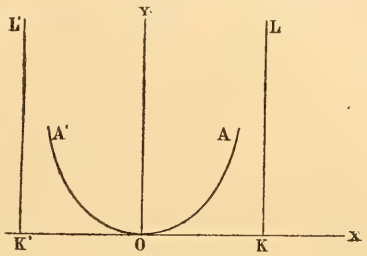


Figura 108.

**376.** Por ser

$$y' = \operatorname{tang} \frac{x}{a},$$

vese que el ángulo $\varphi$, formado por la tangente en el punto $(x, y)$ con el eje de las abscisas, tiene por expresión

$$\varphi = \frac{x}{a}.$$

Y el radio de curvatura esta otra:

$$R = \frac{a}{\cos \frac{x}{a}} = \frac{a}{\cos \varphi};$$

la cual muestra que *la proyección de este radio sobre el eje de la curva es constante.*

**377.** Como $ds = \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}$, integrando y tomando para origen de los arcos el vértice $O$ de la curva, tendremos que

$$s = a \log \operatorname{tang} \left( \frac{x}{2a} + \frac{\pi}{4} \right) = a \log \operatorname{tang} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right):$$

fórmula adecuada á la determinación de la longitud de los arcos de la catenaria de igual resistencia.

**378.** Y por ser

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{s}{a}},\quad \text{y}\quad \frac{1}{\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{-\frac{s}{a}},$$

dedúcese que

$$e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}=\frac{\sec^2\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{\cos\varphi}.$$

Luego

$$R=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}}+e^{-\frac{s}{a}}\right).$$

Ecuación ésta de la catenaria de igual resistencia en *coordenadas intrínsecas,* empleada por algunos geómetras para definir la curva. (Cesàro: *Lezioni di Geometria intrinseca. Napoli,* 1896, *p.* 8.)

**379.** Cuando la catenaria de igual resistencia rueda sobre la recta *OK,* sus centros de curvatura, correspondientes á los puntos en que al rodar va sucesivamente tocando á la *OK,* forman otra curva, cuya ecuación es fácil hallar. La abscisa de cada punto de la nueva curva es, en efecto, igual á la longitud *s* del arco de la catenaria considerada, comprendido entre el punto *O* y el punto en que llega á tocar á la recta *OK;* y la ordenada igual también al valor correspondiente de *R.* Representando, pues, por *X* é *Y* estas coordenadas, la ecuación de la curva así engendrada será

$$Y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{X}{a}}+e^{-\frac{X}{a}}\right).$$

La cual representa una *catenaria* ordinaria.

## VI

### LA CURVA DE LOS SENOS

**380.** Leibnitz dió el nombre de *curva de los senos* á la que tiene por ecuación

$$y = a \operatorname{sen} \frac{x}{m},$$

con posterioridad denominada *sinusoide:* curva de que ya, antes de Leibnitz, trató Roberval en un trabajo, titulado *De trochoide ejusque spatio,* inserto en el tomo VI de las *Memorias de la Academia de Ciencias de París,* 1730, donde, por intervenir en el método por él ideado para cuadrar la *cicloide ó trocoide,* la denominó *compañera* de la célebre curva de estos últimos nombres *(trochoidis comes).*

La sinusoide fué también estudiada más tarde por Pitot *(Histoire de l'Académie des Sc. de Paris* (1724, p. 107), quien demostró que, cuando se *planifica* un cilindro recto, de base circular, las secciones planas, que forman con el eje ángulos de 45°, se transforman en *sinusoides:* como lo son también las curvas obtenidas proyectando una hélice, trazada en la superficie del mismo cilindro, sobre un plano paralelo á su eje. (Chasles: *Aperçu historique,* 1875, p. 139; y Cantor: *Vorlesungen* etc., t. II, 1900, p. 878, y t. III, 1896, p. 428).

Para hallar la forma de la sinusoide, y con objeto de fijar las ideas, supondremos que $a$ y $m$ son positivos.

Cuando $x$ crece desde 0 hasta $\frac{1}{2} m\pi$, $y$ crece también desde 0 hasta $a$; y cuando después $x$ crece desde $\frac{1}{2} m\pi$ hasta $m\pi$, $y$ decrece desde $a$ hasta 0: correspondiendo además á los valores de $x$, equidistantes de $\frac{1}{2} m\pi$, valores iguales de $y$. Luego á los valores de $x$ comprendidos entre 0 y $m\pi$ corresponde un arco, $OAB$ (fig. 109), de la curva de los senos, cuya base $OB$ es igual á $m\pi$, simétrico con relación á la recta $AP$, perpendicular al eje de las abscisas en el punto medio de $OB$. Siendo evidente que á

los demás valores sucesivos ó anteriores de $x$ corresponden otros arcos, iguales al primeramente considerado y de la misma base $m\pi$, alternadamente situados unos á continuación indefinida de otros, por arriba y por debajo del eje de las abscisas.

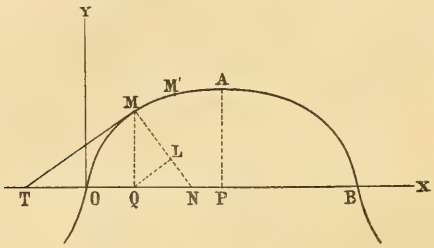



Figura 109.

Adviértase que en el punto $A$ la tangente á la curva es paralela al eje de las abscisas; y que los otros puntos $O$, $B$, ..., donde la curva corta al mismo eje y donde $y' = \frac{a}{m}$, son puntos de inflexión.

**381.** La *subtangente*, la *subnormal*, la *longitud de la normal*, y la *longitud de la tangente* se hallan determinadas por las fórmulas

$$S_t = \frac{my}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad S_n = \frac{y}{m}\sqrt{a^2 - y^2},$$

$$N = \frac{y}{m}\sqrt{m^2 + a^2 - y^2}, \quad \text{y} \quad T = y\sqrt{\frac{m^2 + a^2 - y^2}{a^2 - y^2}}.$$

Y el *radio de curvatura* por esta otra:

$$R = \frac{(m^2 + a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{my} = \frac{m^2 N^3}{y^4}.$$

**382.** El área de la figura, limitada por la curva, por el eje de las abscisas y por las ordenadas, $y_0$ é $y_1$, de los puntos correspondientes á las abscisas $x_0$ y $x_1$, puede calcularse por la fórmula

$$A = m\left[\sqrt{a^2 - y_0^2} - \sqrt{a^2 - y_1^2}\right].$$

**383.** Pero la rectificación de la misma curva de los senos depende

de una integral elíptica; pues si, en efecto, se representa por $s$ la longitud del arco comprendido entre el punto $O$ y el punto $(x, y)$, hállase que

$$s = \int_0^y \sqrt{\frac{a^2 + m^2 - y^2}{a^2 - y^2}}\, dy:$$

ó, poniendo $y = at$, y $k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + m^2}}$,

$$s = \sqrt{a^2 + m^2} \int_0^t \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt.$$

De manera que $s$ *depende de una integral elíptica de segunda especie.*

A esta expresión del valor de $s$ puede, poniendo $t = \operatorname{sen}\varphi$, y por tanto $y = a \operatorname{sen}\varphi$, dársele la forma

$$s = \sqrt{a^2 + m^2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, . d\varphi,$$

ó

$$s = A\, .\, E(k, \varphi):$$

en donde

$$A = \sqrt{a^2 + m^2}, \quad \text{y} \quad E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi.$$

**384.** Busquemos el teorema que corresponde, en el caso de la curva de los senos, al *teorema de* Fagnano, relativo á los arcos de la elipse.

La igualdad, ya empleada en el Núm. **161**,

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

conduce, teniendo en cuenta que (fig. 109)

$$OM = AE(k, \varphi);\ OM' = AE(k, \psi);\ \text{y}\ OA = AE\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

al resultado siguiente:

$$OM + OM' - OA = OM - AM' = \frac{Ak^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

cuando entre $\varphi$ y $\psi$ existe la relación

$$\cos\varphi \cos\psi = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \sqrt{1 - k^2}.$$

El segundo miembro de esta igualdad puede ser construído fácilmente.

Sustituyendo, en efecto, $\operatorname{sen}\varphi$ por $\frac{y}{a}$, hállase que

$$\frac{Ak^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = y \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 + m^2 - y^2}} = \frac{y^2}{T},$$

si por $T$ se designa la longitud de la tangente á la curva en el punto $M$.

Luego: $OM - AM' = \frac{y^2}{T}$, cuando

$$\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = \frac{\sqrt{a^2 + m^2}}{m}.$$

Pero, siendo $MT$ la tangente á la curva en el punto $M$, $MN$ la normal, y $QL$ una perpendicular á esta normal, trazada por el pie de la ordenada de $M$, resulta que

$$y = MQ = T \operatorname{sen} MTO, \quad \text{y} \quad QL = y \operatorname{sen} NMQ = y \operatorname{sen} MTO.$$

Luego

$$OM - AM' = QL.$$

Igualdad que, abreviadamente, expresa el teorema que, en el caso de la *curva de los senos*, corresponde al de Fagnano, relativo á los arcos de la elipse.

**385.** Con la *curva de los senos*, en los anteriores párrafos estudiada, tienen estrecha conexión la de las *tangentes ó tangentoide*, y la de las *secantes ó secantoide*, á las cuales corresponden estas ecuaciones

$$y = \operatorname{tang} x \quad \text{é} \quad y = \sec x:$$

compuestas ambas de número infinito de *ramas iguales*.

La rama de la *tangentoide*, correspondiente á los valores de $x$, comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, extiéndese indefinidamente en el sentido de las ordenadas positivas y negativas, y corta al eje de las abscisas en el punto donde $x = 0$: el cual, al propio tiempo que á *uno de los puntos de inflexión*, corresponde á *uno de los centros* de la curva, limitada ésta por dos de sus asíntotas, $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = +\frac{\pi}{2}$.

Y la rama de la *secantoide*, correspondiente á los mismos valores de $x$, extiéndese por completo en el sentido de las ordenadas positivas, es tangente al eje de las abscisas en el punto $y = 0$ y $x = 0$, y tiene asimismo por asíntotas las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = +\frac{\pi}{2}$.

**386.** A propósito de estas curvas, representativas de las *funciones trigonométricas*, advertiremos que también han sido tomadas en cuenta otras, correspondientes á distintas funciones fundamentales del *Análisis:* como la *sinusoide elíptica*, de forma parecida á la *secantoide* trigonométrica; y la *curva gamma*, considerada por GODEFROY en su excelente monografía sobre la función del mismo nombre (París, 1901); etc., etc. Pero de tales curvas, exclusivamente destinadas á representar gráficamente las variaciones de las funciones á que se refieren, no hay por qué tratar en este sitio.

**387.** De mayor interés creemos el estudio de otra especie de sinusoide, definida por la ecuación

$$|\operatorname{sen}(x + iy)| = c: \tag{1}$$

en la cual $x$ é $y$ representan las coordenadas de los puntos de la curva, $c$ una constante, $i$ el radical imaginario $\sqrt{-1}$, y $|\operatorname{sen}(x + iy)|$ el *módulo* de $\operatorname{sen}(x + iy)$, por nosotros primeramente considerado en las *Memorias de la Academia de Madrid* (t. XVIII, 1897, p. 96), y poco después en el *Journal de Crelle* (t. 116, p. 16), al tratar del desenvolvimiento de las funciones en series, ordenadas por las potencias del *seno* de la variable: problema en cuya solución representa papel fundamental la mencionada curva. De ambos trabajos procede lo que, á propósito del asunto, pasamos á exponer ahora.

La ecuación (1) puede escribirse como sigue:

$$|\operatorname{sen} x \cos iy + \operatorname{sen} iy \cos x| = c,$$

en la cual

$$\operatorname{sen} iy = -i\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}, \quad \text{y} \quad \cos iy = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2},$$

ó

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 iy - \cos^2 x \operatorname{sen}^2 iy} = c. \tag{2}$$

Y como el valor del primer miembro de esta ecuación no varía, cuando en ella se pone $x$ por $x + \pi$, vese en el acto que $y$ es una *función periódica* de $x$, de *período* igual á $\pi$: por lo cual basta considerar, en el estudio de la curva, la rama definida por los valores de $x$, comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Y por ser también la curva simétrica, relativamente á los ejes coordenados, conclúyese sin dificultad que, para completar su estudio, bastará limitarse al de la parte correspondiente á los valores positivos de $x$ é $y$.

Esto advertido, consideremos separadamente el caso de ser $c \lesssim 1$, del de ser $c > 1$.

Primer caso. Inmediatamente se advierte entonces, suponiendo para ello que $x = 0$, que la parte considerada de la curva corta al eje de las ordenadas en el punto cuya ordenada es igual á $\log\left(c + \sqrt{c^2 + 1}\right)$. Y también, cuando $y = 0$, que la misma parte á que nos referimos corta al eje de las abscisas en el punto cuya abscisa es igual á arc sen$c$.

Póngase ahora en la ecuación (2), por $\operatorname{sen}^2 iy$, la expresión $1 - \cos^2 iy$; y, resolviéndola luego por relación á $\cos^2 iy$, resultará que

$$\cos^2 iy = c^2 + \cos^2 x; \tag{3}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \pm\sqrt{c^2 + \cos^2 x},$$

ó

$$y = \log\left[\pm\sqrt{c^2 + \cos^2 x} \pm \sqrt{c^2 - \operatorname{sen}^2 x}\right].$$

Así, pues: considerando solamente la rama de la función $y$, que se reduce á $\log\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$ cuando $x=0$, hallaremos que

$$y=\log\left[\sqrt{c^2+\cos^2 x}+\sqrt{c^2-\operatorname{sen}^2 x}\right]: \tag{4}$$

ecuación cartesiana de la curva de que ahora se trata, por medio de la cual se advierte que, cuando $x$ varía desde 0 hasta arc sen$c$, $y$ varía desde $\log\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$ hasta 0.

Derivando la ecuación (3), por referencia á la variable $x$, obtiénese esta otra

$$y'=\frac{\operatorname{sen} 2x}{i\operatorname{sen} 2iy},$$

que sirve para determinar las tangentes á la curva, y de la cual se concluye, además, que ésta corta perpendicularmente á los ejes coordenados.

Para hallar sus *puntos de inflexión* menester es eliminar por de pronto la $y$ entre la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 2x\cos 2iy=\cos 2x\operatorname{sen}^2 2iy,$$

resultante de la derivación de la anterior, con respecto también á $x$, poniendo luego $y''=0$, y la transformada de la (2)

$$\cos 2iy=2c^2+\cos 2x.$$

De donde resulta que

$$\cos 2x=-c^2\pm\sqrt{c^4-1}. \tag{5}$$

Lo cual demuestra que, en el supuesto de ser $c\gtrless 1$, la curva de que se trata carece de inflexión real.

De manera que, en el caso á que nos referimos, la curva representada por la ecuación (1), se compondrá de un número infinito de *óvalos convexos*, iguales unos á otros, cuyos centros corresponden á los puntos $(0, 0)$, $(0, \pm\pi)$, $(0, \pm 2\pi)$..., y cuyos ejes son iguales á 2 arc sen$c$ y á $2\log\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$.

Segundo caso, ó $c > 1$.

Por medio de una discusión, análoga á la verificada en el anterior supuesto, es fácil persuadirse de que la curva considerada consta solamente de *dos ramas* simétricamente dispuestas con relación al eje de las abscisas, é indefinidamente prolongadas en el sentido de las abscisas positivas y negativas, formando una serie de ondas, de amplitud igual á $\pi$. La ordenada adquiere un valor *máximo*, igual á $\log\left(c + \sqrt{c^2+1}\right)$, en los puntos donde $x$ posee los valores $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; y un valor *mínimo*, igual á $\log\left(c + \sqrt{c^2-1}\right)$, en aquellos otros donde los valores de $x$ son iguales á $\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$ Y la curva presenta entonces *puntos de inflexión reales*, cuyas abscisas determina la ecuación (5).

## VII

### CUADRATRIZ DE DINÓSTRATO

388. Se llama *cuadratrix de* Dinóstrato la curva engendrada (figura 110) por un punto $M$, móvil de tal manera que en todas sus posiciones se verifica esta igualdad,

$$\frac{AP}{AO} = \frac{\text{arc } ab}{\text{arc } ac};$$

representando $A$ un punto fijo, y *abc* el cuadrante de una circunferencia de centro $O$ y de radio igual á la unidad.

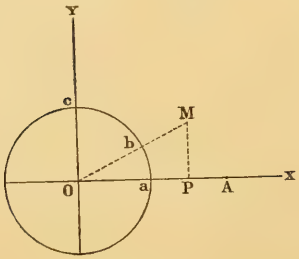



Figura 110.

Por ser, designando $a$ y $\theta$ el segmento $OA$ y el arco $ab$, y $x$ é $y$ las coordenadas del punto $M$,

$$y = x \operatorname{tang}\theta \quad \text{y} \quad \frac{a-x}{a} = \frac{2\theta}{\pi},$$

hallaremos, eliminando $\theta$ entre estas dos expresiones, la siguiente ecuación de la *cuadratrix de* Dinóstrato:

$$y = x \cot \frac{\pi x}{2a}.$$

389. La historia de la *cuadratrix de* Dinóstrato hállase relacionada con la de los célebres problemas de la *trisección del ángulo* y de la *cuadratura del círculo*, que tanto se afanaron por resolver los antiguos geómetras. En el estudio de esta curva se ocupó, efectivamente, por vez primera Hippias, que se cree vivió en la segunda mitad del siglo IV, anterior á Jesucristo, como lo testifica Proclo en sus *Comentarios* (prop. 9.ª del libro 3.° y principio del libro 4.°); y el cual la empleaba para resolver el primero de aquellos problemas.

En las obras de Pappo (*ed. Hultsch, p.* 250-252) hállase expuesto un procedimiento de construcción de la curva de que se trata, así como su aplicación á la resolución del problema de la cuadratura del círculo (*l. c., p.* 256): aplicación debida á Dinóstrato, de quien por esta circunstancia recibió nombre aquella curva.

Muchos siglos después, el P. Léotaud, que vivió en el XVII, escribió, referente al mismo asunto, una obra titulada *Liber in quo mirabiles quadraticis facultates variæ exponuntur.* Y también la estudiaron Roberval (*Mémoires de l'Académie des Sciences. París, t.* VI, 1730, *p.* 57); Fermat (*Œuvres, t.* III, *p.* 145); Juan Bernoulli (*Opera omnia, t.* I, *p.* 447, y *t.* II, *p.* 176 y *p.* 179); y otros autores.

La cuadratriz de Dinóstrato forma parte, en fin, de una clase de curvas estudiadas recientemente por Fouret en los *Nouvelles Annales des Mathématiques (3.ª serie, t.* V, 1886, *p.* 39).

390. La figura de la cuadratriz se deduce fácilmente del análisis de su ecuación, renglones antes encontrada.

Poniendo en ella $x = 0$, hállase por de pronto $y = 0 \times \infty$; cuyo verdadero valor, puesto en claro por procedimiento muy conocido, es el siguiente:

$$y = \frac{2a}{\pi}.$$

Luego la curva corta al eje de las ordenadas en un punto $B$ (fig. 111), en donde la ordenada $OB = \frac{2a}{\pi}$. Y como en este punto $y' = 0$, la tangente será allí paralela al eje de las abscisas.

Advirtiendo además que el eje de las ordenadas es también eje de la curva, bastará, en consecuencia, estudiar la forma y propiedades de ésta en la región situada á la derecha del eje mencionado.

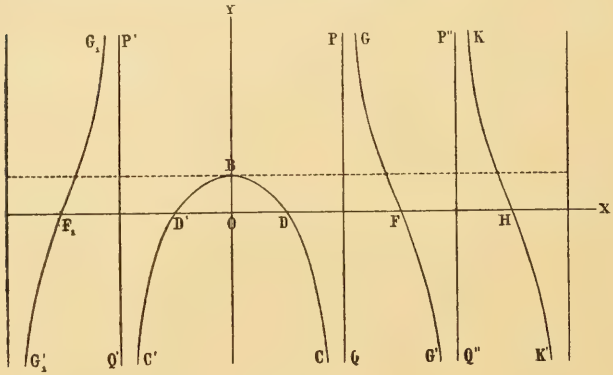



Figura 111.

Cuando $x$ varía, pues, desde 0 hasta $2a$, $y$ decrece constantemente desde $BO$ hasta $-\infty$, y el punto $(x, y)$ describe la rama $BDC$ de la curva que corta al eje de las abscisas en el punto $D$, dado por la abscisa $OD = a$. A esta rama corresponde la asíntota $PQ$, que tiene por ecuación $x = 2a$.

Cuando $x$ varía desde $2a$ hasta $4a$, $y$ decrece constantemente desde $\infty$ hasta $-\infty$, y el punto $(x, y)$ describe la rama infinita $GFG'$ de la curva que corta al eje de las abscisas en el punto $F$, en donde es $x = 3a$, y de la cual son asíntotas las rectas $PQ$ y $P''Q''$, á las cuales corresponden las ecuaciones $x = 2a$ y $x = 4a$.

Y, continuando la variación de $x$ en el mismo sentido, obtiénense las otras ramas de la curva, iguales todas á la anterior, y en número infinito.

Los antiguos geómetras limitábanse á considerar una muy reducida parte de la curva alrededor del punto $B$. Hasta que el P. Léotaud, en su obra

poco antes citada, demostró por primera vez que la curva consta de infinitas ramas, y determinó sus asíntotas.

Formando la ecuación $y'' = 0$, resulta

$$\frac{\pi x}{2a} = \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2a};$$

y, por tanto, $y = \frac{2a}{\pi}$. Luego la cuadratriz de DINÓSTRATO posee un número infinito de puntos de inflexión, situados todos sobre la paralela al eje de las abscisas que pasa por el punto $B$.

**391.** Para comprender cómo la curva que estamos considerando puede servir para cuadrar el círculo, basta advertir que, siendo $OB = \frac{2a}{\pi}$, esta igualdad determina el valor de $\pi$, cuando sea conocida la ordenada, $OB$, del punto en que aquella curva corta al eje de las ordenadas. Solución del problema, sin embargo, puramente teórica, puesto que no se conoce ningún procedimiento de trazar la curva por medio de un movimiento continuo: como ya en lo antiguo fué advertido, según afirma PAPPO. En la obra de ZEUTHEN, titulada *Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelarter* (Kopenhagen, 1896, p. 76), encuéntrase expuesta en lenguaje corriente la solución, dada por DINÓSTRATO, del problema referido.

**392.** El área $A$, limitada por el arco $DBD'$ de la cuadratriz y por el eje de las abscisas, se obtiene fácilmente partiendo de la siguiente fórmula, en la cual $\frac{\pi x}{2a} = t$,

$$A = 2\int_0^a x \cot \frac{\pi x}{2a}\, dx = 2\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cot t\, dt:$$

que, integrando por partes, y advirtiendo que $t \log \operatorname{sen} t$ es igual *á cero*, cuando $t$ lo es asimismo, se convierte en la que sigue:

$$A = -2\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t\, dt.$$

La *integral definida*, de la cual depende el valor explícito de $A$, fué de-

terminada del siguiente modo por TODHUNTER *(A Treatise on the Integral Calculus. London*, 1883, *p.* 65):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} 2t\,dt - \frac{\pi}{4}\log 2.$$

Mas, poniendo $2t = y$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} 2t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} y\,dy.$$

Luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} t\,dt = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

De manera que, finalmente,

$$A = \frac{4a^2 \log 2}{\pi}.$$

## VIII

### CURVA ELÁSTICA, Ó LINTEARIA

**393.** Dase el nombre de *lintearia*, ó de *curva elástica*, á la definida por la ecuación

$$y = \int_0^x \frac{(x^2 + c)\,dx}{\sqrt{a^2 - (x^2 + c)^2}},$$

de cuyo análisis se deduce fácilmente la forma de aquella curva.

Para ello, supongamos primeramente que $c > 0$.

Por ser la integral considerada igual al límite de una suma de elementos, de la forma

$$\frac{(x^2 + c)\,dx}{\sqrt{a^2 - (x^2 + c)^2}},$$

conclúyese inmediatamente que $y$ será imaginaria cuando $c > a$, cualquiera que sea $x$, y, por lo tanto, que en este caso no existe curva realizable; que, siendo $a > c$, $y$ es también imaginaria cuando el valor absoluto de $x$ es mayor que $\sqrt{a - c}$, y, por consiguiente, que la curva no se extiende más allá de las rectas paralelas al eje de las ordenadas que pasan por los puntos $M$ y $M'$, cuyas abscisas son iguales á $\sqrt{a - c}$ y $-\sqrt{a - c}$; y que á los valores negativos del límite superior de la integral corresponden valores de $y$ iguales, pero de signo contrario á los que corresponden á los valores positivos de este límite: de manera, que la curva se compone de dos arcos iguales, $OM$ y $OM'$ (figura 112), dispuestos uno de cada lado de los ejes de las coordenadas.

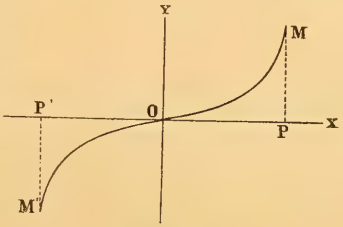


Figura 112.

Las tangentes á la curva elástica se determinan por la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^2 - (x^2 + c)^2}};$$

la cual demuestra que $y$ no admite valores máximos ni mínimos; que el coeficiente angular de la tangente en el origen de las coordenadas es igual á $\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}$; y que las rectas $PM$ y $P'M'$, paralelas al eje de las ordenadas en los puntos extremos de la curva, son tangentes á la misma curva.

Y del propio modo se concluye que, en el caso de ser $c < 0$ y $a > c$, la curva posee la forma representada en la figura 113, donde $OP$, igual á $OP'$, lo es también á $\sqrt{a - c}$. Pero en este caso debe advertirse que la

curva admite ordenadas máximas (en valor absoluto) en los puntos $N$ y $N'$, correspondientes á las abscisas $\sqrt{-c}$ y $-\sqrt{-c}$.

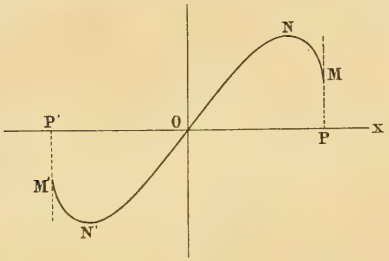


Figura 113.

**394.** Para hallar el valor del radio de curvatura de ambas curvas consideradas, adviértase que

$$y'' = \frac{2a^2x}{[a^2-(x^2+c)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Con lo cual basta para concluir que

$$R = \frac{a}{2x}.$$

Luego *el radio de curvatura de la curva elástica en el punto* $(x, y)$ *es inversamente proporcional á la abscisa* $x$.

Mereciendo notarse que esta propiedad es exclusiva de la curva de que ahora se trata, y que analíticamente la define. Para verlo basta integrar la ecuación

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{a}{2x}, \quad \text{ó} \quad \frac{a\,dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 2x\,dx.$$

Por ser, en efecto,

$$\int \frac{dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

hállase en el acto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+c}{\sqrt{a^2-(x^2+c)^2}};$$

precisamente la ecuación diferencial de las curvas elásticas.

**395.** Aunque la integral de que depende la expresión finita de $y$ no pueda determinarse por procedimientos ó funciones elementales, puede serlo, sí, por funciones elípticas, como ahora veremos.

Póngase en aquella integral $x^2 = v^{-1}$, y resultará que

$$\int_0^x \frac{(x^2+c)\,dx}{\sqrt{a^2-(x^2+c)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-c^2}} \int_v^\infty \frac{(cv+1)\,dv}{v\sqrt{\left(v-\frac{1}{a-c}\right)\left(v+\frac{1}{a+c}\right)v}}.$$

Ó, poniendo además $v = t + \frac{2}{3}\cdot\frac{c}{a^2-c^2}$,

$$\int_0^x \frac{(x^2+c)\,dx}{\sqrt{a^2-(x^2+c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}} \int_t^\infty \frac{(ct+\alpha+1)\,dt}{(ct+\alpha)\sqrt{4t^3-g_1 t-g_2}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[\int_t^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_1 t-g_2}} + \int_t^\infty \frac{dt}{(ct+\alpha)\sqrt{4t^3-g_1 t-g_2}}\right]:$$

en donde

$$\alpha = \frac{2}{3}\cdot\frac{c^2}{a^2-c^2}; \quad g_1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{c^2+3a^2}{(a^2-c^2)^2}; \quad \text{y} \quad g_2 = \frac{8c\,(9a^2-c^2)}{27\,(a^2-c^2)^3}.$$

Luego $y$ depende de una *integral elíptica de primera especie* y de otra de *tercera*, reducidas, según esto, á la forma normal, adoptada por WEIERSTRASS.

Para expresar $y$ por medio de funciones elípticas, póngase ahora

$$\int_t^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_1 t-g_2}} = u, \quad t = p\,(u), \quad \text{y} \quad \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_1 t-g_2}} = -\,du,$$

representando por $p\,(u)$ la función elíptica de WEIERSTRASS, correspondiente á las invariantes $g_1$ y $g_2$. Y así tendremos que

$$\int_0^x \frac{(x^2+c)\,dx}{\sqrt{a^2-(x^2+c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[u + \int_0^u \frac{du}{cp\,(u)+\alpha}\right];$$

ó, poniendo $\frac{\alpha}{c} = -\,p\,(v)$,

$$\int_0^x \frac{(x^2+c)\,dx}{\sqrt{a^2-(x^2+c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[u + \frac{1}{c}\int_0^u \frac{du}{p\,(u)-p\,(v)}\right].$$

Expresión que, por la igualdad conocida (expuesta en nuestro *Curso de Análisis*, t. III, pág. 175)

$$\zeta(u-v)-\zeta(u+v)+2\zeta(v)=\frac{p'(v)}{p(u)-p(v)},$$

y recordando que $\zeta(u)$ es la integral de $-p(u)$ (*l. c.*, p. 179), se transforma como sigue:

$$\int_0^x \frac{(x^2+e)dx}{\sqrt{a^2-(x^2+e)^2}}=\frac{1}{p'(v)\sqrt{a^2-c^2}}\left[cup'(v)+\log\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)}+2\zeta(v)u\right].$$

De todo lo cual conclúyese, finalmente, que

$$x^2=\frac{c}{ct+\alpha}=\frac{1}{p(u)-p(v)},\quad \text{é}$$

$$y=\frac{1}{p'(v)\sqrt{a^2-c^2}}\left[(cp'(v)+2\zeta(v))u+\log\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)}\right].$$

Fórmulas que expresan los valores de $x$ é $y$, en función de la variable independiente $u$, por medio de las funciones elípticas de Weierstrass.

**396.** La longitud de los arcos de la curva elástica, contados á partir del origen de las coordenadas, se desprende de la fórmula

$$s=\int_0^x \frac{adx}{\sqrt{a^2-(x^2+c)^2}},$$

dependiente asimismo de las funciones elípticas, y de la cual, procediendo como anteriormente, se deducen estas otras:

$$\int_0^x \frac{adx}{\sqrt{a^2-(x^2+c)^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}\int_t^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_1t-g_2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}u.$$

Ó, finalmente,

$$s=\frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}u.$$

**397.** De la curva elástica trató por vez primera Jacobo Bernoulli, en 1694, en las *Acta Eruditorum* (*Jacobi Bernoulli Opera*, *t.* I. *Gene-*

*væ*, 1744, *p.* 576), y en 1705 en las *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris (Opera, t.* II, *p.* 976). A fijar la atención en esta curva le indujo el problema de la determinación de la forma que adquiere una lámina elástica, fija por uno de sus extremos, y sobre la cual actúa una fuerza perpendicular á la misma lámina, y situada en el plano de su *fibra media*. Problema que generalizó posteriormente Poisson *(Traité de Mécanique, seconde édition, t.* I. *Paris*, 1833, *p.* 598), considerando el caso de no ser la fuerza perpendicular á la lámina, sino de serlo simplemente á la superficie que pasa por la mencionada fibra media; y, más tarde, Binet *(Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t.* XVIII, *p.* 1115) y Wantzel *(Item, p.* 1197), que estudiaron el caso de actuar la fuerza en una dirección cualquiera. A estas generalizaciones del problema considerado corresponde otra muy notable de la noción de *curva elástica*, que, en el último de los casos considerados, se convierte en curva de doble curvatura, las coordenadas de cuyos puntos enseñaron á determinar los geómetras últimamente mencionados, haciéndolas depender de simples *cuadraturas;* y Hermite, últimamente, expresándolas por medio de funciones elípticas, en su importante memoria *Sur quelques applications des fonctions elliptiques (Paris*, 1885, *p.* 93).

La curva elástica fué hallada también por Euler como solución de los siguientes problemas, fáciles de resolver por el *método de las variaciones:*

1.° Entre las curvas del mismo perímetro, que pasan por dos puntos fijos, hallar aquella que, girando al rededor de un eje, engendra el sólido de *máximo* volumen *(Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietate gaudentes*, 1744, *cap. V, núm.* 46).

Y 2.° Entre las curvas del mismo perímetro y que limitan la misma área, hallar aquellas que, girando al rededor de un eje, engendran un sólido de *máximo ó mínimo* volumen *(l. c., cap. VII, núm.* 22).

**398.** Advirtamos, para concluir, que Jacobo Bernoulli *(Opera, t.* I, *p.* 597) encontró la misma ecuación que para la forma de una lámina elástica, sujeta á la acción de una fuerza, agente en determinadas condiciones, para la de un *lienzo* rectangular, flojo y suspenso por dos de sus bordes opuestos, sobre el cual se hace gravitar un líquido pesado: por lo cual á la curva de que se trata aplicó el nombre de *lintearia*.

## IX

### CURVA ISÓCRONA PARACÉNTRICA

**399.** En 1689 propuso LEIBNITZ, en las *Acta Eruditorum*, pág. 198, el siguiente problema: *hallar la curva plana por la cual debe descender un punto grave, para que su distancia á otro punto fijo varíe proporcionalmente al tiempo empleado en recorrer ó describir cada arco de curva.*

A la curva que satisface á la condición expresa llamóla el insigne autor del anterior enunciado *curva isócrona paracéntrica*. Y el problema á que se refiere resolvióle, conforme á continuación expondremos, JACOBO BERNOULLI, que publicó la solución en el tomo de las mismas *Acta*, correspondiente al año 1694, págs. 276 y 336 *(Opera, t.* I, *p.ª* 601 y 608).

**400.** Adoptando para origen de las coordenadas el *punto fijo* dado, y para eje de las ordenadas la vertical que pasa por este punto; si por $x$ é $y$ se designan las coordenadas del *móvil*, la distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre ambos puntos debe variar, conforme pide el enunciado del problema, proporcionalmente al tiempo $t$. Y, por lo tanto,

$$\frac{d\sqrt{x^2 + y^2}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}\right) = k;$$

designando por $k$ una constante dada.

En virtud del descenso ó caída de los graves, se verifica además, según es bien sabido, que

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g\,(y + h),$$

si por $s$ se representa la longitud de un arco cualquiera de la curva.

Y eliminando $dt$ entre las dos ecuaciones anteriores, resulta esta otra:

$$k^2\,(x^2 + y^2)\,(dx^2 + dy^2) = 2g\,(y + h)\,(x\,dx + y\,dy)^2.$$

Supongamos, en particular, que la curva pasa por el punto fijo, considerado en su definición, y hallaremos que, cuando sea $y = 0$, será tam-

bién $\frac{d(x^2+y^2)}{dt} = \frac{ds}{dt}$, y, en consecuencia, $k = \sqrt{2gh}$: con lo cual la ecuación anterior se reducirá á la que sigue:

$$h(x^2+y^2)(dx^2+dy^2) = (y+h)(xdx+ydy)^2:$$

ó, en términos más sencillos,

$$(xdx+ydy)\sqrt{y} = \sqrt{h}(ydx+xdy).$$

401. Para integrar esta *ecuación diferencial* de la *curva isócrona paracéntrica*, procedió BERNOULLI (*l. c.*) conforme á renglón seguido se explica.

Póngase en ella primeramente

$$hy = vx \quad \text{y} \quad hx = v\sqrt{h^2-x^2},$$

y hallaremos, por de pronto, que

$$ydx - xdy = -\frac{v^2dx}{\sqrt{h^2-x^2}}, \quad \text{y} \quad xdx+ydy = vdv:$$

de donde se desprende, en conclusión, que

$$v^{-\frac{1}{2}}dv = -\frac{hdx}{\sqrt{(h^2-x^2)x}}.$$

E integrando ahora, y determinando la constante arbitraria por la condición de ser $v = 0$, cuando sea $x = 0$, hállase que

$$\sqrt{v} = -\frac{1}{2}h\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(h^2-x^2)x}}:$$

ó, suponiendo que sea $x = h\cos 2\omega$,

$$\sqrt{v} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\omega} \frac{\sqrt{h}d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

Vese, pues, que los valores de $v$ y de $x$ é $y$ dependen del valor de la longitud de un arco de *lemniscata* (Núm. 146): razón por la cual á la curva estudiada en el Núm. 139 le fué aplicado, entre todas las de su mismo nombre genérico, el especial de *lemniscata* de JACOBO BERNOULLI.

402. La integración de la ecuación diferencial, en el párrafo anterior considerada, puede efectuarse por procedimiento más sencillo que el acabado de exponer, comenzando por escribir aquella ecuación en *coordenadas polares*, mediante las expresiones $x = \rho \cos\theta$ é $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, transformándose con esto en la que sigue:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\sqrt{h}\,\frac{dh}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}.$$

De donde, integrando y determinando la constante arbitraria por la condición de ser $\rho = 0$, cuando $\theta = 0$, se desprende que

$$\sqrt{\rho} = \frac{\sqrt{h}}{2}\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}};$$

ó, suponiendo que $\theta = \frac{\pi}{2} - \omega$,

$$\sqrt{\rho} = \sqrt{h}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}}.$$

# CAPÍTULO OCTAVO

## LAS ESPIRALES

### I

### ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

**403.** La *espiral de* ARQUÍMEDES es la curva engendrada por un punto *móvil*, con movimiento uniforme, á lo largo de una línea recta, mientras ésta gira, con movimiento uniforme también, alrededor de otro punto *fijo*, con el cual coincide el primero en su posición inicial. Curva minuciosamente estudiada por el gran geómetra de Siracusa en el *Tratado* que le consagró; pero cuyo descubrimiento y el enunciado de sus principales propiedades atribuyeron algunos autores á CONON, reservando las demostraciones para ARQUÍMEDES: por lo cual fué durante mucho tiempo conocida con el nombre de *espiral de* CONON (PAPPO: *Comentarios, ed. Hultsch, t.* I, *p.* 234; MONTUCLA: *Histoire des Mathématiques, 2.ª ed.*, t. I, *p.* 226; etc.). Pero NIZZE, autor de una traducción alemana de las obras de Arquímedes, demostró con gran copia de argumentos la falsedad de esta conjetura, habiendo sido sus conclusiones aceptadas como buenas por los historiadores modernos (P. TANNERY, CANTOR, G. LORIA, etc.)

Las demostraciones de las propiedades de la espiral, propuestas por ARQUÍMEDES, parecíanle á LIBRI tan largas y complicadas, que, fijándose en ellas, decía: *Après vingt siècles de travaux et de découvertes, les intélligences les plus puissantes viennent encore échouer contre la synthèse difficile du Traité des Spirales.* Opinión refutada por PEYRARD, traductor al francés y comentador de las obras del célebre geómetra griego, quien con razón sostuvo que solamente pueden calificarlas como de difícil ó penosa inteligencia los lectores no familiarizados con los antiguos métodos de investigación geométrica; pero no los conocedores de aquellos métodos,

para los cuales ninguna seria dificultad presentan. Sea como quiera, aquellas propiedades se demuestran actualmente de la manera más sencilla por los procedimientos del Análisis moderno, apoyándose en la simplicísima ecuación de la curva, ó en su definición, expresada en coordenadas polares:

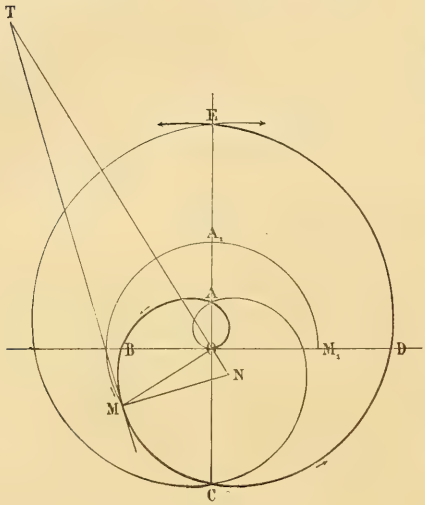


Figura 114.

$$\rho = a\theta.$$

De esta ecuación se deduce, en efecto, inmediatamente que el punto generador de la curva parte del origen de las coordenadas, tangencialmente al *eje polar*, y describe luego un número infinito de vueltas ó revoluciones en derredor de aquel punto de partida, alejándose de él constantemente (fig. 114), en un sentido ó en otro, según el sentido inicial del movimiento.

**404.** La subnormal, $S_n$; la subtangente, $S_t$; la longitud de la normal, $N$; y el ángulo, $V$, de la tangente á la curva con el radio vector del punto de contacto, se hallan expresos por estas fórmulas:

$$S_n = \frac{d\rho}{d\theta} = a; \quad S_t = \frac{\rho^2 d\theta}{d\rho} = \rho\theta; \quad N = \sqrt{a^2 + \rho^2}; \quad \text{y}$$

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{a}.$$

De las cuales, la primera y la última permiten fácilmente construir las normales y las tangentes á la espiral considerada. Y la segunda muestra que la subtangente $OT$ es igual á la longitud del arco, $MA_1 M_1$, de la cir-

cunferencia, descrita desde el polo $O$, con el radio $OM$, igual á $\rho$. Relación muy curiosa, entre el problema de la rectificación de la circunferencia y el de la determinación de la tangente á la espiral, hallada por Arquímedes, y primero ó más antiguo ejemplo conocido de la determinación de la tangente á una curva por medio de la subtangente.

**405.** El radio de curvatura de la *espiral de* Arquímedes tiene por expresión

$$R = \frac{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2a^2} = \frac{N^3}{N^2 + a^2};$$

de la cual se concluye una sencilla construcción del centro de curvatura.

**406.** El área $A$, recorrida por el radio vector de la espiral considerada, cuando $\theta$ varía desde $\theta_0$ hasta $\theta_1$, se determina de este modo:

$$(A) \qquad A = \frac{a^2}{6}(\theta_1^3 - \theta_0^3) = \frac{1}{6a}(\rho_1^3 - \rho_0^3).$$

Y comparando el valor de $A$ con los de las áreas de los sectores circulares, que abarcan el mismo ángulo $\theta_1 - \theta_0$ y corresponden á los radios $\rho_1$ y $\rho_0$, determinados por las fórmulas

$$A_1 = \frac{1}{2a}\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0) \quad \text{y} \quad A_0 = \frac{1}{2a}\rho_0^2(\rho_1 - \rho_0),$$

hállanse las siguientes igualdades, obtenidas por Arquímedes:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\rho_1^3 - \rho_0^3}{3\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0)} = \frac{\rho_1\rho_0 + \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1^2}; \quad \text{y}$$

$$\frac{A_1 - A}{A - A_0} = \frac{\rho_0 + 2\rho_1}{\rho_1 + 2\rho_0} = \frac{\rho_0 + \frac{2}{3}(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 + \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_0)}.$$

De la fórmula $(A)$ dedúcese además, poniendo $\theta_0 = 2(n-1)\pi$ y $\theta_1 = 2n\pi$,

y representando por $A^{(n)}$ el valor del área recorrida por el radio vector, cuando éste describe la *espira* ó vuelta de orden $n$, la igualdad

$$A^{(n)} = \frac{4}{3}\,\pi^3\,a^2\,(3n^2 - 3n + 1),$$

de la cual resultan varias relaciones interesantes, señaladas también por Arquímedes, entre las cuales recordaremos las siguientes:

$$A^{(1)} = \frac{4}{3}\,\pi^3\,a^2; \quad A^{(2)} - A^{(1)} = 8\,\pi^3\,a^2; \quad A^{(n)} - A^{(n-1)} = 8\,(n-1)\,\pi^3\,a^2;$$

$$A^{(1)} = \frac{1}{6}\,(A^{(2)} - A^{(1)}); \quad A^{(n)} - A^{(n-1)} = (n-1)\,(A^{(2)} - A^{(1)}); \text{ etc.}$$

El procedimiento de ARQUÍMEDES para determinar el valor de $A$ fué verdaderamente notable, y constituye uno de los primeros ejemplos conocidos del *método de los indivisibles* y del *infinitesimal*. Como en los métodos así denominados, ARQUÍMEDES consideró, en efecto, el área $A$ como una suma de sectores circulares, en número creciente indefinido, y esto bastó para, en cierto modo, revelarle el resultado que buscaba, utilizando luego para demostrar su legitimidad el procedimiento clásico de *exhaución*, empleado siempre por los antiguos geómetras para la resolución de cuestiones de este género, y referente al cual puede consultar el lector con provecho la excelente obra de ZEUTHEN, titulada *Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelarter* (1896, p. 166-183), donde también encontrará, expuesto en la forma usual ahora, el método original de que se valió el mismo Arquímedes para calcular el valor de $A$.

**407.** La longitud, $s$, del arco de la espiral de Arquímedes, comprendido entre los puntos $(\rho_0, \theta_0)$ y $(\rho_1, \theta_1)$, se halla expresada por la fórmula

$$s = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} + 1}\,.\,d\rho = \frac{1}{a}\int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 + a^2}\,.\,d\rho.$$

Y como la longitud del arco de la parábola, $y^2 = 2px$, comprendido entre los puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$, lo está por la siguiente

$$s_1 = \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{a^2 + y^2}\,dy,$$

se ve que *la longitud del arco de la espiral de Arquímedes es igual á la del arco de la parábola anterior, comprendido entre los puntos cuyas ordenadas son iguales á los radios vectores de las extremidades del arco de la espiral.*

Proposición esta última debida, según testimonio de PASCAL, á ROBERVAL. Pero como la demostración dada por este célebre geómetra estuviese fundada en consideraciones cinemáticas, PASCAL propuso otra muy distinta, completamente geométrica. *(Oeuvres, ed. Hachette, t.* II, 1889, *p.* 450).

Para más amplias informaciones, referentes á la historia de la *espiral de Arquímedes*, véase G. LORIA: *Le scienze esatte nel'antica Grecia, t.* II, *Modena*, 1895, *p.* 113-122.

## II

### ESPIRAL DE GALILEO

**408.** FERMAT, en sus cartas al P. MERSENNE, de 26 de Abril de 1636 y 3 de Junio del mismo año (*Oeuvres, ed. G. Villars, t.* II, 1894, *p.* 12), y en uno de sus escritos (*Oeuvres, t.* III, *p.* 70), menciona una *espiral*, á la cual atribuye el nombre de GALILEO. Y algunos pasajes de las obras de MERSENNE (transcritos en el tomo II, p. 15, de la nueva edición de las obras de Fermat), sugirieron á P. TANNERY la conclusión de que la *espiral* así denominada es la curva representada en coordenadas polares por la ecuación

$$\rho = a - b\theta^2.$$

Curva que FERMAT estudió á instancia de MERSENNE, que la había encontrado al resolver el problema de «hallar la curva descrita, relativamente á la Tierra, animada del movimiento de rotación diurna, por un punto material grave, que desciende hacia ella libremente, según la ley de GALILEO.»

**409.** La forma de esta espiral es fácil de obtener (fig. 115).

Cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\rho$ decrece desde $a$ hasta 0; y cuan-

do después $\theta$ varía desde $\sqrt{\frac{a}{b}}$ hasta $\infty$, el radio vector $\rho$ es negativo y crece en valor absoluto desde 0 hasta $\infty$. Luego el punto generador de la curva parte del $A$, en donde es $OA = a$; aproxímase al $O$ hasta encontrarlo, describiendo la rama $ABCO$; y después se aleja indefinidamente de este punto, dando un número infinito de vueltas alrededor del mismo. La tangente en el punto $O$ forma un ángulo, igual á $\sqrt{\frac{a}{b}}$, con el eje $Ox$.

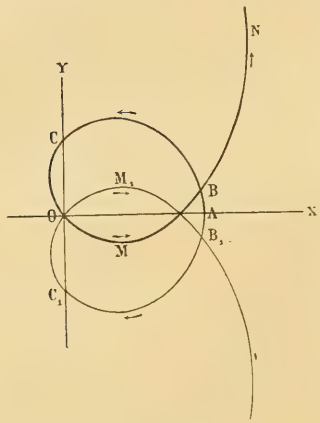



Figura 115.

A los valores negativos de $\theta$ corresponde otra rama igual de la curva, simétrica de la primera relativamente al eje $Ox$.

**410.** Representando por $V$ el ángulo formado por la tangente con el radio vector del punto de contacto, hállase que

$$\operatorname{tang} V = -\frac{\rho}{2\sqrt{b\,(a-\rho)}}.$$

Fórmula que permite construir fácilmente las tangentes á la curva, y muestra que en el punto $A$ la tangente es perpendicular al eje $Ox$.

**411.** La expresión del radio de curvatura de la curva, en el punto $(\rho, \theta)$, dice como sigue:

$$R = \frac{(\rho^2 - 4b\rho + 4ab)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - 6b\rho + 8ab}.$$

Y como, sustituyendo en el segundo término del denominador de esta igualdad, $\rho$ por su valor en función de $a$, $b$ y $\theta$, se ve que este denominador no puede ser nulo, conclúyese que la curva no posee punto ninguno de inflexión.

**412.** Para determinar los *puntos duplos*, existentes en la rama de la curva, dependiente de los valores positivos de $\theta$, basta atender á que estos puntos deben evidentemente corresponder á dos valores de $\theta$, separados uno de otro por el arco $(2n+1)\pi$, representando por $n$ un número entero y positivo, y además á dos valores de $\rho$, iguales y de signo contrario, conforme indican estas expresiones:

$$\rho = a - b\theta^2 \quad \text{y} \quad -\rho = a - b\,[\theta + (2n+1)\,\pi]^2.$$

De las cuales, por eliminación de $\rho$ y resolución de la ecuación del segundo grado resultante, se deduce que ha de ser

$$(1) \qquad \theta = \frac{-(2n+1)\,\pi b \pm \sqrt{4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2}}{b}.$$

Ecuación ésta que puede dar para $\theta$ valores *imaginarios, negativos* y *positivos*. A los imaginarios no corresponden puntos de la curva; y á los negativos tampoco corresponde ninguno de la rama considerada: basta, pues, considerar los valores positivos de $\theta$.

Para que $\theta$ sea *real*, es necesario que se verifique la condición

$$4a > b\pi^2(2n+1)^2;$$

y para que sea *positivo* necesítase además que resulte satisfecha esta otra condición

$$\sqrt{4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2} > (2n+1)\,\pi b,$$

ó

$$2a > b\pi^2(2n+1)^2.$$

La condición única para que el valor de $\theta$ sea *real* y *positivo* se reduce, pues, á la siguiente:

$$2a > b\pi^2(2n+1)^2:$$

de la cual se desprenderán los valores de $n$ á que corresponden los de $\theta$, dados por la igualdad (1), pertenecientes á los *puntos duplos* buscados.

Poniendo en las fórmulas anteriores $n = 0$, conclúyese que solamente existirán puntos dobles cuando sea $\sqrt{\frac{a}{b}} > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Pero, además de los puntos duplos que acabamos de determinar, la curva posee los puntos existentes en la rama de la curva que corresponde á los valores negativos de $\theta$, simétricos de los anteriores relativamente al eje $Ox$, y los colocados sobre este eje, en que las dos ramas de la curva se cortan.

413. El área descrita por el radio vector, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\theta$, se halla definida por la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\left(a^2\,\theta + \frac{1}{5}\,b^2\,\theta^5 - \frac{2}{3}\,ab\,\theta^3\right).$$

414. Y la rectificación de la curva se obtiene con auxilio de las integrales elípticas de 1.ª y de 2.ª especie, conforme ahora pasamos á demostrar.

Por de pronto

$$ds = \sqrt{b^2\,\theta^4 + 2\,(2b^2 - ab)\,\theta^2 + a^2}\,.\,d\theta;$$

ó, poniendo $\theta^2 = x$,

$$ds = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2\,x^2 + 2\,(2b^2 - ab)\,x + a^2}{\sqrt{x\,[b^2\,x^2 + 2\,(2b^2 - ab)\,x + a^2]}}\,dx.$$

Pues poniendo ahora

$$x^2\,[b^2\,x^2 + 2\,(2b^2 - ab)\,x + a^2] = F(x),$$

se hallará que

$$ds = \frac{1}{6}\cdot\frac{[F'(x) + 2\,(2b^2 - ab)\,x + 2a^2]\,dx}{\sqrt{F(x)}};$$

y, por lo tanto,

$$ds = \frac{1}{3}\left[dF(x) + \frac{(2b^2 - ab)\,x + a^2}{\sqrt{F(x)}}\,dx\right].$$

Para lograr que en $F(x)$ desaparezca el término del segundo grado, admitamos que

$$z = v + h \quad \text{y} \quad h = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2b - a}{b};$$

y con esto se hallará que

$$ds = \frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}\, d\sqrt{4v^3 - g_1 v - g_2} + \frac{2(2b - a)\, v\, dv}{\sqrt{4v^3 - g_1 v - g_2}} + \frac{2a^2\, dv}{b\sqrt{4v^3 - g_1 v - g_2}}\right],$$

en donde

$$g_1 = 12h^2 - \frac{a^2}{b^2} \quad \text{y} \quad g_2 = 4\left(2h^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)h.$$

De manera que, en efecto, *s depende de dos integrales elípticas, una de primera y otra de segunda especie,* reducidas á la forma normal, adoptada por WEIERSTRASS.

Y además vese, en conclusión, que una de estas integrales desaparece cuando $b = \frac{1}{2}a$.

## III

### ESPIRAL DE FERMAT

**415.** La denominada *espiral de* FERMAT, estudiada por el gran geómetra de Toulouse, en carta dirigida al P. MERSENNE en 3 de Junio de 1636 *(Oeuvres, ed. G. Villars, t.* III, 1896, *p.* 277), tiene por ecuación

$$\rho^2 = a^2\theta.$$

Cuando $\theta$ crece desde 0 hasta $\infty$, los valores positivos de $\rho$, correspondientes á $\theta$, crecen tambien desde 0 hasta $\infty$. El punto generador de la curva da, pues, un número infinito de vueltas alrededor del origen de las coordenadas, describiendo la curva *OABCD...* (fig. 116), que se aleja cada vez más del mencionado origen, donde la curva es tangente al eje polar ó de las abscisas.

A los valores negativos de ρ corresponde otra rama $OA'B'$... de la curva, igual á la primera y tangente también en el punto $O$ al eje de las abs-

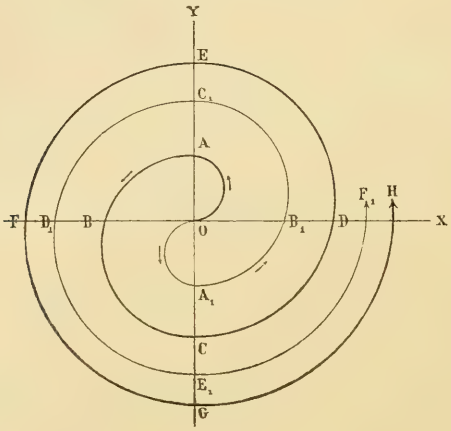



Figura 116.

cisas. Las dos ramas reunidas forman una curva continua, de la cual $O$ es un punto de inflexión y un centro.

**416.** El ángulo $V$, formado por la tangente con el radio vector del punto de contacto; la subnormal $S_n$; y la subtangente $S_t$ se expresan por las fórmulas

$$\text{tang } V = \frac{2\rho^2}{a^2}, \quad S_n = \frac{a^2}{2\rho}, \quad \text{y} \quad S_t = \frac{2\rho^3}{a^2},$$

de las cuales se desprenden diversos procedimientos para construir las tangentes á la curva.

**417.** La expresión del radio de curvatura es

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{a^4}{4\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + \frac{3a^4}{4\rho^2}}.$$

418. El área descrita por el radio vector, cuando $\theta$ varía desde $\theta_0$ hasta $\theta_1$, queda determinada por la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \frac{a^2}{4}(\theta_1^2 - \theta_0^2).$$

De la cual, poniendo $\theta_0 = 0$, $2\pi$, $4\pi$,... y $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$, se deducen para valores de las áreas $A_1$, $A_2$, $A_3$,..., correspondientes á una, dos, etc., revoluciones del citado radio, estas otras:

$$A_1 = a^2\pi^2, \quad A_2 = 3a^2\pi^2, \quad A_3 = 5a^2\pi^2,...$$

Por ser $OD = a\sqrt{2\pi}$, *el área* $A_1$ *resulta igual á la mitad del área del círculo de radio* $OD$.

Y por ser constante, é igual á $2a^2\pi^2$, la diferencia de dos números sucesivos de la serie $A_1$, $A_2$, $A_3$,..., vese que *el aumento del área en cada revolución es igual al área del círculo del mismo radio.*

Proposiciones ambas demostradas por FERMAT en la carta á que renglones antes se hizo referencia.

419. La longitud del arco de la curva, comprendido entre el punto $O$ y el $(\theta, \rho)$ tiene por expresión

$$s = \int_0^\theta \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = a\int_0^\theta \frac{(4\theta^2+1)\,d\theta}{2\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}},$$

resoluble en las integrales elípticas

$$\int \frac{\theta^2\, d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} \quad \text{y} \quad \int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}}.$$

La primera de estas integrales es susceptible de reducción, pues integrándola por partes se halla, en efecto, por de pronto

$$\int \frac{\theta^2\, d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} = \frac{1}{8}\left[2\sqrt{\theta(4\theta^2+1)} - \int \frac{4\theta^2+1}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}}\, d\theta\right];$$

y, por lo tanto,

$$\int \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}} = \frac{1}{6}\sqrt{\theta(4\theta^2+1)} - \frac{1}{12}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}}.$$

Luego

$$s = \frac{a}{3}\left[\sqrt{\theta(4\theta^2+1)} + \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2+1)}}\right],$$

cuyo valor depende exclusivamente de una integral elíptica de primera especie.

## IV

### ESPIRAL PARABÓLICA

**420.** La *espiral de* FERMAT pertenece á un grupo de curvas estudiadas por JACOBO BERNOULLI en su *Specimen Calculi Differentialis in dimensione parabolæ helicoidis*, publicado en 1691 en las *Acta Eruditorum (Opera, t.* I, *p.* 431), en donde determinó sus tangentes, sus puntos de inflexión, sus áreas y la longitud de sus arcos, y á las cuales aquel eminente geómetra dió el nombre de *espirales parabólicas.*

Tienen por ecuación general estas curvas la siguiente:

$$(\rho - a)^2 = 2pa\theta.$$

De la cual se desprende la que corresponde á la *espiral de* FERMAT poniendo en ella, primeramente, $p = \frac{b^2}{a}$, y después $a = 0$.

**421.** Las espirales parabólicas se componen de dos ramas.

La primera, *ABCD...* (fig. 117), correspondiente á la ecuación

$$\rho = a + \sqrt{2pa\theta},$$

parte del punto *A*, donde es $\theta = 0$, y $\rho = OA = a$, y da un número infinito de vueltas alrededor del origen *O*, alejándose indefinidamente de este punto.

Y la segunda *rama*, *AOEFG...*, correspondiente á la ecuación

$$\rho = a - \sqrt{2\,pa\theta},$$

parte del mismo punto $A$ y aproxímase cada vez más al $O$, hasta encontrarle allí donde $\theta = \frac{a}{2\,p}$, para después alejarse indefinidamente del mismo punto.

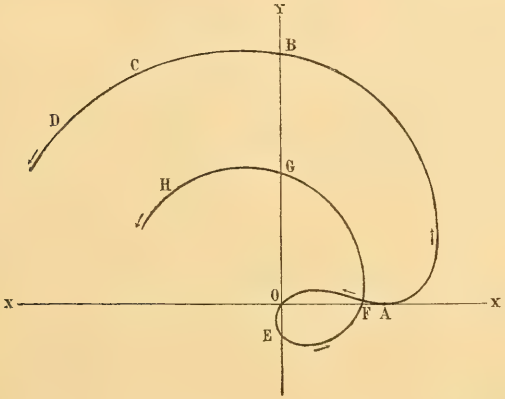



Figura 117.

La tangente á la curva en el punto $O$ forma un ángulo igual á $\frac{a}{2\,p}$ con el eje de las abscisas. En los demás puntos BERNOULLI determinó las tangentes valiéndose de las siguientes expresiones:

$$\text{tang}\,\omega = \frac{\rho\,(\rho - a)}{ap}, \quad \text{y} \quad S_t = \frac{\rho^2\,(\rho - a)}{ap},$$

designando por $\omega$ el ángulo de la tangente buscada con el radio vector del punto de contacto, y por $S_t$ la subtangente: fórmulas de las cuales se deduce que la curva es tangente al eje de las abscisas en el punto $A$.

422. La curva tiene evidentemente *puntos duplos* para cuya deter-

minación es menester encontrar dos valores de $\theta$, que difieran entre sí en $(2n+1)\pi$, siendo $n$ número entero y positivo, y á los cuales correspondan valores de $\rho$ iguales y de signo contrario. En estos puntos debe, pues, verificarse que

$$\rho = a + \sqrt{2pa\theta}, \quad \text{y} \quad -\rho = a - \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]};$$

ó

$$\rho = a - \sqrt{2pa\theta}, \quad \text{y} \quad -\rho = a - \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]},$$

según que el *punto duplo* proceda de la intersección, una con otra, de ambas ramas, ó de cortarse una de estas ramas á sí misma. En ambos casos, por eliminación de $\rho$, se obtiene este resultado:

$$\{4a^2 - 2pa[2\theta + (2n+1)\pi]\}^2 = 16p^2a^2\theta[\theta + (2n+1)\pi];$$

y, por lo tanto,

$$\theta = \frac{[2a - p(2n+1)\pi]^2}{8ap}.$$

Fórmula en la cual $n$ representa cualquier número entero positivo, y que sirve para determinar los valores de $\theta$ á que corresponden *puntos duplos* de la curva.

**423.** Para determinar los puntos de inflexión de la espiral considerada, recurriremos á la fórmula general

$$\rho^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 0,$$

que, aplicada al caso de que ahora se trata, se transforma en la que sigue:

$$\rho^2(\rho - a)^3 + 2p^2a^2(\rho - a) + p^2a^2\rho = 0.$$

De esta ecuación, combinada con la de la curva, se deducirán los valores de $\rho$ y $\theta$, correspondientes á los *puntos de inflexión* buscados, entre los cuales muestran las mismas ecuaciones que ha de poseer la curva uno *real*, por lo menos. Y también de su atenta consideración se infiere que los

*puntos de inflexión reales* de la curva se hallan situados en el interior de la circunferencia, cuyo centro coincide con el origen de las coordenadas, y cuyo *radio* es igual á $a$; y que el valor de $\rho$ en estos puntos es positivo. Luego, fuera del arco $AEFO$ de la curva, no es posible que ésta posea ninguno de aquel nombre.

**424.** El área descrita por el radio vector $\rho$, al pasar de una posición á otra distinta, es fácil de calcular. Pues, en efecto, tomando como posición inicial del radio la $OA$, el área se hallará expresada de este modo:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\left[a^2\theta + pa\theta^2 \pm \frac{4}{3}a\sqrt{2pa}\,\theta^{\frac{3}{2}}\right].$$

De donde se deduce, por referencia al signo —, y poniendo por $\theta$ su valor en el punto $O$, donde $\theta = \frac{a}{2p}$, que el área $A_1$, comprendida entre el arco $OA$ y su cuerda, tiene por expresión

$$A_1 = \frac{a^3}{24p}.$$

**425.** Para rectificar la espiral considerada, contando los arcos á partir del punto $A$, hállase que

$$s = \int_a^{\rho} \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + 1}\, d\rho = \frac{1}{ap}\int_a^{\rho} \sqrt{\rho^2(\rho - a)^2 + a^2 p^2}\, d\rho,$$

fórmula transformable en integrales elípticas.

Para más amplias informaciones referentes á la *espiral parabólica* véase G. E. Weyer: *Ueber die parabolische Spirale, Leipzig*, 1894.

## V

### ESPIRAL HIPERBÓLICA

**426.** Con el nombre de *espiral hiperbólica* designó Juan Bernoulli (*Acta Eruditorum*, 1713, *p.* 77; *Opera omnia*, *t.* I, *p.* 552) la curva definida por la ecuación

$$\rho\theta = m,$$

en la cual $m$ representa una constante.

Como $\rho$ disminuye y tiende hacia 0, conforme $\theta$ aumenta y tiende hacia $\infty$ vese que la curva da un número infinito de vueltas en rededor del origen, $O$, de las coordenadas, al cual indefinidamente se aproxima, y que por tal motivo constituye un *punto asintótico* de la misma curva (fig. 118).

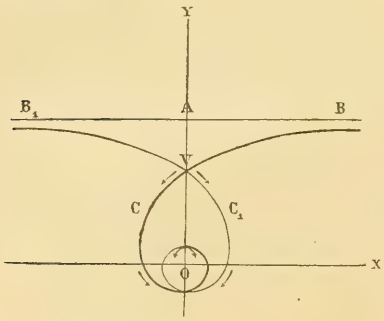



Figura 118.

Representando por $x$ é $y$ las coordenadas cartesianas de la curva, hállase que

$$y = \rho \operatorname{sen} \theta = m \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta};$$

de manera que $y$ tiende hacia $m$, conforme $\theta$ se aproxima á *cero*. Luego la recta $AB$, paralela al eje $Ox$, y cuya distancia á este eje es igual á $m$, es asíntota de la curva.

**427.** La *subtangente*, la *subnormal*, la *longitud de la tangente* y la *longitud de la normal* de la espiral hiperbólica, resultan expresadas por las fórmulas siguientes:

$$S_t = -m; \quad S_n = -\frac{m}{\theta^2} = -\frac{\rho^2}{m};$$

$$N = \frac{\rho}{m}\sqrt{\rho^2 + m^2}; \text{ y } T = \sqrt{\rho^2 + m^2}.$$

La primera de las cuales demuestra que la subtangente es cantidad constante, cualquiera que sea el punto de la curva á que se refiera: propiedad que permite construir con suma facilidad la tangente en cualquier caso.

**428.** El *radio de curvatura* tiene por expresión

$$R = \frac{\rho\,(m^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{m^3} = \frac{N^3}{\rho^2} = \frac{N^3}{m S_n} = \frac{N^3}{S_n S_t};$$

de la cual también fácilmente se deduce la determinación del *centro de*

*curvatura*, y que, además, muestra que la curva carece de *puntos de inflexión*.

**429.** El área descrita por el *radio vector*, cuando éste se mueve desde la posición correspondiente al ángulo $\theta_0$, hasta la correspondiente al $\theta_1$, se determina por la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2\, d\theta = \frac{m}{2}(\rho_0 - \rho_1),$$

y es igual al área de un triángulo de construcción muy sencilla.

**430.** Y por esta otra la longitud del arco de la curva, comprendido entre los puntos $(\rho_0, \theta_0)$ y $(\rho_1, \theta_1)$:

$$s = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + 1}\, .\, d\rho = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho^{-1}(m^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} d\rho$$

$$= \sqrt{\rho_1^2 + m^2} + \frac{m}{2}\log\frac{\sqrt{\rho_1^2 + m^2} - m}{\sqrt{\rho_1^2 + m^2} + m}$$

$$- \left[\sqrt{\rho_0^2 + m^2} + \frac{m}{2}\log\frac{\sqrt{\rho_0^2 + m^2} - m}{\sqrt{\rho_0^2 + m^2} + m}\right].$$

O

$$s = T_1 - T_0 + \frac{m}{2}\log\frac{(T_1 - m)(T_0 + m)}{(T_1 + m)(T_0 - m)};$$

representando por $T_0$ y $T_1$ las longitudes de las tangentes á la curva en los puntos considerados.

**431.** Entre los resultados que acabamos de obtener, referentes á la *espiral hiperbólica*, y los obtenidos en los Núms. **347** á **350**, al tratar de la curva *logarítmica*, adviértense algunas analogías y relaciones en las cuales conviene insistir un momento.

Si consideramos un punto de la *espiral hiperbólica* y otro de la *logarítmica* (Núm. **345**), tales que la ordenada cartesiana de éste sea igual al radio vector de aquél, las *longitudes* de la *subtangente*, de la *subnormal*, de la *tangente*, y de la *normal* en ambas curvas, correspondientes á los dos mencionados puntos, son iguales. Y si consideramos además dos puntos de

la *espiral hiperbólica* y otros dos de la *logarítmica,* tales que las ordenadas de los últimos sean iguales á los radios vectores de los primeros, el área de la figura, formada por estos radios vectores y por la espiral, es mitad del área de la figura, limitada por las dos ordenadas, por el arco de la logarítmica entre ellas comprendido, y por el eje de las abscisas. Así como la longitud del arco, comprendido entre los dos puntos considerados de la *espiral,* es igual á la longitud del arco comprendido entre los puntos correspondientes de la *logarítmica.*

## VI

### LITUUS

**432.** El *lituus (cayado ó báculo)* es una curva espiral, de la cual trató por vez primera COTES en su *Harmonia mensurarum,* publicada en 1722, y que tiene por ecuación, en coordenadas polares, la que sigue:

$$\rho^2 \theta = a^2.$$

De la cual inmediatamente se deduce que: «El *lituus* es una curva de tal condición que, al variar de situación el punto generador, pasando de $M$ á $M_1$..., el área del sector circular, que tiene por centro el origen $O$ de

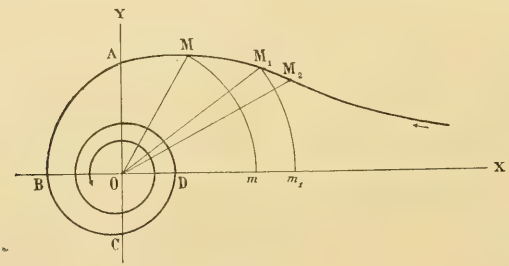



Figura 119.

las coordenadas, y que se halla comprendida entre el eje polar $Ox$ y el radio vector $OM$, permanece constante».

433. La misma ecuación enseña que, cuando $\theta$ aumenta, el punto generador de la curva describe un número infinito de vueltas alrededor del $O$, aproximándose indefinidamente á él, sin jamás alcanzarle. Cuando, por el contrario, $\theta$ tiende hacia 0, el punto generador se aleja indefinidamente del eje de las ordenadas, aproximándose al mismo tiempo al de las abscisas, como asíntota que es de la curva. En los puntos $A$, $B$, $C$, $D$, $E$..., donde $\theta$ es sucesivamente igual á $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots, \rho$ adquiere estos otros valores, correspondientes á los de $\theta$ (fig. 119):

$$OA = a\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ OB = a\sqrt{\frac{2}{2\pi}},\ OC = a\sqrt{\frac{2}{3\pi}},\ldots$$

434. La subtangente de la curva en el punto $(\theta, \rho)$ tiene por expresión

$$S_t = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{2a^2}{\rho}:$$

igualdad que permite construir las tangentes al *lituus*.

435. Para determinar los *radios de curvatura* del *lituus* sirve esta otra fórmula:

$$R = \frac{\rho\,(4a^4 + \rho^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2(\rho^4 - 4a^4)}.$$

436. Y los *puntos de inflexión* de la curva se encuentran mediante el análisis de la igualdad

$$\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - \rho^2 = 0,$$

que, en el caso de que se trata, se reduce á

$$\frac{1}{4}\theta^{-2} - 1 = 0:$$

de donde se concluye que $\theta = \pm\frac{1}{2}$. Como á $\theta = -\frac{1}{2}$ corresponde un

valor imaginario de $\rho$, la curva posee un solo punto de inflexión, $M_2$, definido por las coordenadas $\theta = \frac{1}{2}$ y $\rho = a\sqrt{2}$.

437. El área $A$, descrita por el radio vector, cuando $\theta$ varía desde $\theta_0$ hasta $\theta_1$, se halla expresada por la fórmula

$$A = \frac{1}{2} a^2 \log \frac{\theta_1}{\theta_0}.$$

438. Mas por ser

$$\int \sqrt{\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2}\, d\theta = a \int \theta^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{4}\theta^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

la curva no es rectificable por medio de funciones elementales.

Reduzcamos la integral anterior á la forma

$$a \int \frac{(1 + 4\theta^2)\, d\theta}{2\theta\sqrt{\theta(1 + 4\theta^2)}},$$

y sencillamente se verá que la rectificación de la curva depende de las integrales

$$\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{\theta(1 + 4\theta^2)}} \text{ y } \int \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(1 + 4\theta^2)}};$$

y teniendo presente la igualdad general conocida, fácil de verificar,

$$\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{(4\theta^2 + 1)\theta}} = -\frac{2\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}}{\theta} + 4\int \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}},$$

hállase, en conclusión, que

$$s = a\left[\frac{\sqrt{\theta_0(4\theta_0^2 + 1)}}{\theta_0} - \frac{\sqrt{\theta_1(4\theta_1^2 + 1)}}{\theta_1} + 4\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta(4\theta^2 + 1)}}\right].$$

Por lo tanto, *s depende de una integral elíptica de segunda especie*, reducida á la forma normal adoptada por *Weierstrass*.

## VII

### ESPIRAL LOGARÍTMICA

**439.** Las primeras indicaciones referentes á la *espiral logarítmica* encuéntranse en dos cartas escritas por DESCARTES al P. MERSENNE en 1638: en las cuales el gran filósofo habla de la curva, secante á todas las rectas, situadas en su mismo plano y que parten de un cierto punto ú origen, formando con ellas un ángulo constante: precisamente la denominada *espiral logarítmica.* Cuyas propiedades notables fueron poco más tarde descubiertas por JACOBO BERNOULLI, quien las expuso en dos artículos, publicados en 1691 y 1692 en las *Acta Eruditorum (Opera, t.* 1, *p.* 442 y *p.* 491).

**440.** Por ser, representando por $V$ el ángulo formado por el radio vector que pasa por un punto de la curva con la tangente á la curva en el mismo punto,

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho d\theta}{d\rho},$$

la ecuación diferencial de las curvas, á las cuales corresponde un valor constante de $V$, será

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{1}{c};$$

que, integrada, produce la siguiente ecuación finita de las mismas curvas, ó de las *espirales logarítmicas:*

$$\rho = Ce^{c\theta}.$$

Por medio de esta ecuación vese que la parte de la curva, correspondiente á los valores positivos de $\vartheta$, desde 0 hasta $\infty$, arranca (fig. 120) del punto $A$, cuyas coordenadas son 0 y $C$, y da un número interminable de vueltas alrededor del origen de las coordenadas ó *polo,* desviándose cada vez más de este origen; y la correspondiente á los valores negativos, desde 0

hasta $-\infty$, parte del mismo punto, y describe también infinito número de vueltas en derredor del polo, aproximándose á él incesantemente sin alcanzarle nunca.

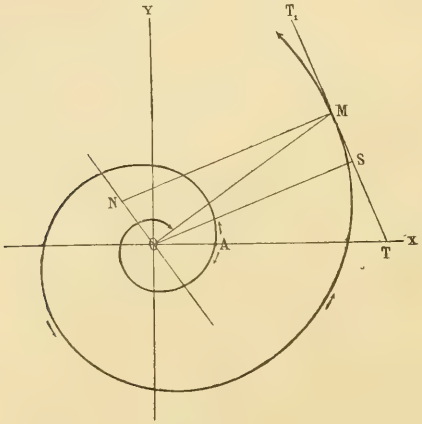



Figura 120.

441. La *subnormal*, la *subtangente* y la *longitud de la normal* tienen por expresiones respectivas las siguientes:

$$S_n = c\rho, \quad S_t = \frac{\rho}{c}, \quad \text{y} \quad N = \rho\sqrt{1+c^2}:$$

de las cuales inmediatamente se deduce que $S_n$, $S_t$ y $N$ *son proporcionales á* $\rho$:

442. Y el *radio de curvatura* esta otra:

$$R = \rho\sqrt{1+c^2}:$$

*proporcional también a* $\rho$, *é igual en longitud á la normal.*

Trazando, pues, la normal á la curva en el punto $M$, y prolongándola hasta cortar en $N$ á la recta $ON$, perpendicular á $OM$, se obtiene el centro de curvatura $N$, correspondiente al punto $M$.

Y así es fácil obtener el valor de las coordenadas $\theta_1$ y $\rho_1$ del punto $N$. Tenemos, con efecto, por ser $ON$ la subnormal,

$$\rho_1 = ON = c\rho = Cce^{c\theta}, \quad \text{y} \quad \theta_1 = NOx = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Eliminando luego $\theta$ entre estas ecuaciones, hállase que

$$\rho_1 = Cce^{c\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)} = Ce^{c\theta_1 - c\frac{\pi}{2} + \log c}.$$

Y poniendo ahora

$$\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2} - \frac{\log c}{c},$$

resulta finalmente

$$\rho_1 = Ce^{c\theta_2}.$$

Luego *la evoluta de la espiral logarítmica es otra espiral logarítmica, igual á la primera y referida al mismo polo* (Jacobo Bernoulli).

Si fuese, representando por $n$ cualquier número entero,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\log c}{c} = 2n\pi,$$

la evoluta de la espiral considerada coincidiría con la propia curva.

443. Si $OS$ representa la perpendicular, trazada desde el origen $O$ á la $MT$ (fig. 120), tangente ésta á la espiral en el punto $M$, el lugar geométrico de $S$, conforme $M$ varíe, será la *podaria* de la curva, relativamente al punto $O$.

Por ser $OS = OM \operatorname{sen} OMS$ y $\operatorname{tang} OMS = \frac{1}{c}$, resulta que

$$OS = \frac{\rho}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Y por ser también $MOS = OMN$, el ángulo $MOS$ será constante, y podrá designarse por $a$.

Representando, pues, por $\rho'$ y $\theta'$ las coordenadas polares de $S$, hállase que

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{c^2+1}} \quad \text{y} \quad \theta' = \theta - a.$$

Ecuaciones que, combinadas con la de la curva, producen para ecuación de la *podaria* la siguiente:

$$\rho' = \frac{C}{\sqrt{c^2+1}}\, e^{c(\theta'+a)},$$

de la cual se concluye, procediendo como en el número anterior, que *la podaria de la espiral logarítmica es otra espiral logarítmica, igual á la primera* (Jacobo Bernoulli).

**444.** Demuéstrase también en la Óptica que las *cáusticas* por *reflexión* y por *refracción* de la espiral logarítmica son asimismo espirales logarítmicas. (Jacobo Bernoulli). Estas propiedades de reproducción de la curva, y las consideradas en los Núms. **442** y **443**, vivamente excitaron y sostuvieron la atención del mismo eminente geómetra mencionado, en el detallado estudio á que se consagró para ponerlas bien en claro.

**445.** El área descrita por el radio vector de la espiral logarítmica, cuando $\theta$ varía desde $\theta_0$ hasta $\theta_1$, tiene por expresión

$$A = \frac{1}{4c}(\rho_1^2 - \rho_0^2).$$

**446.** Y con no menor facilidad se encuentra la longitud de un arco, $s$, de la curva, comprendido entre los puntos $(\theta_0, \rho_0)$ y $(\theta_1, \rho_1)$, valiéndose de la fórmula

$$s = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + 1}\, .\, d\rho = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(\rho_1 - \rho_0).$$

## VIII

### ESPIRAL DE POINSOT

**447.** Dase el nombre de *espiral de* Poinsot á la curva definida por la ecuación

$$\rho = \frac{2a}{e^{m\theta} + e^{-m\theta}},$$

por haber sido considerada por aquel tan ilustre geómetra en su célebre memoria titulada *Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps*, presentada al Instituto de Francia en 1834 y publicada en el *Journal de Liouville (1.ª serie, t.* XVI).

Por ser $\rho = a$ cuando es $\theta = 0$, y $\rho = 0$ cuando es $\theta = \infty$, y por ser negativa la derivada

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -2am\frac{e^{m\theta} - e^{-m\theta}}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2},$$

cuando $\theta$ es positiva y diferente de cero, vese que una parte, $ABCD...$, de la curva resulta engendrada por un punto que, partiendo de $A$, en donde

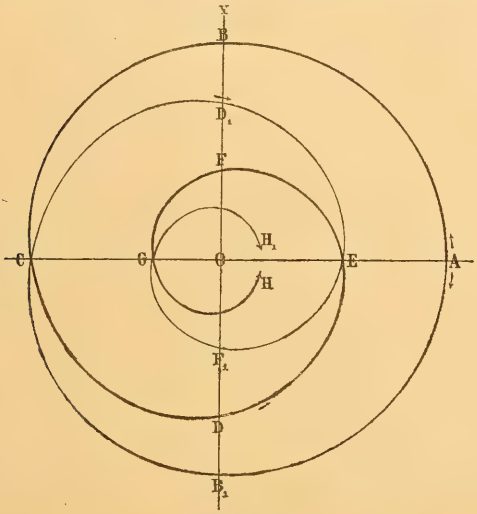



Figura 121.

$\rho = a$ y $\theta = 0$, da un número infinito de vueltas alrededor del origen $O$, en sentido positivo, aproximándose indefinidamente á este punto. Y, como la ecuación de la curva no se altera cuando se muda $\theta$ en $-\theta$, conclúyese que la otra parte $AB_1CD_1...$, de la curva es simétrica de la primera, relativamente al eje $OA$ (fig. 121).

448. El ángulo $V$, formado por la tangente á la curva con el radio vector del punto de contacto, se determina por la fórmula

$$\operatorname{tang} V = -\frac{2a}{m\rho\,(e^{m\theta} - e^{-m\theta})};$$

según la cual la tangente á la curva en el punto $A$ es perpendicular á $OA$.

Representando por $N$ la longitud de la *normal polar*, hállase que

$$N = \frac{\rho}{a}\sqrt{(1 + m^2)\,a^2 - m^2\,\rho^2};$$

fórmula adecuada para construir las normales á la curva.

449. El *radio de curvatura* de la *espiral de* POINSOT puede calcularse por esta otra fórmula:

$$R = \frac{\rho\,[(1 + m^2)\,a^2 - m^2\,\rho^2]^{\frac{3}{2}}}{a^3\,(1 + m^2)}.$$

De la cual se concluye que la curva carece de *puntos de inflexión*.

En el punto $A$, la expresión del radio de curvatura se reduce á la que sigue:

$$R = \frac{a}{m^2 + 1}.$$

450. Para hallar el área recorrida por el radio vector de la espiral considerada, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\theta$, sirve esta otra fórmula:

$$A = 2a^2\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} = \frac{1}{2m}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{2m\theta} + 1}\right].$$

451. Y para determinar la longitud $s$ del arco de la misma espiral, comprendido entre el punto $A$ y el punto $(\theta, \rho)$, comenzaremos por escribir la expresión, fácil de encontrar,

$$s = \int_0^{\theta}\frac{2a\,d\theta}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2}\sqrt{(1 + m^2)\,(e^{2m\theta} + e^{-2m\theta}) + 2\,(1 - m^2)}.$$

Mas, poniendo $e^{2m\theta} = z$, y representando por $U$ la integral

$$U = \int \frac{d\theta}{(e^{m\theta} + e^{-m\theta})^2} \sqrt{(1+m^2)(e^{2m\theta} + e^{-2m\theta}) + 2(1-m^2)},$$

hállase que

$$U = \frac{1}{2m} \int \frac{dx}{(x+1)^2} \sqrt{\frac{(1+m^2)x^2 + 2(1-m^2)x + 1 + m^2}{x}}$$

$$= \frac{1}{2m} \int \frac{[(1+m^2)x^2 + 2(1-m^2)x + 1 + m^2]\,dx}{(x+1)^2 \sqrt{x[(1+m^2)x^2 + 2(1-m^2)x + 1 + m^2]}}.$$

Suponiendo además que

$$x[(1+m^2)x^2 + 2(1-m^2)x + 1 + m^2] = F(x),$$

despréndese la identidad

$$\frac{F(x)}{x(x+1)^2} = 1 + m^2 - 4m^2 \left[ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right].$$

De la cual se infiere que

$$U = \frac{1}{2m} \left[ (1+m^2) \int \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} - 4m^2 \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{F(x)}} + 4m^2 \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{F(x)}} \right].$$

Y de ésta, empleando una fórmula demostrada en la Teoría de las Funciones elípticas, ó la siguiente identidad, fácil de verificar por diferenciación:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{F(x)}} = \frac{\sqrt{F(x)}}{4m^2(x+1)} + \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{F(x)}} - \frac{1+m^2}{8m^2} \int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{F(x)}},$$

lo que sigue:

$$U = \frac{1}{2m}\left[\frac{\sqrt{F(x)}}{x+1} + \frac{m^2+1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} - \frac{1+m^2}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{F(x)}}\right].$$

Para que las integrales elípticas que figuran en esta fórmula adquieran la forma normal adoptada por WEIERSTRASS, basta poner

$$x = v + h \quad \text{y} \quad h = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1-m^2}{1+m^2};$$

con lo cual desaparece el término de segundo grado que entra en la composición de $F(x)$, y se obtiene finalmente

$$U = \frac{\sqrt{1+m^2}}{2m}\left[\frac{5+m^2}{3(1+m^2)}\int\frac{dv}{\sqrt{4v^3 - g_1 v - g_2}}\right.$$
$$\left. - \int\frac{v\,dv}{\sqrt{4v^3 - g_1 v - g_2}} + \frac{\sqrt{4v^3 - g_1 v - g_2}}{2(v+1+h)}\right];$$

en donde las invariantes $g_1$ y $g_2$ significan lo que sigue:

$$g_1 = 4(3h^2 - 1) \quad \text{y} \quad g_2 = 4h(2h^2 - 1).$$

Vese, pues, que *la rectificación de la espiral de* POINSOT *depende de dos integrales elípticas, una de primera y otra de segunda especie.*

## IX

### ESPIRAL TRACTRIZ

**452.** Con el nombre de *espiral tractriz* se designa la curva cuya tangente, en *coordenadas polares,* es de longitud constante. Curva estudiada por ROUQUEL en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1863, *p.* 494), donde también se encuentran resueltas por el mismo matemático dos cuestiones que, referentes á ella, había propuesto anteriormente HATON DE LA GOUPILLIÈRE *(Nouvelles Annales des Mathématiques,* 1863, *p.* 336).

**453.** De la definición anterior inmediatamente se deduce que

$$\rho^2 + \rho^4\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 = a^2, \quad \text{ó} \quad d\theta = \pm\left[\frac{a^2\,d\rho}{\rho^2\sqrt{a^2-\rho^2}} - \frac{d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right].$$

É, integrando, encuéntrase, en términos finitos, que la ecuación de la mencionada curva será

$$\theta = \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} - \text{arc cos}\,\frac{\rho}{a};$$

en la cual $\theta$ puede ser positiva ó negativa, no figurando en ella la constante arbitraria, introducida por la integración, por haber ya sido eliminada mediante la condición de ser $\theta = 0$ cuando $\rho = a$.

Por medio de la anterior ecuación y de su diferencial

$$\frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho^2},$$

adviértese que, cuando $\rho$ varía desde $a$ hasta 0, los valores positivos de $\theta$ crecen constantemente desde 0 hasta $\infty$, y el punto generador de la curva describe un arco (figura 122), *ABCD...*, que parte del punto *A*, colocado á la distancia *a* del punto *O*, y describe un número infinito de vueltas alrededor de este punto, *ó polo asintótico*, al cual se aproxima cada vez más, sin llegar á confundirse con él nunca.

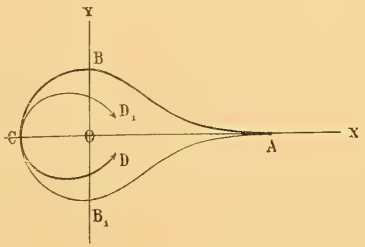



Figura 122.

Á los valores negativos de $\theta$ corresponde otra rama de la curva, igual á la precedente y simétricamente dispuesta relativamente al eje *Ox*, $AB_1CD_1$...

**454.** Por ser

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen}\,\theta - \cos\theta\,\dfrac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}}{\cos\theta + \text{sen}\,\theta\,\dfrac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}},$$

vese, en primer lugar, que las dos ramas de la curva son tangentes al eje $Ox$ en $A$, donde en consecuencia la curva posee un punto de *retroceso*.

Y, por medio de la misma ecuación, vese también que los puntos donde $y$ pasa por un valor máximo ó por uno mínimo se hallan definidos por la expresión

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}.$$

Y como poniendo $x = \rho\cos\theta$ é $y = \rho\operatorname{sen}\theta$ se halla la ecuación

$$x^2 + y^2 \pm ax = 0,$$

que representa dos círculos iguales, cuyos centros están en el eje $Ox$, á la distancia $\frac{1}{2}a$ del polo $O$, resulta que *los puntos de la curva donde y pasa por un máximo ó por un mínimo corresponden á las circunferencias de los círculos á que acabamos de referirnos.*

Y del mismo modo se concluye que *los puntos donde x pasa por un máximo ó por un mínimo se hallan situados sobre las circunferencias*

$$x^2 + y^2 \pm ay = 0.$$

Propiedades que no hemos encontrado mencionadas por autor alguno, ni en las cuales sabemos tampoco si antes de ahora ha reparado nadie.

**455.** El radio de curvatura de la *espiral tractriz* tiene por expresión

$$R = \frac{a\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}}{a^2 - 2\rho^2};$$

según la cual la curva posee dos puntos de inflexión, cuyas coordenadas son (Rouquel: *l. c.*)

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \theta = \pm\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Representando por $\alpha$ el ángulo de la normal en un punto cualquiera con el radio vector del mismo punto, dedúcese que

$$\cot\alpha = -\frac{\sqrt{a^2 - \rho^2}}{\rho}, \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\rho}{a}.$$

Y, utilizando esta igualdad, podemos dar á la expresión del radio de curvatura la siguiente forma (Rouquel: *l. c.*)

$$R = \frac{\rho \cos\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

**456.** Designando por $s$, según costumbre, la longitud de los arcos de la curva,

$$ds = \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + 1}\, d\rho = -\frac{a\, d\rho}{\rho};$$

y, en consecuencia, tomando por origen de los arcos el punto $A$,

$$s = a \log \frac{a}{\rho} = -a \log \operatorname{sen}\alpha.$$

**457.** Y no más difícil es hallar la siguiente expresión del área, $A$, descrita por el radio vector de la *espiral tractrix*, cuando este radio varía desde $a$ hasta un valor cualquiera, $\rho$:

$$A = -\frac{1}{4}\rho\sqrt{a^2 - \rho^2} - \frac{1}{4}a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{\rho}{a} + \frac{1}{8}a^2\pi.$$

**458.** Para dar por terminado este asunto, transcribiremos, sin detenernos á demostrarlas, las dos proporciones siguientes, enunciadas por Haton de la Goupillière (*l. c.*), y demostradas por Rouquel (*l. c.*) y Laquière (*Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1863, *p.* 549):

1.ª La curva recíproca de la evolvente del círculo para los radios emanados del centro es una *espiral tractrix*.

2.ª Y también lo es el lugar geométrico del polo de una espiral hiperbólica que rueda sobre otra igual, coincidentes ambas una con otra al iniciarse el movimiento.

# X

## LA COCLEOIDE

**459.** Falkenburg y Benthen *(Niew Archief, Amsterdam, t.* x, *p.* 76) designaron con el nombre de *cocleoide* (de κογχη, concha) á la curva que tiene por ecuación

$$\rho = a\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}.$$

Curva de la cual se tuvo la primera noción por un problema propuesto en 1857 por Catalan en su *Manuel des Candidats à l'Ecole Polytechnique*, y que años después estudiaron Cesàro *(Nouvelle Correspondance, t.* IV, 1878, *página* 283); Falkenburg *(Archiv der Mathematik, Leipzig, t.* CXX, *página* 259); Neuberg *(Matthesis, t.* V, 1885, *p.* 89); etc., etc.

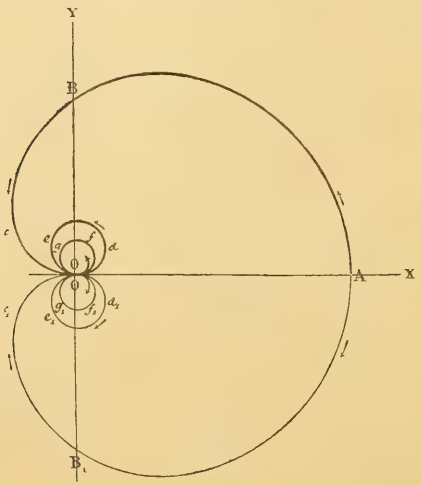



Figura 123.

**460.** Del análisis de la ecuación es fácil inferir la forma de la curva.

Cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\pi$, su punto generador describe el arco *ABO* (fig. 123), tangente en *O* al eje polar. Cuando, á continuación, $\theta$ varía desde $\pi$ hasta $2\pi$, el mismo punto describe el arco *Od eO*, también tangente en *O* al eje polar. Y, suponiendo que la variación de $\theta$ continúe, obtiénense una serie de arcos cerrados, como el *OfgO*, tangentes todos al eje

polar en el punto $O$, y que no pueden cortarse unos á otros; porque, si se cortasen, los valores de $\theta$ en los puntos de intersección deberían satisfacer á esta condición:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta + n\pi)}{\theta + n\pi} = \frac{\operatorname{sen}(\theta + m\pi)}{\theta + m\pi},$$

en la cual $m$ y $n$ representan números enteros positivos, uno *par* y otro *impar:* lo cual daría para $\theta$ un valor negativo, contradictorio con lo antes supuesto.

Admitiendo valores negativos de $\theta$, obtiénese, sí, otra rama de la curva, simétrica de la anterior relativamente al eje polar, señalada en la figura 123 con las mismas letras, diferenciadas con *subíndices,* que la primera, salvo en los puntos $A$ y $O$, comunes á las dos.

**461.** Por ser

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a\,\frac{\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\theta^2} = \frac{\rho\,(a\cos\theta - \rho)}{a\operatorname{sen}\theta},$$

vese que será $\dfrac{d\rho}{d\theta} = 0$, cuando sea $\theta = 0$, y también cuando sea $\rho = a\cos\theta$.

Luego *la circunferencia, de radio igual á* $\dfrac{1}{2}\,OA$, *y cuyo centro coincide con el punto medio de* $OA$, *corta á la curva en los puntos en que* $\rho$ *pasa por un valor máximo ó mínimo.*

**462.** Y por ser

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\theta\operatorname{sen}2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\theta\cos 2\theta - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta},$$

resulta que la tangente á la curva en el punto $A$ es perpendicular al eje de las abscisas.

La derivada $\dfrac{dy}{dx}$ es infinita en los puntos donde

$$a\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = \rho\cos\theta.$$

Y, poniendo en esta ecuación $x = \rho\cos\theta$ é $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, resulta que

$$(x^2 + y^2)\,x = a\,(x^2 - y^2).$$

Luego *todos los puntos en que la tangente es perpendicular al eje de las abscisas corresponden á la cúbica representada por esta ecuación, ó sea á una estrofoide.*

Por ser $\frac{dy}{dx} = 0$ en los puntos donde

$$\rho = 2a\cos\vartheta,$$

vese que *todos los puntos donde la tangente es paralela al eje de las abscisas corresponden á una circunferencia de radio igual á a, y cuyo centro se halla situado en A.*

463. La ecuación, referida á coordenadas polares, de las tangentes á la *cocleoide*, es

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\rho_1}\operatorname{sen}(\vartheta - 2\vartheta_1) + \frac{1}{a\operatorname{sen}\vartheta_1}\operatorname{sen}(\vartheta - \vartheta_1),$$

representando por $\vartheta_1$ y $\rho_1$ las coordenadas del punto de contacto.

Y poniendo en esta ecuación $\vartheta = 2\vartheta_1$, hállase que $\rho = a$.

Luego *la tangente á la curva en el punto* $(\vartheta_1, \rho_1)$ *pasa por el* $(2\vartheta_1, a)$: *esto es, por el punto simétrico del vértice A, relativamente á la recta que une el* $(\vartheta_1, \rho_1)$ *con el origen.* Teorema debido á Cesàro (*l. c.*), que facilita grandemente la construcción de las tangentes á la *cocleoide.*

464. El *radio de curvatura* de la curva de este nombre se halla determinado por la fórmula

$$R = \frac{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{2\vartheta(a^2 - a\rho\cos\vartheta)};$$

de la cual, en el caso de ser $\vartheta = 0$, se desprende para valor del radio, en el punto $A$, $R = \frac{3}{4}a$. Y, poniendo $\rho = 0$, vese que en el punto $O$, donde $\vartheta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi\ldots$, se verifica que $R = \frac{a}{\pi}, \frac{a}{2\pi}$.

465. A las propiedades de la *cocleoide* acabadas de exponer agregaremos, para concluir, el siguiente enunciado de un teorema descubierto también por Cesàro (*l. c.*) de fácil demostración:

*Cuando un punto móvil describe una circunferencia, el centro de gra-*

*vedad del arco descrito se mueve asimismo sobre una cocleoide, cuya tangente en un punto cualquiera se dirige constantemente hacia el punto generador de la circunferencia.*

**466.** La *cocleoide* es la curva inversa de la *cuadratriz de* Dinóstrato. Siendo de advertir que los antiguos geómetras emplearon esta designación en sentido diferente del que actualmente se le atribuye. Como que, según un comentario de Jamblique, conservado por Simplicius en sus *Comentarios sobre Aristóteles,* Pappo aplicó el nombre de *cocleoide* á la misma curva á que Proclo y Eutocio dieron el nombre de *concoide:* esto es, á la curva considerada en el Núm. **163**. [Véase P. Tannery: *Histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'antiquité. (Bulletin des Sciences Mathématiques,* 1883, *p.* 183.)]

## XI

### LA CLOTOIDE

**467.** Denominó Cesàro *clotoide,* nombre derivado del de la parca *hilandera Cloto* (Κλοθω), á la curva de curvatura proporcional á la longitud de un arco de la misma, contado á partir de un punto fijo, hacia la cual llamó la atención por vez primera Jacobo Bernoulli, según puede verse en un fragmento de sus escritos, publicado después de su muerte *(Jacobi Bernoulli Basileensis Opera, t.* II, *Genevæ,* 1744, *p.* 1084); y que Cornu descubrió de nuevo en época reciente, al ocuparse en el estudio de los fenómenos de difracción de la luz *(Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* 1864, *p.* 113). Pero Cesàro, como ya queda dicho, fué quien le dió nombre *(Nouvelles Annales des Mathématiques, 3.ª serie, t.* V, 1886; y *Lezioni di Geometria intrinseca, Napoli,* 1896), y quien descubrió y estudió sus principales propiedades.

**468.** Representando por $\rho$ el radio de curvatura de la *clotoide* en un punto cualquiera; por $s$ la longitud del arco, comprendido entre este punto y otro punto fijo; y por $a$ una constante, la ecuación de la *clotoide* es, por definición,

$$\rho s = a^2. \tag{1}$$

Siendo preciso para obtener la ecuación de la curva, referida á *coordenadas cartesianas*, recurrir al *Cálculo Integral*, como sigue.

De las *ecuaciones diferenciales* conocidas

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dy}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dx}{ds}$$

se desprenden, en efecto, estas otras:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{s}{a^2}\frac{dy}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{s}{a^2}\frac{dx}{ds},$$

que pasamos á integrar. Para lo cual, poniendo $\frac{dx}{ds} = t$ y $\frac{dy}{ds} = z$, se encuentra, por de pronto, que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{s}{a^2}z \quad \text{y} \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{s}{a^2}t.$$

Y como la ecuación $ds^2 = dx^2 + dy^2$ equivale á esta otra, $t^2 + z^2 = 1$, resulta que

$$\frac{dt}{ds} = \frac{s}{a^2}\sqrt{1-t^2};$$

y, de consiguiente,

$$\text{arc sen}\, t = \frac{s^2}{2a^2} + c_1, \quad \text{ó} \quad \frac{dx}{ds} = t = \operatorname{sen}\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1\right).$$

De la ecuación $t^2 + z^2 = 1$ se deduce también que

$$\frac{dy}{ds} = z = \sqrt{1-t^2} = \cos\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1\right);$$

y, en consecuencia, para determinar los valores de $x$ é $y$ disponemos de estas dos ecuaciones:

$$x = \int_0^s \operatorname{sen}\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1\right) ds + c_2, \quad \text{é} \quad y = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1\right) ds + c_3:$$

las cuales pueden simplificarse adoptando, para origen de las coordenadas el punto, origen de los arcos, donde $s = 0$, y para dirección del eje de las ordenadas la tangente á la curva en el mismo punto. Porque, en tal supuesto, hallaremos que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, y $c_3 = 0$; y, por lo tanto,

$$(2) \qquad x = \int_0^s \operatorname{sen} \frac{s^2}{2a^2}\, ds \quad \text{é} \quad y = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a^2}\, ds.$$

**469.** Indaguemos ahora cuál es la forma de la clotoide.

De la ecuación (1) inmediatamente se infiere que $\rho$ solamente adquiere el valor $\infty$ cuando $s = 0$; y que solamente será igual á *cero* cuando sea igual á $\infty$ el de $s$. Luego la curva solamente admite un punto de inflexión en el origen (fig. 124), sin más *inflexiones* en todo su trayecto: como se infiere también que la curvatura aumenta constantemente con $s$.

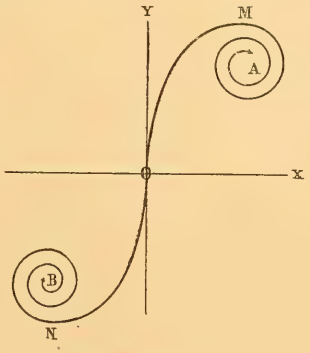


Figura 124.

Y de esta otra relación,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \dfrac{s^2}{2a^2}}{\operatorname{sen} \dfrac{s^2}{2a^2}} = \operatorname{cotg} \frac{s^2}{2a^2},$$

conclúyese también con gran facilidad que las tangentes á la *clotoide, paralelas* al eje de las abscisas, corresponden á infinidad de puntos, determinados por los valores de $s$, dados por las ecuaciones

$$\frac{s^2}{2a^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi, \quad \frac{7}{2}\pi, \ldots;$$

y las paralelas al eje de las ordenadas á infinito número de puntos también, correspondientes á los valores de $s$, definidos por las ecuaciones

$$\frac{s^2}{2a^2} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$$

Poniendo en las ecuaciones (2) $\frac{s^2}{2a^2} = v$, y tomando como límite de $s$ el $\infty$, encuéntrase

$$\lim_{s=\infty} x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} v}{\sqrt{v}}\, dv \quad \text{y} \quad \lim_{s=\infty} y = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{\cos v}{\sqrt{v}}\, dv:$$

Las integrales que figuran en estas ecuaciones son conocidas en el *Análisis* por el nombre de *integrales de Fresnel,* por haberlas empleado este sutilísimo físico y eminente geómetra en sus investigaciones de Óptica, y representan el número constante $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Luego

$$\lim_{s=\infty} x = \frac{a}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{y} \quad \lim_{s=\infty} y = \frac{a}{2}\sqrt{\pi}.$$

Y, en consecuencia de todo, las coordenadas $x$ é $y$ serán finitas, cualquiera que sea $s$; y el punto $(x, y)$ se aproximará indefinidamente al $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\pi},\ \frac{1}{2}a\sqrt{\pi}\right)$ conforme $s$ se aproxime, indefinidamente también, al valor $\infty$.

Mudando $s$ en $-s$, $x$ é $y$ cambian simplemente de signo: luego la curva posee otra rama igual á la hasta ahora considerada, y dispuesta, por referencia á los ejes de las *coordenadas negativas,* como lo está la primera relativamente á los ejes de las *positivas.*

La *clotoide,* en suma, presenta, como advirtió por primera vez Cornu, la forma indicada en la figura 124, en la cual $A$ y $B$ representan *dos puntos asintóticos* $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\pi},\ \frac{1}{2}a\sqrt{\pi}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{\pi},\ -\frac{1}{2}a\sqrt{\pi}\right)$; y $O$ un *punto de inflexión.*

**470.** La *evoluta de la clotoide* puede hallarse por medio de las ecuaciones conocidas

$$x - \alpha = -\rho\frac{dy}{ds} \quad \text{é} \quad y - \beta = \rho\frac{dx}{ds},$$

(donde $\alpha$ y $\beta$ designan las coordenadas del centro de curvatura), y de las cuales se deduce que

$$x - \alpha = -\frac{a^2}{s}\cos\frac{s^2}{2a^2}, \quad \text{y} \quad y - \beta = \frac{a^2}{s}\operatorname{sen}\frac{s^2}{2a^2};$$

ecuaciones éstas que determinan las coordenadas $\alpha$ y $\beta$ de los puntos de la evoluta en función de $s$.

**471.** Las propiedades más interesantes de la clotoide son las referentes á los *centros de gravedad* de sus arcos, descubiertas por CESÀRO *(Nouvelles Annales des Mathématiques, 3.ª serie, t.* V, 1886, *p.* 511; y *Lezioni di Geometria intrinseca*, §. VI). Mereciendo, entre ellas, especialmente mencionarse las siguientes:

1.° Sean $s_0$ y $s_1$ los valores de $s$, á contar del origen de las coordenadas, hasta las extremidades de un arco de la clotoide; $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$ las coordenadas de estos puntos extremos; y $(X, Y)$ las del centro de gravedad del arco. Y, siguiendo á POISSON *(Traité de Mécanique, t.* I, 1883, *p.* 121), hallaremos que

$$(s_1 - s_0)\,X = \int_{s_0}^{s_1} ds \int_0^s \operatorname{sen}\frac{s^2}{2a^2}\,ds$$

$$= s_1 \int_0^{s_1} \operatorname{sen}\frac{s^2}{2a^2}\,ds - s_0 \int_0^{s_0} \operatorname{sen}\frac{s^2}{2a^2}\,ds - \int_{s_0}^{s_1} s \operatorname{sen}\frac{s^2}{2a^2}\,ds$$

$$= s_1 \int_0^{s_1} \operatorname{sen}\frac{s^2}{2a^2}\,ds - s_0 \int_0^{s_0} \operatorname{sen}\frac{s^2}{2a^2}\,ds + a^2\left(\cos\frac{s_1^2}{2a^2} - \cos\frac{s_0^2}{2a^2}\right);$$

y, del mismo modo,

$$(s_1 - s_0)\,Y = \int_{s_0}^{s_1} ds \int_0^s \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds$$

$$= s_1 \int_0^{s_1} \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds - s_0 \int_0^{s_0} \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds - a^2\left(\operatorname{sen}\frac{s_1^2}{2a^2} - \operatorname{sen}\frac{s_0^2}{2a^2}\right).$$

Por lo tanto, representando por $(\alpha_0, \beta_0)$ y $(\alpha_1, \beta_1)$ las coordenadas de los *centros de curvatura* en las extremidades del arco considerado, podemos escribir

$$(s_1 - s_0)\,X = s_1\,\alpha_1 - s_0\,\alpha_0 \quad \text{y} \quad (s_1 - s_0)\,Y = s_1\,\beta_1 - s_0\,\beta_0.$$

Y como por medio de estas igualdades resulta igual á *cero* el *determinante*

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ \alpha_0 & \beta_0 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \end{vmatrix},$$

queda con esto demostrado que *el centro de gravedad de un arco cualquiera de clotoide corresponde á la recta que une los centros de curvatura de las extremidades del mismo arco.*

2.° Por lo expuesto, las coordenadas del *centro de gravedad* del arco *OM* se hallan expresas por las fórmulas

$$s_1 X = s_1 \int_0^{s_1} \operatorname{sen} \frac{s^2}{2a^2}\, ds + a^2 \left( \cos \frac{{s_1}^2}{2a^2} - 1 \right) \quad \text{y}$$

$$s_1 Y = s_1 \int_0^{s_1} \operatorname{sen} \frac{s^2}{2a^2}\, ds - a^2 \operatorname{sen} \frac{{s_1}^2}{2a^2} :$$

$$s_1 X = s_1 \alpha_1 - a^2 \quad \text{é} \quad Y = \beta_1.$$

Y siendo la ecuación del *círculo osculador* de la clotoide, en el punto $(x_1, y_1)$,

$$(x - \alpha_1)^2 + (y - \beta_1)^2 = \frac{a^4}{{s_1}^2},$$

es fácil cerciorarse de que los valores de $X$ é $Y$ la satisfacen. Luego *el centro de gravedad del arco OM de la clotoide se halla situado en la intersección del círculo osculador en M con la perpendicular á la tangente en O,* trazada por el punto $(\alpha_1, \beta_1)$.

**472.** La *clotoide* forma parte de una clase importante de curvas, cuya ecuación, $R = ks^m$, en coordenadas intrínsecas, fué estudiada por Pirondini en el *Giornale di Matematiche (Napoli,* 1892, *p.* 326), y á la cual pertenecen también la *evolvente del círculo* y la *espiral logarítmica.* En el trabajo consagrado á dilucidar tan interesante materia presenta además el ilustre geómetra mencionado algunos otros teoremas referentes á las re-

laciones que existen entre los *radios de curvatura*, la *longitud de los arcos*, y las *dimensiones de las áreas* de las varias curvas consideradas y de sus *evolventes* y *evolutas*, merecedores de atento estudio.

## XI

### LA PSEUDOCATENARIA

**473.** Dase el nombre de *pseudocatenaria* á la curva que tiene por ecuación en coordenadas *intrínsecas* (E. Cesàro: *Lexioni di Geometria intrinseca*, 1896, *p.* 17) la siguiente:

$$R = k^2 a - \frac{s^2}{a},$$

en la cual $s$ representa la longitud de los arcos, y $R$ el radio de curvatura en el punto donde se supone que el arco termina.

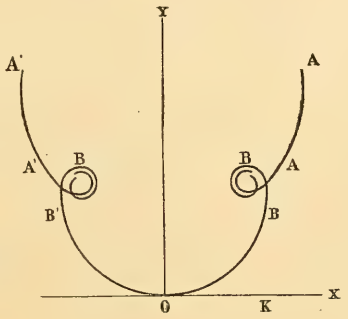



Figura 125.

Como la posición del punto inicial de la curva es arbitraria, supondremos que aquel punto es el $O$ (fig. 125), donde $s = 0$; y para eje de las abscisas adoptaremos la tangente $OK$, correspondiente al mismo punto inicial. Y de esta manera, para determinar el ángulo que cualquier otra tangente á la curva forme con $OK$, dispondremos de la fórmula

$$(1) \qquad \varphi = \int_0^s \frac{ds}{R} = \int_0^s \frac{a\,ds}{k^2 a^2 - s^2} = \frac{1}{2k} \log \frac{ka + s}{ka - s}.$$

Adoptada la tangente $OK$ para eje de las abscisas, las cantidades $\frac{dx}{ds}$ y $\frac{dy}{ds}$ se hallarán expresadas por las fórmulas

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \quad \text{y} \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\varphi;$$

de las cuales se desprenden los siguientes valores de $x$ é $y$:

$$x = \int_0^{\varphi} \cos\varphi \frac{ds}{d\varphi} d\varphi \quad \text{é} \quad y = \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}\varphi \frac{ds}{d\varphi} d\varphi,$$

tomando el punto $O$, correspondiente á $s = 0$, como origen de las coordenadas. Y sustituyendo por $\frac{ds}{d\varphi}$ su valor en función de $\varphi$, deducido de la igualdad (1),

$$(A) \qquad s = \frac{ka\,(e^{2k\varphi} - 1)}{e^{2k\varphi} + 1} = ka\,\frac{e^{k\varphi} - e^{-k\varphi}}{e^{k\varphi} + e^{-k\varphi}},$$

obtiénense estos resultados:

$$\frac{ds}{d\varphi} = 4ak^2 \frac{1}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2}, \quad \text{y}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} x = 4ak^2 \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2}, \text{ é} \\ y = 4ak^2 \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2}. \end{cases}$$

**474.** Fundados en las fórmulas anteriores, podemos determinar fácilmente la forma de la curva, en el intervalo de $s = 0$ á $s = \pm ka$.

Vese, en primer lugar, por las fórmulas $(A)$ y $(B)$, que, cuando por $s$ se toma $-s$, $\varphi$ se transforma en $-\varphi$: con lo cual $x$ se convierte en $-x$, sin cambio ninguno en el valor de $y$. Luego la curva resulta simétrica relativamente al eje de las ordenadas (fig. 125).

Por ser $R$ finito, cualquiera que sea el valor de $s$, la curva no posee *puntos de inflexión*. Y, como las derivadas $\frac{dx}{ds}$ y $\frac{dy}{ds}$ no pueden ser nulas al mismo tiempo, la rama considerada carece también de *puntos de retroceso*.

Cuando $s = 0$, hállase que $R = k^2 a$; y éste será el radio del círculo osculador de la curva en el origen $O$.

Y, cuando $s$ tiende hacia $ak$, $\varphi$ tiende hacia $\infty$: luego el ángulo de la

tangente con el eje de las abscisas aumenta indefinidamente, mientras en las mismas circunstancias el radio de curvatura, $R$, disminuye indefinidamente también y propende hacia 0.

Vese, pues, que la curva se compone de dos ramas, $OB$ y $OB'$, que parten del punto $O$ y dan un número infinito de vueltas, situadas unas dentro de otras, aproximándose cada vez más á dos puntos *asintóticos*, cuyas coordenadas, $x_1$ é $y_1$, se expresan de este modo:

$$x_1 = \pm 4k^2 a \int_0^\infty \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \pm \frac{\pi a}{e^{\frac{\pi}{2k}} - e^{-\frac{\pi}{2k}}},$$

$$y_1 = 4k^2 a \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \frac{\pi a}{2\left(e^{\frac{\pi}{4k}} + e^{-\frac{\pi}{4k}}\right)}.$$

**475.** Fijemos ahora la atención en los valores de $s$, superiores á $ka$. Tomando como punto inicial de esta parte de la curva el $(x_0, y_0)$; para valor correspondiente de $s$ el $s_0$; y para posición inicial de la tangente una paralela á $Ox$, dedúcese que

$$\varphi = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{R} = \frac{1}{2k}\left[\log\frac{s+ka}{s-ka} - \log\frac{s_0+ka}{s_0-ka}\right].$$

Y para determinar los valores de $x$ é $y$ servirán estas fórmulas:

$$x = \int_0^\varphi \cos\varphi \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi + x_0 \quad \text{é} \quad y = \int_0^\varphi \operatorname{sen}\varphi \frac{ds}{d\varphi}\, d\varphi + y_0.$$

Pero, poniendo $\dfrac{s_0+ka}{s_0-ka} = e^{2h}$, hállase que

$$s = ka\frac{e^{k\varphi+h} + e^{-k\varphi-h}}{e^{k\varphi+h} - e^{-k\varphi-h}};$$

y, por lo tanto,

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{-4ak^2}{(e^{k\varphi+h} - e^{-k\varphi-h})^2}.$$

Luego

$$x = -4ak^2 \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi+h} - e^{-k\varphi-h})^2} + x_0 \quad \text{é}$$

$$y = -4ak^2 \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi+h} - e^{-k\varphi-h})^2} + y_0.$$

Y, como en el caso poco antes examinado, adviértese que esta rama, $AA$, de la curva, aisladamente considerada, no posee *puntos de inflexión* ni *puntos de retroceso* tampoco, pero sí un *punto asintótico,* correspondiente á $s = ka$, alrededor del cual da una infinidad de vueltas. Y asimismo se ve que, cuando $s$ tiende hacia $\infty$, $R$ tiende hacia $-\infty$, y la curva, en consecuencia, á tomar la forma rectilínea.

A los valores de $s$, comprendidos entre $-ka$ y $-\infty$, corresponde una rama de la curva, $A'A'$, igual á la anterior.

Para establecer la continuidad de $s$ hay que suponer empalmadas en los puntos asintóticos las ramas $AA$ y $A'A'$ con la rama única $BOB'$.

## XII

### LA PSEUDOTRACTRIZ

**476.** Con el nombre de *pseudotractrix* se designa la curva cuya ecuación, en coordenadas intrínsecas (Cesàro: *Lezioni di Geometria intrinseca,* 1896, *p.* 18), es como sigue:

$$R = ka\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}};$$

la cual desde luego nos enseña que será $R = 0$ cuando sea $s = 0$; y, por lo tanto, que el origen de las coordenadas es un *punto de retroceso* de la curva á que se refiere.

Apliquemos á esta curva las ecuaciones conocidas

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{R}, \quad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\varphi:$$

representando por $\varphi$ el ángulo de la tangente con el eje de las abscisas, que admitiremos se confunde con la tangente en el punto correspondiente á $s = 0$. Y en este supuesto se deduce, por de pronto, que

$$\varphi = \pm \frac{1}{ka} \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 - e^{-\frac{2s}{a}}}} = \pm \frac{1}{ka} \int_0^s \frac{e^{\frac{s}{a}} ds}{\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}}.$$

Para obtener la integral indicada, póngase $e^{\frac{s}{a}} = t$; y hallaremos este otro resultado:

$$\int \frac{e^{\frac{s}{a}} ds}{\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}} = a \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = a \log (t + \sqrt{t^2 - 1}).$$

Del cual se infiere que

$$\varphi = \pm \frac{1}{k} \log \left( e^{\frac{s}{a}} + \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \right).$$

Además,

$$\frac{dx}{ds} = \cos \left[ \frac{1}{k} \log \left( e^{\frac{s}{a}} + \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \right) \right] \quad \text{y}$$

$$\frac{dy}{ds} = \pm \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{k} \log \left( e^{\frac{s}{a}} + \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \right) \right].$$

De donde resultan para expresiones de las coordenadas $x$ é $y$ las siguientes:

$$x = \int_0^s \cos \varphi \, ds = \int_0^s \cos \left[ \frac{1}{k} \log \left( e^{\frac{s}{a}} + \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \right) \right] ds, \quad \text{é}$$

$$y = \int_0^{is} \operatorname{sen} \varphi \, ds = \pm \int_0^s \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{k} \log \left( e^{\frac{s}{a}} + \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1} \right) \right] ds,$$

tomando el punto correspondiente á $s = 0$ como origen de las mismas.

A las precedentes expresiones de $x$ é $y$ se les puede dar distinta forma.

Integrando por partes, hállase, en efecto, que

$$x = \int_0^{\varphi} \cos\varphi \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = \operatorname{sen}\varphi \frac{ds}{d\varphi} - \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}\varphi \frac{d^2 s}{d\varphi^2} d\varphi, \quad \text{ó}$$

$$y = \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}\varphi \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = \left[ -\cos\varphi \frac{ds}{d\varphi} \right]_0^{\varphi} + \int_0^{\varphi} \cos\varphi \frac{d^2 s}{d\varphi^2} d\varphi.$$

Pero, como $e^{\frac{s}{a}} = \frac{e^{k\varphi} + e^{-k\varphi}}{2}$, y, por lo tanto,

$$s = a \log \frac{e^{k\varphi} + e^{-k\varphi}}{2}, \quad \frac{ds}{d\varphi} = ak \frac{(e^{k\varphi} - e^{-k\varphi})}{e^{k\varphi} + e^{-k\varphi}}, \quad \text{y}$$

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = \frac{4ak^2}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2},$$

teniendo en cuenta que $\frac{ds}{d\varphi} = R$, hállase, finalmente, que

$$x = R \operatorname{sen}\varphi - 4ak^2 \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{sen}\varphi d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2}, \quad \text{ó}$$

$$y = -R\cos\varphi + 4ak^2 \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2};$$

expresiones en las cuales se debe sustituir $\varphi$ por su valor, precedentemente encontrado.

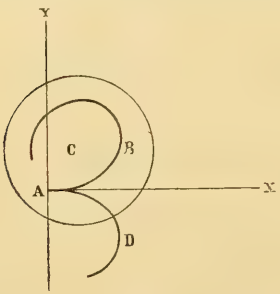


Figura 126.

**477.** De las ecuaciones que acabamos de obtener se deduce fácilmente la forma de la curva. Porque, en primer lugar, vese que á cada valor de $s$ corresponden dos valores de $y$, iguales y de signo contrario, y un solo valor de $x$: luego la curva es simétrica por referencia al eje de las abscisas (fig. 126).

Como las derivadas $\frac{dx}{ds}$ y $\frac{dy}{ds}$ no son simultáneamente nulas, la curva no tiene *puntos de retroceso*, distin-

tos del de este nombre ya considerado. Y como $R$ no puede ser infinito, tampoco los admite *de inflexión*.

La expresión de $\varphi$ muestra que la tangente á la curva forma con el eje de las abscisas un ángulo, que aumenta indefinidamente con $s$.

Y, cuando $s$ se aproxima al $\infty$, $R$ propende á confundirse con $ka$, y la curva, por lo tanto, á confundirse con una circunferencia de radio igual á $ka$.

Conclúyese, pues, que cada rama de la curva da un número infinito de vueltas, dentro de un círculo *asintótico* de la curva, quedando cada vuelta en el exterior de la que inmediatamente le precede.

**478.** Las coordenadas del centro del *círculo asintótico* acabado de considerar pueden obtenerse fácilmente. En efecto, las $x_1$ é $y_1$ del centro del *círculo osculador* de la curva en el punto $s$ tienen por expresión

$$x_1 = x - R\operatorname{sen}\varphi \quad \text{é} \quad y_1 = y + R\cos\varphi.$$

Luego

$$(A)\qquad \begin{cases} x_1 = -4ak^2 \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} & \text{é} \\ y_1 = 4ak^2 \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2}. \end{cases}$$

Y como si $s$ se aproxima indefinidamente á $\infty$, $\varphi$ propende también á confundirse con $\infty$, y los *círculos osculadores* á que nos referimos tienden igualmente á confundirse con los *círculos asintóticos* considerados, las coordenadas de los centros de estos círculos serán

$$x_1 = -4ak^2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = -\frac{\pi a}{2\left(e^{\frac{\pi}{4k}} + e^{-\frac{\pi}{4k}}\right)}, \quad \text{é}$$

$$y_1 = \pm 4ak^2 \int_0^{\infty} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(e^{k\varphi} + e^{-k\varphi})^2} = \pm \frac{\pi a}{e^{\frac{\pi}{2k}} - e^{-\frac{\pi}{2k}}}.$$

De las fórmulas $(A)$ infiérese además otra consecuencia importante; pues, comparándolas con las $(B)$ del Núm. **473**, conclúyese que *la evoluta de la pseudotractrix es una pseudocatenaria.*

# CAPÍTULO NOVENO

## PARÁBOLAS É HIPÉRBOLAS

### I

### DE LAS PARÁBOLAS EN GENERAL

**479.** Aplícase el nombre de *parábolas* á las curvas que tienen por ecuación general la siguiente:

$$y = a^{1-k} x^k, \tag{1}$$

en la cual $k$ representa cualquier número real, *mayor que cero.*

Si $k$ es número irracional, la curva será *transcendente;* y, si racional é igual á $\frac{m}{n}$, *algébrica.* En este último caso será

$$a^{m-n} y^n = x^m. \tag{2}$$

Los primeros geómetras que se ocuparon en el estudio de esta clase de curvas fueron FERMAT *(Oeuvres, t.* II, *p.* 95, y *t.* III, *p.* 169 y 216), y, estimulado por éste, ROBERVAL *( Mémoires de l'Académie de Paris, t.* VI, *p.* 429, 1730), quienes determinaron también sus áreas, y además los volúmenes de los sólidos producidos por su revolución alrededor de los ejes coordenados, los centros de gravedad de estas áreas y sólidos, sus tangentes, etc.; DESCARTES, que, por distinto camino, llegó á los mismos resultados que FERMAT y ROBERVAL, de los cuales dió conocimiento al P. MERSENNE en una de sus cartas *(Lettres de Descartes, ed. in* 4.°, *t.* II, *carta* 89); y WALLIS, que determinó asimismo las áreas por los métodos expuestos en su *Arithmetica Infinitorum:* etc., etc.

**480.** La forma de cualquiera de las parábolas por los mencionados geómetras estudiada se obtiene por medio de las ecuaciones

$$y = a^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m}{n}},\ y' = \frac{m}{n} a^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m}{n}-1} \text{ é } y'' = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{n} a^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m}{n}-2},$$

y depende de los valores de $m$ y $n$, los cuales puede suponerse, sin restringir la cuestión, que satisfacen á la condición de ser $m > n$.

Si $m$ es un número impar y $n$ par, la curva se compone (fig. 127) de dos ramas infinitas, simétricamente dispuestas relativamente al eje de las abscisas, al cual son tangentes, y que se extienden indefinidamente en el sentido de las abscisas positivas. El origen $O$ será entonces un *punto de retroceso* de la curva, desprovista de *puntos de inflexión* á distancia finita.

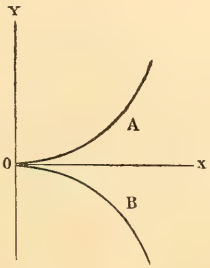


Figura 127.

Si $m$ es par y $n$ impar, la curva tiene la misma forma general que la parábola cónica.

Y si $m$ y $n$ son impares, la curva posee dos ramas infinitas iguales, tangentes (fig. 128) al eje de las abscisas en el origen, donde la curva presentará una inflexión.

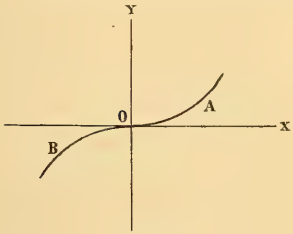


Figura 128.

En el caso de las parábolas transcendentes se ve del mismo modo que la curva consta de una rama única, la cual parte del origen de las coordenadas, donde es tangente á uno de los ejes, y se extiende indefinidamente en el sentido de las abscisas y de las ordenadas positivas.

481. La ecuación de las tangentes á las parábolas $y = a^{1-k} x^k$ es

$$Y - y = k a^{1-k} x^{k-1} (X - x).$$

De la cual, poniendo $X = 0$, se deduce para expresión de la ordenada del punto, donde cada tangente corta el eje de las ordenadas,

$$Y = (1 - k)\, y,$$

que proporciona un medio fácil de construir las tangentes á las curvas consideradas.

**482.** El radio de curvatura de la curva $y = a^{1-k} x^k$ se desprende de la fórmula

$$R = \frac{(x^2 + k^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{k(k-1)xy}.$$

**483.** El área, $A$, limitada por un arco de parábola, por el eje de las abscisas, y por una paralela al de las ordenadas, trazada por el punto $(x_1, y_1)$, tiene por expresión la siguiente:

$$A = a^{1-k} \int_0^{x_1} x^k \, dx = \frac{x_1 y_1}{k+1},$$

y *es igual á la fracción* $\frac{1}{k+1}$ *del área del rectángulo, cuyos lados son iguales á* $x_1$ *é* $y_1$.

**484.** El volumen del sólido de revolución, engendrado por el área que acabamos de considerar, cuando gira alrededor del eje de las abscisas, se halla determinado por la fórmula

$$V = \pi \int_0^{x_1} y^2 \, dx = \pi \frac{y_1^2 x_1}{2k+1}.$$

Y el del sólido, de revolución también, engendrado por el área limitada por un arco de la parábola, por el eje de las ordenadas, y por la perpendicular á este eje trazada por el punto $(x_1, y_1)$, girando alrededor del mismo eje, por esta otra:

$$V_1 = \pi \int_0^{y_1} x^2 \, dy = \frac{k}{k+2} x_1^2 y_1.$$

**485.** La longitud de los arcos de las curvas de que tratamos, comprendida entre el punto $(x_1, y_1)$ y el origen de las coordenadas, depende de la integral binomia

$$s = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + k^2 a^{2(1-k)} x^{2(k-1)}} \, . \, dx.$$

que solamente puede expresarse por funciones elementales cuando sea entero uno de los números

$$\frac{1}{2\,(k-1)} \quad \text{ó} \quad \frac{k}{2\,(k-1)}.$$

**486.** Escribiendo la ecuación de las tangentes á las curvas (2) del siguiente modo:

$$Y = \frac{m}{n}\, y x^{-1} X + \frac{n-m}{n}\, y,$$

y comparando esta ecuación con la expresada en coordenadas tangenciales

$$uY + vX - 1 = 0,$$

hállase que

$$x = -\frac{m}{(n-m)\,v} \quad \text{é} \quad y = \frac{n}{(n-m)\,u}.$$

Y, sustituyendo estos valores de $x$ é $y$ en la ecuación cartesiana de la curva, resulta *la ecuación tangencial de las parábolas algébricas*

$$a^{m-n}\, v^m = (-1)^m \frac{m^m}{n^n}\, (n-m)^{n-m}\, u^n.$$

Lo cual enseña que *la clase de las parábolas algébricas es igual al orden de las mismas curvas.*

## II

### LA PARÁBOLA SEMICÚBICA

**487.** Poniendo en la ecuación general de las parábolas algébricas $m = 3$ y $n = 2$, hállase la ecuación particular

$$a y^2 = x^3,$$

que representa una curva, denominada *parábola semicúbica*, y también, muchas veces, *parábola de Neil*, en memoria del geómetra que primero la rectificó.

488. De los resultados obtenidos anteriormente, por referencia á las parábolas de cualquier orden, despréndense inmediatamente los en particular aplicables á la parábola semicúbica, entre los cuales es el más notable el correspondiente á la rectificación de la curva.

Representando por $s$ la longitud del arco, comprendido entre el origen de las coordenadas y el punto $(x_1, y_1)$, hállase, en efecto, inmediatamente que

$$s = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \frac{9}{4a}\, x}\, dx = \frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}\cdot\frac{x_1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right];$$

con lo cual queda demostrado que *la parábola semicúbica es rectificable algébricamente.*

A tan interesante resultado, como primer caso de rectificación algébrica de una curva, llegó antes que otro alguno el geómetra inglés Neil, ya mencionado, por un método que es consecuencia inmediata de las doctrinas publicadas por Wallis en su *Arithmetica Infinitorum;* y después el geómetra holandés Van-Houraet, por distinto procedimiento, que le permitió asimismo rectificar otras curvas. (Montucla: *Histoire des Mathématiques, t.* II, *p.* 151).

489. *La parábola semicúbica es la evoluta de la parábola cónica:* representada por la ecuación $y^2 = 2px$, y cuya evoluta, según es fácil determinar, tiene á su vez por ecuación la siguiente:

$$Y^2 = \frac{8}{27p}(X - p)^3,$$

que corresponde, en efecto, á una parábola semicúbica, de eje coincidente con el de la cónica, y un punto de retroceso en $(p, 0)$: conforme descubrió Huygens y lo consignó en su *Horologium oscillatorium (Opera varia, t.* I, *p.* 99).

490. La parábola semicúbica figura en la interesante cuestión de Mecánica propuesta por Leibnitz en 1687, donde se pide la curva que debe recorrer un grave para que se aleje uniformemente de un plano horizontal. Problema resuelto muy poco tiempo después por el mismo Huygens, y del cual dió también Leibnitz una solución que publicó en 1689 en las *Acta*

*Eruditorum.* Por esta tan curiosa propiedad, la parábola semicúbica fué calificada de isócrona.

**491.** La evoluta de la parábola semicúbica, ó segunda evoluta de la cónica, tiene por ecuación á su vez (SALMON: *Higher plane Curves, 2.ª ed., núm. 99)*, la siguiente:

$$a\,(a - 18x)^3 = \left(54ax + \frac{729}{16}\,y^2 + a^2\right)^2.$$

## III

### LA PARÁBOLA CÚBICA

**492.** Pongamos ahora en la ecuación general de las parábolas algébricas $m = 3$ y $n = 1$, y hallaremos la correspondiente á la *parábola cúbica*

$$a^2\,y = x^3,$$

denominada también por algunos geómetras *parábola de Wallis.*

**493.** De los resultados generales obtenidos anteriormente, tratándose de las parábolas de orden cualquiera, se deducen los aplicables al caso de la parábola cúbica, entre los cuales nos detendremos aquí, un momento solamente, en el estudio del relativo á la rectificación de la curva.

Sea $s$ la longitud de un arco de la misma, comprendido entre el origen de las coordenadas y el punto $(x_1, y_1)$, determinado por la expresión

$$s = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + 9\,\frac{x^4}{a^4}}\,dx,$$

de la cual, suponiendo que $x^2 = t$, se deduce la siguiente:

$$s = \frac{a^2}{6}\int_0^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{t\left(t^2 + \dfrac{a^4}{9}\right)}} + \frac{3}{2a^2}\int_0^{t_1} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t\left(t^2 + \dfrac{a^4}{9}\right)}}.$$

Ó, por ser

$$\int \frac{3t^2\,dt}{\sqrt{t\left(t^2+\frac{a^4}{9}\right)}} = 2\sqrt{t\left(t^2+\frac{a^4}{9}\right)} - \frac{a^4}{9}\int \frac{dt}{\sqrt{t\left(t^2+\frac{a^4}{9}\right)}},$$

esta otra:

$$s = \frac{1}{a^2}\sqrt{t\left(t^2+\frac{a^4}{9}\right)} + \frac{2a^2}{9}\int_0^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{4t\left(t^2+\frac{a^4}{9}\right)}},$$

que comprende una sola integral elíptica de primera especie, reducida á la forma normal adoptada por WEIERSTRASS.

## IV

### DE LAS HIPÉRBOLAS EN GENERAL

**494.** Llámanse *hipérbolas* las curvas comprendidas en la ecuación

$$y = a^{1+k}\,x^{-k}, \quad (k > 0):$$

*transcendentes*, cuando $k$ es irracional, y, si racional, *algébricas*. En este segundo caso, poniendo por $k$ la fracción $\frac{m}{n}$, en la cual $m$ y $n$ representan números enteros, la ecuación anterior se convierte en la que sigue:

$$x^m\,y^n = a^{m+n}.$$

**495.** Para hallar la forma de estas curvas basta atender á las igualdades

$$y = a^{\frac{m+n}{n}}\,x^{-\frac{m}{n}}, \quad y' = -\frac{m}{n}\,a^{\frac{m+n}{n}}\,x^{-\frac{m}{n}-1}, \quad \text{é}$$

$$y'' = \frac{m}{n}\,\frac{m+n}{n}\,a^{\frac{m+n}{n}}\,x^{-\frac{m}{n}-2}.$$

Si $m$ es número impar y $n$ par, la curva tiene la forma indicada en la figura 129: simétrica relativamente al eje de las abscisas, y con dos ramas infinitas, desprovistas de *puntos de inflexión*, y con los ejes coordenados por *asíntotas*.

Si $m$ es par y $n$ impar, también tiene la curva dos ramas de la misma forma que en el caso anterior, aunque dispuestas de distinto modo: una á cada lado del eje de las ordenadas, el cual resulta ser entonces eje de simetría de la curva.

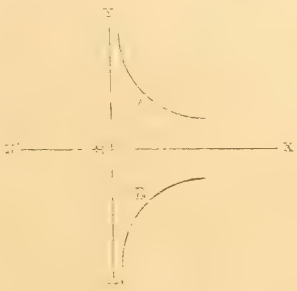


Figura 129.

Y, si $m$ y $n$ son impares, la curva se compone de dos ramas iguales, colocadas una en el ángulo $yOx$ de los ejes, y la otra en el inferior, $y'Ox'$, opuesto por el vértice al primero.

Cuando $k$ sea irracional, la curva constará solamente de una rama, situada en el ángulo $yOx$ de los ejes de las coordenadas, asíntotas ambos de la curva.

**496.** Comparando la ecuación de las parábolas con la de las hipérbolas, adviértese que se pasa de una á otra por el simple cambio de $k$ en $-k$. Luego de las fórmulas obtenidas, por referencia á las parábolas, se deducirán las correspondientes al caso de las hipérbolas, efectuando en ellas la misma mutación.

Así, la ordenada del punto en que una tangente á cualquier hipérbola corta el eje de las ordenadas, se hallará expresada por la fórmula

$$Y = (1 + k)\, y.$$

El radio de curvatura de la misma hipérbola por

$$R = \frac{(x^2 + k^2 y^2)^{\frac{3}{2}}}{k(k+1)xy}.$$

El área, limitada por un arco de la curva, por el eje de las abscisas, y

por las paralelas al eje de las ordenadas, que pasan por los puntos $(x_0, y_0)$ y $(x_1, y_1)$, por esta otra:

$$A = \frac{x_1 y_1 - x_0 y_0}{1 - k}.$$

El volumen engendrado por el área precedente, cuando gira alrededor del eje de las abscisas, por la siguiente:

$$V = \pi \frac{y_1^2 x_1 - y_0^2 x_0}{1 - 2k}.$$

El, parecidamente, engendrado por el área, limitada por la curva, por el eje de las ordenadas, y por dos paralelas al eje de las abscisas, en su movimiento de revolución alrededor del eje de las ordenadas, conforme á continuación se indica:

$$V_1 = \frac{k\pi}{k - 2} (x_1^2 y_1 - x_0^2 y_0).$$

Y la longitud del arco de la curva, comprendido entre los puntos $(x_0, y_0)$ é $(x_1, y_1)$, por la integral

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + k^2 a^{2(1+k)} x^{-2(1+k)}}\, dx.$$

Así como la ecuación tangencial de las hipérbolas algébricas se halla representada por la ecuación

$$(m + n)^{m+n} a^{m+n} u^n v^m = n^n m^m,$$

la cual muestra que *la clase de las curvas á que se refiere es igual á su orden.*

**497.** Los geómetras que primeramente se ocuparon en el estudio de las hipérbolas, de cualquier orden, fueron también WALLIS, que determinó las áreas, en su *Arithmetica infinitorum*, y FERMAT, que resolvió la misma cuestión en su trabajo *Sur la transformation et la simplification des*

*lieux etc. (Oeuvres, t.* III, *p.* 216), donde el mismo eminente geómetra manifiesta (*p.* 224) haber presentado á los matemáticos, sus contemporáneos, otro método para trazar tangentes á estas curvas, y para determinar sus centros de gravedad.

A todo lo cual debemos agregar que en dos cartas, dirigidas á DIGBY por FERMAT *(Oeuvres,* t. II, p. 338 y 377), se demuestra que este geómetra había ya tratado de las curvas á que ahora nos referimos con prioridad á la publicación de la célebre obra de WALLIS, anteriormente citada.

# CAPÍTULO DÉCIMO

## CURVAS CICLOIDALES

### I

### LA CICLOIDE ORDINARIA

498. Llámase *cicloide* la curva engendrada por un punto cualquiera, $M$ (fig. 130), de una circunferencia $MG...\ Q...$, que rueda sobre una recta de longitud indefinida $OEB...$ sin resbalar, ó de manera que en cada posición de la circunferencia la distancia $OQ$ del origen $O$ de las coordenadas, y

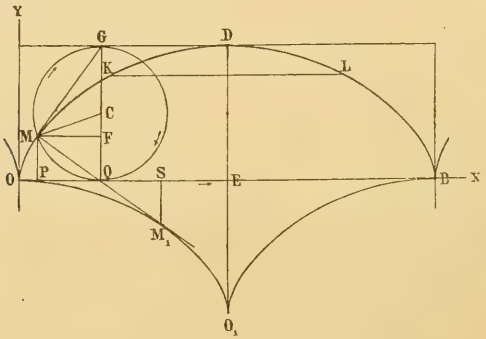



Figura 130.

origen también del movimiento, al punto $Q$, de contacto de la circunferencia con la recta $OB$, sea igual á la longitud del arco $MQ$.

De esta definición inmediatamente se concluye que la cicloide ha de componerse de una serie, ó sucesión continua, de arcos, iguales al $ODB$; que la *base*, $OB$, de cada uno será igual á la longitud de la circunferencia generadora; que todos ellos poseerán un eje de simetría, como $DE$, per-

pendicular á la *base OB;* y que sus extremidades, *O* y *B*, corresponderán á otros tantos *puntos de retroceso* de la curva.

499. Fijando la atención en el movimiento de las ruedas de un carruaje, ocurrióle al P. MERSENNE, por los años 1615, proponer á los geómetras de su tiempo el estudio de las propiedades de la curva en los renglones anteriores definida, y á la cual fué por PASCAL aplicado el nombre de *ruleta:* curva que, como más tarde advirtió WALLIS, en carta dirigida á LEIBNITZ, había ya sido figurada con exactitud por el Cardenal CUSA, en un manuscrito que lleva la fecha de 1454. Pero transcurrieron aún algunos años más, antes de que á tan interesante estudio diera en algún punto solución satisfactoria el ilustre ROBERVAL, determinando el área limitada por el arco *ODB* y por la recta *OB*, que demostró ser igual al triplo del área del círculo generador. (MERSENNE, *Harmonie universelle*, t. II; y ROBERVAL, *Mémoires de la Académie, Paris*, t. VI, 1730, página 311). Proposición celebrada y divulgada por el mismo MERSENNE, y de la cual discurrieron en breve nuevas demostraciones DESCARTES y FERMAT.

Otro resultado, de verdadera importancia en la teoría de la curva, fué el obtenido por DESCARTES, quien asimismo logró demostrar que la *normal* á la cicloide, en un punto cualquiera de la curva, pasa también por aquel otro punto donde el círculo generador toca á la recta sobre la cual rueda. Propiedad, conforme el gran geómetra igualmente demostró, extensiva á todas las curvas engendradas por el movimiento de un punto, ligado invariablemente con una curva, que rueda sobre otra. El resultado á que acabamos de referirnos fué comunicado por DESCARTES á MERSENNE en una carta que le escribió concerniente á la teoría de la cicloide, en 23 de Agosto de 1638.

Otros procedimientos para determinar las tangentes y normales á la cicloide fueron ideados más tarde por FERMAT *(Oeuvres*, t. III, p. 144), y por ROBERVAL (*l. c.*, p. 76). Y, continuando este último geómetra después sus investigaciones sobre esta curva (á la cual llamó *trocoide)*, determinó el volumen del sólido, engendrado por *ODB*, cuando gira alrededor de *OB* ó alrededor de *DE;* y el centro de gravedad de su área; etc. (PASCAL, *Histoire de la roulette: Oeuvres, ed. Hachette*, t. III, 1889, p. 337; y ROBERVAL, *Traité des indivisibles, Mémoires de l'Académie, Paris*, t. VI, 1730).

Tras de Roberval y Descartes contribuyeron eficazmente al progreso de la teoría de la cicloide Wren, que rectificó la curva (Pascal, *l. c.*), y Pascal, que resolvió una serie de cuestiones referentes á los centros de gravedad de sus arcos, y á los de los sólidos que engendrá por su revolución alrededor de la base ó del eje; á las dimensiones de las superficies de estos sólidos, y á los centros de gravedad de estas mismas superficies: etc. Cuestiones previamente propuestas por Pascal á los geómetras contemporáneos suyos, y que fueron en parte resueltas, por el mismo Wren la relativa á los *centros de gravedad de los arcos* de la curva, y la referente á las dimensiones de las *superficies de sus sólidos de revolución* por Fermat. Pero, habiendo quedado por resolver las demás, decidióse él á publicar las suyas, en carta á Carcavi *(Oeuvres*, t. III, 1889, p. 304), y en su *Traité général de la Roulette* (*l. c.*, p. 431).

Nuevas é importantes propiedades de la cicloide fueron posteriormente descubiertas por Huygens *(Oeuvres complètes, publiées par la Société hollandaise des Sciences*, t. I, p. 817; y *De horollogio oscillatorio)*, que extendió á ella su *teoría de las evolutas* y descubrió el papel importante que la misma curva representa en la *Teoría Mecánica del Péndulo;* y por Juan Bernoulli, que también la encontró en un problema célebre, relativo al descenso de los *graves. (Acta Eruditorum,* 1696 y 1697.)

**500.** Para hallar la ecuación de la cicloide, sea $M$ un punto de la curva; $C$ la posición correspondiente del centro del círculo generador; $r$ el radio de este círculo; $O$ el punto de partida de $M$; $MF$ una paralela á $OB$; y $t$ el ángulo $MCQ$. Tomando el punto $O$ por origen de las coordenadas y la recta fija, $OB$, por eje de las abscisas; y advirtiendo que, por definición, $OQ = \text{arc } MQ = rt$, hallaremos desde luego estas ecuaciones

$$x = r(t - \operatorname{sen} t) \quad \text{é} \quad y = r(1 - \cos t):$$

las cuales determinan las coordenadas $x$ é $y$ de los puntos de la curva, en función de otra tercera variable independiente, $t$. Y eliminando $t$ entre estas ecuaciones, puede obtenerse la ecuación cartesiana buscada. Pero, sin necesidad de esto, y con mucha sencillez, se deducen las propiedades de la curva de los antecedentes sentados, conforme vamos á ver ahora.

**501.** La ecuación de la normal á la cicloide es

$$\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dx}{dt}(X-x)=0,$$

donde

$$\frac{dx}{dt}=r(1-\cos t), \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}=r\operatorname{sen} t.$$

Para hallar su intersección con el eje de las abscisas, póngase $Y=0$, y resultará

$$X=x+r\operatorname{sen} t=OQ.$$

Luego *la normal á la cicloide en un punto dado pasa por el punto donde el círculo generador correspondiente toca á la recta sobre que rueda* (DESCARTES).

**502.** La longitud de la normal se deduce de la expresión

$$N=r\sqrt{2(1-\cos t)}=2r\operatorname{sen}\frac{t}{2}.$$

Y, determinando el radio de curvatura por medio de la fórmula

$$R=\frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}},$$

hállase que

$$R=2r\sqrt{2(1-\cos t)}=2N.$$

De manera que *el radio de curvatura resulta igual al duplo de la longitud de la normal* (HUYGENS).

Tomando, pues, sobre la normal $MQ$ la longitud $QM_1$, igual á $MQ$, $M_1$ será el centro de curvatura de la curva, correspondiente al punto $M$. Y trazando la recta $M_1S$, perpendicular á $OB$, por ser $M_1S=MP$, y $OS=OQ+PQ$, conclúyese que las coordenadas $(x_1, y_1)$ del centro de curvatura, $M_1$, podrán determinarse por las fórmulas

$$x_1=r(t+\operatorname{sen} t) \quad \text{é} \quad y_1=r(-1+\cos t):$$

de las cuales, por eliminación de $t$, se desprende la ecuación de la evoluta.

Como $t$ es variable independiente, no hay dificultad en sustituir en estas ecuaciones, sin alterar la naturaleza de la curva que representan, $t+\pi$ en vez de $t$, y así resultará

$$x_1 = r(t+\pi - \operatorname{sen} t) \quad \text{é} \quad y = r(-1 - \cos t);$$

ó, trasladando el origen de las coordenadas al punto $O_1$, cuyas coordenadas son $\pi r - 2r$ y

$$x_1 = r(t - \operatorname{sen} t) \quad \text{é} \quad y_1 = r(1 - \cos t).$$

Por medio de estas ecuaciones vese, pues, que *la evoluta de la cicloide es otra cicloide igual á la primera, en la cual el punto $O_1$ representa un punto de retroceso, y los $O$ y $B$ los vértices de dos de sus arcos consecutivos* (HUYGENS).

503. Para hallar la longitud del arco de la cicloide, comprendido entre los puntos correspondientes á $t = t_0$ y $t = t_1$, nos valdremos de la fórmula

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = 4r\left(\cos\frac{t_0}{2} - \cos\frac{t_1}{2}\right).$$

De la cual, poniendo $t_1 = \pi$, se concluye que la longitud del arco $DM$ resulta dada por la igualdad

$$s = 4r \cos\frac{1}{2} t_0;$$

ó, advirtiendo que $MG = 2r\cos\dfrac{1}{2}t_0$, $s = 2MG$.

Luego *la longitud del arco $DM$ de la cicloide será igual al duplo de la cuerda $MG$* (HUYGENS: *Oeuvres*, t. II, p. 343).

Y, poniendo $t_0 = 0$ y $t_1 = 2\pi$, $s = 8r$: de manera que *la longitud de un arco completo de la cicloide resulta igual á ocho veces el radio del círculo generador* (WREN).

**504.** El área, $S$, de la porción $MOP$ de la cicloide tiene por expresión la siguiente:

$$S = r^2 \int_0^t (1 - \cos t)^2 \, dt = r^2 \left[ \frac{3}{2} t - 2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right].$$

De la cual se deduce que el área $ODB$, comprendida entre la base y un arco completo de la curva, designado por las mismas letras, *es igual á tres veces el área del círculo generador* (ROBERVAL).

**505.** Representando por $V$ el volumen del sólido, engendrado por la cicloide, cuando ésta gira alrededor de su base, ó

$$V = \pi \int_0^{2\pi r} y^2 \, dx = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \, dt = 5\pi^2 r^3,$$

y por $V_1$ el del cilindro circunscrito á este sólido, ó

$$V_1 = 8\pi^2 r^3,$$

conclúyese *que la razón de $V$ á $V_1$ es igual á la de 5 á 8*, conforme ROBERVAL encontró.

**506.** Tomando el punto $D$ por origen de las coordenadas, y las rectas $DE$ y $DG$ por ejes, para lo cual basta poner $\pi r - x$ en vez de $x$, y $2r - y$ en lugar de $y$, hállanse las ecuaciones

$$x = (\pi - t)\, r + r \operatorname{sen} t, \quad y = r\,(1 + \cos t).$$

Y el área $KDL$ se determinará luego por medio de la fórmula

$$A_1 = -r^2 \int_\pi^t [(\pi - t) + \operatorname{sen} t] \operatorname{sen} t \, dt$$

$$= r^2 \left[ (\pi - t) \left( \cos t + \frac{1}{2} \right) + \operatorname{sen} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right].$$

Fórmula de la cual se deduce que $A_1$ será independiente de $\pi$ cuando sea

$$\cos t + \frac{1}{2} = 0,$$

y, en consecuencia,

$$t = \frac{5}{6}\pi \quad \text{é} \quad y = \frac{1}{2}r:$$

reduciéndose entonces la expresión de $A_1$ á la siguiente:

$$A_1 = \frac{3}{8}\sqrt{3}\,r^2$$

Y asimismo se concluye de los antecedentes expuestos que el área de la figura, limitada por el arco $KDL$ y su cuerda, $KL$, es igual á la mitad del área del *exágono regular, inscripto en el círculo generador de la cicloide, cuando KL divide á DE en dos segmentos, uno con otro, en la relación de 1 á 4.* Resultado interesante este último descubierto por HUYGENS *(Oeuvres,* t. II, p. 201).

**507.** El valor de la superficie del sólido, engendrado por la cicloide, cuando ésta gira alrededor de la base, se halla expresado por la fórmula

$$U = 2\pi \int_0^{2\pi} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= 4\pi r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\, \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = \frac{64}{3}\,\pi^2 r^2.$$

Luego *el valor de la superficie considerada es igual á* $\frac{64}{3}$ *del área del círculo generador* (PASCAL y FERMAT).

**508.** Cuando el círculo generador de la cicloide se mueve, el punto $F$ describe una curva, en la que fijó también su atención ROBERVAL *(Mémoires de l'Académie, Paris,* t. VI, 1730), denominándola *compañera de la cicloide,* y cuya forma es bien fácil deducir.

Representando por $x_1$ é $y_1$ las coordenadas del punto $F$, encuéntrase, en efecto, por de pronto, que

$$x_1 = rt \quad \text{é} \quad y_1 = r(1 - \cos t);$$

y, en consecuencia,

$$y_1 = r\left(1 - \cos\frac{x_1}{r}\right);$$

ó, poniendo $r - y_1 = y_2$, y $x_1 = \frac{\pi r}{2} - x_2$,

$$y_2 = \operatorname{sen}\frac{x_2}{r}.$$

Luego la curva buscada es una *sinusoide*, á la cual WALLIS, que también la estudió, aplicó el nombre de *curva de los senos versos*.

**509.** Terminaremos cuanto respecto á la cicloide consideramos pertinente decir en este lugar, mencionando las dos propiedades siguientes, que prestan á la curva gran importancia en algunos interesantes problemas de *Dinámica*.

1.ª *La cicloide es la curva que debe describir la extremidad libre de un péndulo para que el tiempo de cada una de las oscilaciones de éste sea independiente de la amplitud de las mismas.*

Propiedad descubierta por HUYGENS, quien procuró utilizarla en la construcción de un péndulo *isócrono*, fundándose para ello, además, en la teoría de las evolutas, inserta en su obra admirable titulada *De horollogio oscillatorio (Opera varia*, t. I, p. 29).

2.ª *La cicloide es también la curva que debe recorrer un móvil, sujeto solamente á la fuerza de gravedad, para caer de un punto dado á otro, también dado, en el mínimo tiempo posible.*

Problema propuesto por JUAN BERNOULLI en las *Acta Eruditorum* de 1696 (p. 269), y cuya solución fué dada por el mismo geómetra en el volumen de las *Acta*, correspondiente á 1697, y también, en distintos términos, con fecha muy poco posterior, por su hermano JACOBO. Más tarde ocupáronse también en el mismo asunto EULER *(Methodus inveniendi lineas curvas maximi minive proprietates gaudentes*, 1744, núm. 34; y LAGRANGE, que aplicó á la resolución del problema su *Método de las Variaciones (Oeuvres*, t. II, p. 58; t. X, p. 440).

## II

### CICLOIDES CONTRAÍDAS Y DILATADAS

**510.** Cuando una circunferencia rueda sin resbalar sobre una recta fija, los puntos del círculo que limita, *interiores* á ella, engendran curvas denominadas *cicloides contraídas*, y los *exteriores* otras curvas, á las cuales se aplica el nombre de *cicloides dilatadas*.

De ambas especies de cicloides trató por vez primera DESCARTES en su correspondencia epistolar con el P. MERSENNE, determinando las formas generales de unas y otras y el trazado de sus tangentes, y demostrando que las *contraídas* poseen *puntos de inflexión*, que enseñó asimismo á construir. Posteriormente ocupáronse también en su estudio PASCAL, quien manifestó, en carta dirigida á HUYGENS (*Oeuvres, ed. Hachette*, t. III, p. 439), que su rectificación dependía de la rectificación de la elipse; y ROBERVAL, que determinó sus áreas: etc., etc.

**511.** Procediendo como en el caso de la ordinaria, es fácil hallar las ecuaciones de estas otras dos variedades de cicloides.

Tanto en el caso de las *contraídas* como en el de las *dilatadas*, estas ecuaciones serán las siguientes:

$$x = rt - a \operatorname{sen} t \quad \text{é} \quad y = r - a \cos t,$$

si por $r$ se representa el radio del círculo generador; por $a$ la distancia ($< \acute{o} > $ que $r$) del punto, generador también, de una cualquiera de aquellas curvas, en particular, al centro del mismo círculo; y por $t$ el ángulo de las rectas que unen este centro con el punto de la curva engendrada, correspondiente á determinada posición del círculo móvil, y al punto en que éste toca á la recta sobre la cual rueda.

**512.** Para determinar la forma de la curva resultante, advirtamos, en primer lugar, que en ambos casos la curva ha de componerse de una sucesión indefinida de arcos iguales; y que, por lo tanto, bastará para estudiarla fijarse en la forma correspondiente á uno de estos arcos, definido por los valores de $t$, comprendidos entre 0 y $2\pi$. Y, en segundo lugar, que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{a \operatorname{sen} t}{r - a \cos t}, \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} = \frac{a(r \cos t - a)}{(r - a \cos t)^3}.$$

Esto sentado, consideremos separadamente los dos casos, de las cicloides *contraídas* y de las *dilatadas*.

*Primero,*—Sea $a < r$.

A $t = 0$ corresponde un punto $A$ (fig. 131), cuya ordenada, positiva é igual á $r - a$, es *mínima*, por ser también en aquel punto $y' = 0$. Y á

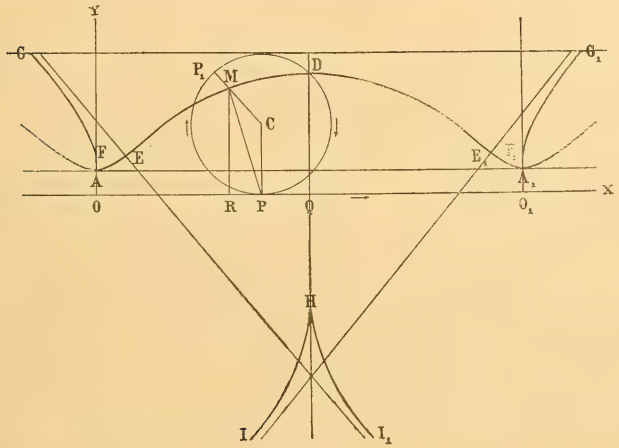



Figura 131.

$t = \pi$ otro punto, $D$, cuya abscisa es igual á $\pi r$, y la ordenada, *máxima* ahora, igual á $r + a$. Siendo facilísimo igualmente cerciorarse de que la curva es simétrica, relativamente á $DQ$.

Además, la derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ es nula cuando $r \cos t = a$. Luego á los valores de $t$, determinados por esta ecuación, corresponden *dos puntos de inflexión*, $E$ y $E'$, de la curva (DESCARTES).

*Segundo.*—Supongamos ahora que $a > r$.

A $t = 0$ corresponderá en este caso un punto, $A$ (fig. 132), cuya ordenada, negativa é igual á $r - a$, debe también considerarse como *míni-*

*ma.* Y á $t = \pi$, otro punto, $D$, cuya ordenada, igual á $r + a$, es *máxima.* Resultando también simétrica la curva por referencia á la recta $DQ$.

La ecuación $r \cos t = a$ produce para $t$ valores *imaginarios:* luego en este caso la curva carece de *puntos de inflexión.*

Y, por ser $\frac{dy}{dx} = \infty$ cuando $r = a \cos t$, é $y = 0$ entonces, conclúyese que las tangentes á la curva, en los puntos de intersección de ésta con el eje de las abscisas, son perpendiculares al mismo eje.

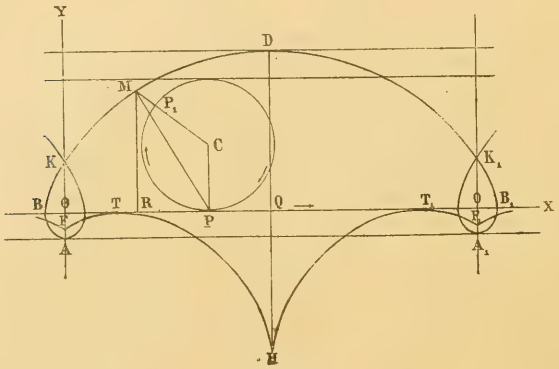



Figura 132.

**513.** Tanto en el caso de las cicloides *contraídas* como en el de las *dilatadas,* la ecuación de la normal en el punto $(x, y)$ es la que sigue:

$$Y - y = -\frac{r - a\cos t}{a \operatorname{sen} t}(X - x):$$

de la cual, cuando sea $Y = 0$, se desprende que

$$X = x + y\frac{a \operatorname{sen} t}{r - a\cos t} = x + a \operatorname{sen} t = OP.$$

Luego *la normal á la curva en el punto M corta á la recta fija en el punto en que el círculo de radio r, á que se refiere la definición de la curva, toca á la misma recta* (DESCARTES).

De la ecuación general

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'\,y'' - y'\,x''}$$

dedúcese que el radio de curvatura de las cicloides tiene por expresión

$$R = \frac{(r^2 + a^2 - 2ar\cos t)^{\frac{3}{2}}}{a\,(r\cos t - a)}.$$

Luego, en el punto $A$, $R$ será igual á $\frac{(r-a)^2}{a}$, y, en el $D$, igual á $\frac{(r+a)^2}{a}$.

Por medio de las fórmulas del Cálculo Diferencial, adecuadas al objeto, hállase que las coordenadas $x_1$ é $y_1$ del punto de la evoluta, que corresponde al $(x, y)$, serán éstas:

$$x_1 = r\left(t - \frac{r - a\cos t}{r\cos t - a}\operatorname{sen} t\right) \quad \text{é} \quad y_1 = \frac{r\,(r - a\cos t)^2}{a\,(r\cos t - a)}.$$

En el caso de ser $a < r$, la evoluta del arco $AD$ de la cicloide (fig. 131) se compone de dos ramas: una, $FG$, que pasa por el punto $F$, determinado por la igualdad

$$AF = \frac{(r-a)^2}{a},$$

y de la cual es asíntota la normal á la curva en el punto de inflexión $E$; y otra, $HI_1$, por el $H$, donde se verifica que

$$HD = \frac{(r+a)^2}{a},$$

y de la cual es también asíntota la misma normal.

Y si es $a > r$, la evoluta $HTF$ del arco $ABKD$ pasará por los puntos $H$, $T$ y $F$ (fig. 132), situado el primero sobre la recta, prolongada, $DQ$; el segundo sobre el eje de las abscisas; y el tercero sobre el de las ordena-

das $Oy$: recta y ejes tangentes á la evoluta en los tres mencionados puntos, conforme manifiesta la figura. (Dieu: *Nouvelles Annales des Mathématiques*, t. xi, p. 131).

**514.** Para rectificar las cicloides consideradas, basta advertir que

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos t}\, dt.$$

Ó, poniendo $t = \pi + 2\theta$,

$$ds = 2(r + a)\sqrt{1 - \frac{4ar}{(r+a)^2}\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta.$$

Luego *la rectificación de los arcos de la curva de que se trata depende de la rectificación de otros arcos de una elipse* (Pascal); *ó*, como la precedente fórmula enseña, *del cálculo de una integral elíptica de segunda especie.*

**515.** Para encontrar el área limitada por la cicloide y por una paralela al eje de las abscisas, transportemos el origen de las coordenadas al punto $D$, cambiando para ello $x$ en $\pi r - x$, é $y$ en $r + a - y$; y así resultará que

$$x = r(\pi - t) + a\operatorname{sen} t \quad \text{é} \quad y = a(1 + \cos t).$$

Luego

$$A = 2\int_0^x x\,dy = 2a\left[(\pi - t)\left(r\cos t + \frac{a}{2}\right) + r\operatorname{sen} t + \frac{a}{4}\operatorname{sen} 2t\right].$$

Y, si $t = 0$, hallaremos finalmente para expresión del área, limitada por la curva y por la recta $AA'$, la siguiente:

$$A = 2\pi a\left(r + \frac{a}{2}\right).$$

## III

### EPICICLOIDES E HIPOCICLOIDES

516. Desígnase con el nombre de *epicicloide* la curva engendrada por un punto cualquiera de una circunferencia, cuando ésta rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija, situada á distinto lado que la primera de su común tangente.

La más remota mención de las *epicicloides* encuéntrase en una obra del célebre pintor y grabador alemán ALBERTO DURERO, que floreció entre los siglos XV y XVI, publicada en 1606, con el título de *Institutionum geometricarum libri quatuor...*

Muchos años después, en 1674, por resultado de sus investigaciones sobre las mejores formas de los *engranajes* de unas ruedas dentadas con otras, para obtener determinados fines de transmisión de movimientos, el astrónomo dinamarqués OLAUS ROEMER encontró las mismas curvas, según afirma LEIBNITZ en dos de sus cartas, dirigidas á JUAN BERNOULLI. Y, á partir de esta fecha, fijaron su poderosa atención en el minucioso análisis de las propiedades de las mismas curvas NEWTON *(Principia Mathematica,* lib. I, prop. 49), que logró rectificarlas; JUAN BERNOULLI *(Opera Omnia,* t. III, p. 449-463), quien determinó sus áreas y sus evolutas por medio del *Cálculo Diferencial;* LA HIRE, en las *Mémoires de Mathématiques et de Physique de l'Académie des Sciences de Paris,* 1694; EULER *(Nova Acta Petropolitanæ, pars prior,* 1781, p. 48), que descubrió su doble generación; etc.

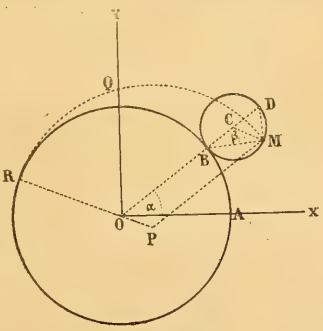


Figura 133.

Para determinar la ecuación de las epicicloides, sean *O* el centro (fig. 133) de la circunferencia fija, *ABR,* que adoptaremos por origen de las coordenadas; *C* el de la circunferencia móvil, *BMD,* en una cual-

quiera de sus posiciones; $B$ el punto de tangencia de ambas circunferencias; $\alpha$ el ángulo $AOB$; $\beta$ el $MCB$; $M$ el punto generador de la curva; y $A$ la posición inicial de este punto. La ley de generación de la curva se traduce por la igualdad

$$\text{arco}\, AB = \text{arco}\, BM;$$

ó, si $R$ y $r$ designan los radios de las circunferencias fija y móvil,

$$\beta = \frac{R}{r}\,\alpha.$$

Esto supuesto, proyectemos la línea $OCM$ sobre el eje de las abscisas; y, advirtiendo que los ángulos formados por las rectas $OC$ y $CM$ con el eje de las abscisas positivas son respectivamente iguales á $\alpha$ y á $\pi+\alpha+\beta$, contados también en sentido positivo, hallaremos que la abscisa $x$ del punto $M$ tiene por expresión

$$x = (R+r)\cos\alpha - r\cos(\alpha+\beta);$$

y la ordenada, $y$, del mismo punto, proyectando también la línea $OCM$ sobre el eje de las ordenadas,

$$y = (R+r)\,\text{sen}\,\alpha - r\,\text{sen}\,(\alpha+\beta).$$

Ecuaciones que pueden también escribirse de este otro modo:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= (R+r)\cos\alpha - r\cos\frac{R+r}{r}\,\alpha \quad \text{é} \\ y &= (R+r)\,\text{sen}\,\alpha - r\,\text{sen}\,\frac{R+r}{r}\,\alpha. \end{aligned}$$

De las cuales se deduciría la ecuación cartesiana de la epicicloide que representan, por eliminación de $\alpha$. Mas, para estudiar la curva á que ambas se refieren, es preferible, como en el caso de la cicloide, valerse de las dos simultáneamente, considerando la variable $\alpha$ como independiente.

**517.** Comenzaremos, pues, el estudio por el de la normal á la curva, en uno cualquiera de sus puntos.

Por ser

$$\frac{dx}{d\alpha} = (R+r)\,[-\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)] \text{ y}$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = (R+r)\,[\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)],$$

la ecuación de la normal será

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}\alpha}{\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha}.$$

La cual, sustituyendo en ella $x$ é $y$ por sus valores, dados por las ecuaciones de la curva, y por $X$ é $Y$ los $R\cos\alpha$ y $R\operatorname{sen}\alpha$ de las coordenadas del punto $B$, queda satisfecha: luego *la normal á la curva en el punto M pasa por el B, en donde las dos circunferencias se tocan.* Y, en consecuencia, la tangente á la curva en aquel punto será la recta $DM$, perpendicular á $BM$ (DESCARTES).

Y si además se pretende hallar la longitud, $k$, de la recta $BM$, bien fácil será conseguirlo, bastando para ello advertir que

$$BM = k = \sqrt{(R\cos\alpha - x)^2 + (R\operatorname{sen}\alpha - y)^2}$$

$$= r\sqrt{(\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta))^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}(\alpha+\beta))^2} = 2r\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta.$$

**518.** Del modo de generación de las epicicloides resulta inmediatamente que cada una de estas curvas se compone de una sucesión de arcos iguales, comprendidos entre los puntos donde la curva, engendrada por el $M$ de la circunferencia móvil, encuentra á la circunferencia fija, ó directora del movimiento: puntos que corresponden evidentemente á $\beta = 2n\pi$, siendo $n$ número entero, y valores de $\alpha$ comprendidos en la serie

$$\alpha = 0, \quad 2\frac{r}{R}\pi, \quad 4\frac{r}{R}\pi, \quad 6\frac{r}{R}\pi, \ldots$$

Si $\frac{r}{R}$ es un número racional, $\frac{m}{n}$, cuando fuere $\alpha = 2n\frac{r}{R}\pi = 2m\pi$, el

punto generador de la curva vuelve, después de describir $n$ arcos iguales, á la posición primitiva, $A$, de donde partió; y, si continúa girando la circunferencia móvil sobre la fija, se reproducirá, sin variante, la epicicloide ya engendrada. Pero si $\frac{r}{R}$ es irracional, el punto generador de la curva describirá, sí, indefinidamente otros arcos, iguales unos á otros, pero no coincidentes en situación ó superponibles por series, en las revoluciones consecutivas de la circunferencia móvil, apoyada de continuo en la fija. Siendo de advertir que, en el primero de estos casos, las curvas engendradas por el punto $M$ serán *algébricas*, y *transcendentes* en el segundo. Y no solamente algébricas en *aquél*, sino además *unicursales*.

En efecto: $x$ é $y$ son entonces funciones racionales de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, y de $\operatorname{sen}\frac{n}{m}\alpha$ y $\cos\frac{n}{m}\alpha$; y, según enseña la Trigonometría, $\operatorname{sen} m\frac{\alpha}{m}$ y $\cos m\frac{\alpha}{m}$, y $\operatorname{sen} n\frac{\alpha}{m}$ y $\cos n\frac{\alpha}{m}$, lo son igualmente de $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{m}$ y de $\cos\frac{\alpha}{m}$. Pues poniendo, por otra parte, $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2m} = t$, en las fórmulas que determinan el *seno* y el *coseno* en función de la *tangente*, se hallará que

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{m} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \cos\frac{\alpha}{m} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

De todo lo cual se infiere que las coordenadas $x$ é $y$ pueden también considerarse como funciones racionales de la misma variable auxiliar $t$.

**519.** Los puntos, donde la circunferencia fija corta á la epicicloide, lo son de *retroceso* de esta curva. Para persuadirse de lo cual basta fijarse en el inicial de la serie de arcos iguales, componentes suyos, correspondiente al valor de $\alpha = 0$. Con este valor de $\alpha$, el *coeficiente diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha - \cos\left(1+\frac{R}{r}\right)\alpha}{\operatorname{sen}\left(1+\frac{R}{r}\right)\alpha - \operatorname{sen}\alpha}$$

adquiere, por de pronto, la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, que fácilmente se resuelve en esta otra: $\frac{dy}{dx} = 0$. Luego la tangente á la epicicloide en el

punto $A$, donde $\alpha = 0$ y comienza la generación de la curva, coincidirá con el eje de las abscisas.

**520.** Por ser

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = (R+r)\left[-\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\left(1+\frac{R}{r}\right)\right] \quad \text{y}$$

$$\frac{d^2x}{d\alpha^2} = (R+r)\left[-\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)\left(1+\frac{R}{r}\right)\right],$$

el radio de curvatura, $R_1$, de las epicicloides podrá calcularse por la siguiente fórmula

$$R_1 = \frac{\left(\frac{dx^2}{d\alpha^2} + \frac{dy^2}{d\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{d\alpha}\frac{d^2y}{d\alpha^2} - \frac{dy}{d\alpha}\frac{d^2x}{d\alpha^2}} = \frac{4(R+r)\,r\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta}{R+2r};$$

ó, en virtud de una relación anteriormente hallada (Juan Bernoulli),

$$R_1 = \frac{2k(R+r)}{R+2r}.$$

Y como el denominador de $R_1$ no puede ser nulo, resulta que la curva no posee *puntos de inflexión*.

**521.** Para hallar las evolutas de las epicicloides, basta advertir que, de las fórmulas conocidas

$$x_1 = x - \frac{\frac{dy}{d\alpha}\left(\frac{dy^2}{d\alpha^2} + \frac{dx^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{dx}{d\alpha}\frac{d^2y}{d\alpha^2} - \frac{dy}{d\alpha}\frac{d^2x}{d\alpha^2}} \text{ ó } y_1 = y + \frac{\frac{dx}{d\alpha}\left(\frac{dx^2}{d\alpha^2} + \frac{dy^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{dx}{d\alpha}\frac{d^2y}{d\alpha^2} - \frac{dy}{d\alpha}\frac{d^2x}{d\alpha^2}},$$

se desprenden, en función de $\alpha$, las coordenadas $x_1$ é $y_1$ de los puntos de las evolutas buscadas:

$$x_1 = -\frac{R}{R+2r}[(R+r)\cos\alpha + r\cos(\alpha+\beta)] \quad \text{é}$$

$$y_1 = \frac{R}{R+2r}[(R+r)\operatorname{sen}\alpha + r\operatorname{sen}(\alpha+\beta)].$$

Ecuaciones las dos últimas que pueden también escribirse de este otro modo:

$$x_1 = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\cos\alpha + r\cos\frac{R+r}{r}\alpha\right] \quad \text{é}$$

$$y_1 = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\operatorname{sen}\alpha + r\operatorname{sen}\frac{R+r}{r}\alpha\right];$$

ó, poniendo $\alpha = \alpha_1 + \frac{r}{R}\pi$,

$$x_1 = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\cos\left(\alpha_1+\frac{r}{R}\pi\right) - r\cos\left(\frac{R+r}{r}\alpha_1+\frac{r}{R}\pi\right)\right] \quad \text{é}$$

$$y_1 = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\operatorname{sen}\left(\alpha_1+\frac{r}{R}\pi\right) - r\operatorname{sen}\left(\frac{R+r}{r}\alpha_1+\frac{r}{R}\pi\right)\right].$$

Si cambiamos ahora de ejes coordenados, adoptando para eje de las abscisas otro, que forme con el primitivo un ángulo igual á $-\frac{r}{R}\pi$, hallaremos para las nuevas coordenadas, $x_2$ é $y_2$, las expresiones siguientes:

$$x_2 = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\cos\alpha_1 - r\cos\frac{R+r}{r}\alpha_1\right] \quad \text{é}$$

$$y_2 = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\operatorname{sen}\alpha_1 - r\operatorname{sen}\frac{R+r}{r}\alpha_1\right].$$

O, poniendo finalmente

$$X = \frac{R}{R+2r}x_2 \quad \text{é} \quad Y = \frac{R}{R+2r}y_2,$$

estas otras:

$$X = (R+r)\cos\alpha_1 - r\cos\frac{R+r}{r}\alpha_1 \quad \text{é}$$

$$Y = (R+r)\operatorname{sen}\alpha_1 - r\operatorname{sen}\frac{R+r}{r}\alpha_1.$$

Ecuaciones ambas que coinciden con las de la curva en primer término considerada. Luego *la evoluta de una epicicloide es otra epicicloide semejante á la propuesta, cuyos círculos generadores, fijo y móvil, tienen respectivamente sus radios iguales á* $\frac{R^2}{R+2r}$ *y* $\frac{Rr}{R+2r}$, *coincidiendo el centro del primero con el centro de la epicicloide dada* (JUAN BERNOULLI).

**522.** Cualquier epicicloide puede ser engendrada por dos circunferencias diferentes, rodando sobre la misma circunferencia fija, una *exterior* y otra *interiormente* á ella.

En efecto, si por el punto $M$ tiramos la recta $MP$, paralela á $CO$, y por el $O$ la recta $RP$, paralela á $MC$, de la igualdad de los tres ángulos $MPR$, $BCM$ y $ROC$, y de la circunstancia de pasar por $R$ la circunferencia de centro $P$ y radio $PM$, igual á $R+r$, resultan las igualdades

$$\frac{\text{arco}\,RM}{R+r}=\frac{\text{arco}\,BM}{r}=\frac{\text{arco}\,RB}{R};$$

y, por lo tanto,

$$\frac{\text{arco}\,RM-\text{arco}\,BM}{R}=\frac{\text{arco}\,RB}{R};$$

ó

$$\text{arco}\,RM-\text{arco}\,BM=\text{arco}\,RA-\text{arco}\,BA;$$

ó, finalmente,

$$\text{arco}\,RM=\text{arco}\,RA.$$

Luego *el punto $M$ de la circunferencia, de centro $P$ y radio $R+r$, dentro de la cual se halla comprendida la circunferencia fija, al rodar, en contacto siempre con ésta la primera, describe la misma curva que el $M$, de la circunferencia, de centro $C$ y radio $r$, cuando ésta rueda sobre la de centro $O$ y radio $R$.* (EULER).

**523.** Por ser

$$x\frac{dy}{d\beta}-y\frac{dx}{d\beta}=\frac{r(R+r)(R+2r)}{R}(1-\cos\beta),$$

el área $A$, limitada por uno de los arcos de epicicloide y por los radios componentes de la circunferencia fija, que pasan por sus extremos, se halla expresada por la fórmula (JUAN BERNOULLI)

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{d\beta} - y\frac{dx}{d\beta}\right)d\beta = \frac{(R+r)(R+2r)r\pi}{R}.$$

**524.** Y por ser

$$\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2 = \frac{r^2}{R^2}\left(\frac{dx^2}{d\alpha^2} + \frac{dy^2}{d\alpha^2}\right) = \frac{4r^2(R+r)^2}{R^2}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\beta,$$

la longitud, $s$, de uno cualquiera de aquellos arcos lo estará por esta otra (NEWTON):

$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2}\,.\,d\beta = \frac{8r(R+r)}{R}.$$

**525.** Consideremos ahora las mismas circunferencias que en el Número **516**, y supongamos que la de radio $r$ y la de radio $R$ seán tangentes una á otra interiormente. En este caso las curvas engendradas por un punto de la circunferencia móvil se denominan *hipocicloides*.

Y, por procedimiento análogo al empleado en el caso de las epicicloides, fácilmente se deduce que las ecuaciones de estas curvas son las siguientes:

$$x = (R-r)\cos\alpha + r\cos\frac{R-r}{r}\alpha \quad \text{é}$$

$$y = (R-r)\operatorname{sen}\alpha - r\operatorname{sen}\frac{R-r}{r}\alpha,$$

que solamente discrepan de las correspondientes á las epicicloides por el cambio de $r$ en $-r$. De manera que las propiedades de las hipocicloides serán análogas á las de las epicicloides, y se deducirán de éstas cambiando también, en los razonamientos para descubrirlas y fórmulas que las expresan, $r$ por $-r$, y viceversa.

Las dos especies de curvas mencionadas denomínanlas algunos auto-

res con el nombre común de *epicicloides,* distinguiéndolas luego, según los casos, con los calificativos de *exteriores ó interiores.*

**526.** Entre las interiores, *ó hipocicloides,* merecen mención particular las obtenidas suponiendo que $R = 4r$ y $R = 2r$.

Cuando $R = 4r$, las ecuaciones generales de las hipocicloides adquieren las siguientes formas:

$$x = 3r\cos\alpha + r\cos 3\alpha \quad \text{é} \quad y = 3r\,\text{sen}\,\alpha - r\,\text{sen}\,3\alpha;$$

ó

$$x = 4r\cos^3\alpha \quad \text{é} \quad y = 4r\,\text{sen}^3\,\alpha,$$

de las cuales se desprende esta otra:

$$\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

que representa (Núm. **267**) una *astroide, ó hipocicloide de cuatro retrocesos.*

Y poniendo en las mencionadas ecuaciones generales $R = 2r$, hállanse las particulares que siguen:

$$y = 0 \quad \text{y} \quad x = 2r\cos\alpha;$$

correspondientes *á una línea recta* (Cardan).

Pero, entre todas las hipocicloides, la de más notables propiedades y más digna de especial consideración es la denominada *hipocicloide de tres retrocesos,* que á continuación pasamos á estudiar.

## IV

### HIPOCICLOIDE DE TRES RETROCESOS

**527.** Suponiendo que sea $R = 3r$, de las ecuaciones generales de las hipocicloides se desprenden estas otras:

(1) $\qquad x = r(2\cos\alpha + \cos 2\alpha) \quad$ é $\quad y = r(2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha).$

En este caso, la circunferencia directora, de radio $R$, es evidentemente igual en longitud á tres veces la de radio $r$: componiéndose la curva engendrada por un punto cualquiera de la segunda, en su movimiento de traslación rotatoria, tangencial á la primera por dentro de la misma, de tres arcos superponibles, limitados en los *puntos de retroceso,* equidistante uno cualquiera de los otros dos, $A$, $A_1$ y $A_2$ (fig. 134), y vértices, por lo tanto, del triángulo equilátero $AA_1A_2$. De los arcos de la *hipocicloide* serán *tangentes* en los puntos mencionados las bisectrices de este triángulo, y *normales* á ellos, en $C$, $C_1$ y $C_2$, las mismas bisectrices, que por definición han de cortarse en el centro $O$ del círculo $CC_1C_2$, de igual radio, $r$, que el generador de la curva.

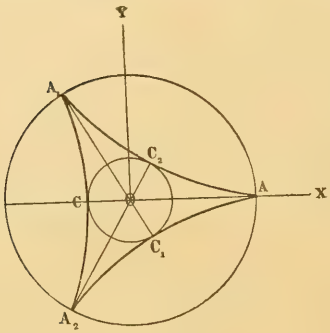


Figura 134.

La *hipocicloide de tres retrocesos* ha sido objeto de trabajos de sumo interés.

Euler fué el primer geómetra que atentamente se ocupó en su estudio, cuyos resultados consignó en una memoria titulada *De duplici genesi epicycloidum quam hypocycloidum,* publicada en 1781 en las *Acta de l'Académie de S. Petersbourg.* Trataron después del mismo asunto Steiner

(*Journal de Crelle*, t. LIII, p. 231); SCHROTER (*Journal de Crelle*, t. LIV); y algunos más. Pero quien la estudió con mayor amplitud y más contribuyó á su celebridad fué CREMONA, que la consagró una bella é importante memoria, publicada en el volumen del *Journal de Crelle*, correspondiente al año de 1865 (t. LXIV, p. 101), donde la calificó de *maravillosa*, por el gran número de interesantes propiedades que posee.

En esta memoria demostró, en efecto, el eminente geómetra italiano muchos teoremas, anteriormente ya enunciados por STEINER, y otros nuevos y muy importantes, empleando para ello consideraciones puramente geométricas.

Más tarde, PAINVIN (*Nouvelles Annales des Mathématiques, 2.e série*, t. IX, p. 212 y 256) demostró de nuevo estas proposiciones y algunas otras más, por procedimientos analíticos, y merced al empleo de las coordenadas *trilineares* y *tangenciales*.

Y LONGCHAMPS (*Journal des Mathématiques spéciales, 2.e série*, t. VIII, p. 169) se valió para los mismos fines de las coordenadas cartesianas, conforme, substancialmente, por ser lo más elemental y más fácil de comprender, haremos á renglón seguido. No sin antes advertir que, además de los trabajos á que acabamos de referirnos, han sido publicados otros muchos referentes á esta curva célebre: como puede verse en la lista de todos ellos, formada por BROCARD, y dada á luz en el *Intermédiaire des Mathematiciens* (t. III, 1896, p. 166).

528. La *hipocicloide de tres retrocesos*, de STEINER, *triangular*, ó *tricuspidal*, que de estos varios modos se denomina, es una curva *algébrica de cuarto orden*, que tiene por ecuación la siguiente, fácilmente deducible eliminando la $\alpha$ entre las ecuaciones (1):

$$(x^2 + y^2)^2 + 8rx(3y^2 - x^2) + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^4 = 0;$$

y cuyas coordenadas, $x$ é $y$, por ser *unicursal*, podemos expresar en función racional de un parámetro $t$. Bastando para ello suponer que $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = -t$: de donde se desprende que

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha = -\frac{2t}{1+t^2}; \text{ y } \cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Con lo cual las ecuaciones (1) de la curva redúcense á las siguientes:

$$x = r\,\frac{-t^4 - 6t^2 + 3}{(t^2+1)^2} \quad \text{é} \quad y = -r\,\frac{8t^3}{(t^2+1)^2}.$$

Y, en consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = t.$$

**529.** Por referencia á sus tangentes, la curva de que ahora se trata posee propiedades importantes, que pasamos á determinar.

Con este objeto, traslademos el origen de las coordenadas al punto de retroceso, $A$, para lo cual basta poner $x - 3r$ por $x$; y así se hallará que

$$(2) \qquad x = -\frac{4rt^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2} \quad \text{é} \quad y = -r\,\frac{8t^3}{(t^2+1)^2}.$$

Y como la ecuación de las tangentes es

$$Y - y = t(X - x),$$

transformarémosla en la que sigue, poniendo en ella por $x$ é $y$ sus valores, poco antes encontrados:

$$(3) \qquad Y - tX - \frac{4rt^3}{t^2+1} = 0.$$

Para trazar, pues, por el punto $(\alpha, \beta)$ tangentes á la curva, habrá que determinar la incógnita $t$ por medio de la ecuación

$$(4) \qquad (4r+\alpha)t^3 - \beta t^2 + \alpha t - \beta = 0:$$

de la cual se desprenden para $t$ tres valores, reales los tres, ó uno real y dos imaginarios, que representarán los coeficientes angulares de las ecuaciones de las tres tangentes á la curva por el punto considerado, reales ó imaginarias asimismo.

Sean

$$t_1 = \text{tang}\,a, \quad t_2 = \text{tang}\,b, \quad \text{y} \quad t_3 = \text{tang}\,c$$

estos tres coeficientes, sometidos, según la ecuación anterior demuestra, á las condiciones

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{\beta}{4r + \alpha}, \quad \text{y} \quad t_1 t_2 t_3 = \frac{\beta}{4r + \alpha};$$

de las cuales se deduce que

$$\text{tang}a + \text{tang}b + \text{tang}c = \text{tang}a \,.\, \text{tang}b \,.\, \text{tang}c,$$

y, por consiguiente,

$$\text{tang}c = -\frac{\text{tang}a + \text{tang}b}{1 - \text{tang}a\,\text{tang}b} = -\,\text{tang}(a + b).$$

Igualdad de la cual resulta, atendiendo á que el eje de las abscisas coincide con la tangente en el punto de retroceso, y á que los otros puntos de este nombre se encuentran en las mismas condiciones que el anterior, el teorema siguiente, debido á LAGUERRE *(Nouvelles Annales de Mathématiques;* 1870, p. 254):

*Las tres tangentes que se pueden trazar á la hipocicloide de tres retrocesos por cualquier punto exterior á ella, forman con una cualquiera de las tangentes en los puntos de retroceso tres ángulos, cuya suma es múltiple de* $\pi$.

**530.** La condición para que dos de las tangentes trazadas por el punto $(\alpha, \beta)$ formen un ángulo recto, es

$$t_1 t_2 + 1 = 0.$$

Pero, como además $t_1 t_2 t_3 = \frac{\beta}{4r + \alpha}$, resulta que

$$t_3 = -\frac{\beta}{4r + \alpha}.$$

La cantidad $-\frac{\beta}{4r + \alpha}$ es, pues, en este caso raíz de la ecuación (4), la cual, en consecuencia, se reduce á la que sigue:

$$\frac{2\beta^2}{(4r + \alpha)^2} + \frac{\alpha}{4r + \alpha} + 1 = 0,$$

que, considerando las $\alpha$ y $\beta$ como variables, representa la curva á que corresponden los puntos por los cuales se pueden trazar tangentes á la hipocicloide considerada, perpendiculares entre sí.

La última ecuación puede también escribirse de este otro modo:

$$(\alpha + 3r)^2 + \beta^2 = r^2,$$

que, abreviadamente, expresa el siguiente teorema de PAINVIN:

*El lugar geométrico de los puntos por donde pueden trazarse tangentes á la hipocicloide de tres retrocesos, perpendiculares entre sí, es una circunferencia de radio r, y cuyo centro coincide con el de la hipocicloide.*

Por ser, en este caso,

$$t_1 t_2 = -1 \quad y \quad t_1 + t_2 = \frac{2\beta}{4r + \alpha},$$

$t_1$ y $t_2$ serán entonces raíces de la ecuación de segundo grado

$$t^2 - \frac{2\beta}{4r + \alpha} t - 1 = 0.$$

**531.** Cualquier tangente á la curva considerada corta á ésta en dos puntos, además del de tangencia, separados entre sí por la distancia que pasamos á determinar.

Sea $\lambda$ el valor de $t$ en el punto de contacto. La ecuación de la tangente será entonces

$$Y - \lambda X - \frac{4r\lambda^3}{\lambda^2 + 1} = 0;$$

y los puntos de su intersección con la curva se determinarán por eliminación de $X$ é $Y$ entre esta ecuación y las ecuaciones de la hipocicloide

$$X = -\frac{4rt^2(t^2 + 3)}{(t^2 + 1)^2} \quad \text{é} \quad Y = r\frac{8t^3}{(t^2 + 1)^2};$$

de donde se concluye que

$$\lambda t^4 - 2(\lambda^2 + 1) t^3 + \lambda(\lambda^2 + 3) t^2 - \lambda^3 = 0,$$

6

$$(t-\lambda)^2(\lambda t^2-2t-\lambda)=0.$$

Los valores de $t$ en los puntos donde la tangente corta á la curva se hallan, pues, definidos por la ecuación de segundo grado

$$\lambda t^2-2t-\lambda=0,$$

cuyas raíces, $t'$ y $t''$, satisfacen á esta condición:

$$t'\,t''+1=0.$$

Luego *las tangentes á la curva en aquellos puntos son una á otra perpendiculares* (Cremona).

Para hallar ahora la distancia $\Delta$ entre estos puntos, advirtamos que, representando por $x'$ é $y'$, y $x''$ é $y''$, sus coordenadas, será

$$\Delta^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2.$$

Y, atendiendo á las igualdades

$$x'=-\frac{4rt'^2(t'^2+3)}{(t'^2+1)^2}\quad\text{é}\quad y'=-\frac{8rt'^3}{(t'^2+1)^2},\quad\text{y}$$

$$x''=-\frac{4rt''^2(t''^2+3)}{(t''^2+1)^2}\quad\text{é}\quad y''=-\frac{8rt''^3}{(t''^2+1)^2},$$

dos de las cuales, sustituyendo $t''$ por $-\frac{1}{t'}$, se convierten en estas otras:

$$x''=-\frac{4r(3t'^2+1)}{(t'^2+1)^2}\quad\text{é}\quad y''=\frac{8rt'}{(t'^2+1)^2},$$

se concluye, finalmente, que

$$\Delta^2=16r^2.$$

Luego *la longitud de la parte de cualquier tangente, interceptada por la curva, es constante é igual á* $4r$ (Cremona).

**532**. *El lugar geométrico de los puntos por donde se pueden trazar tangentes á la hipocicloide de tres retrocesos, de manera que los de contacto resulten en línea recta, es la circunferencia que pasa por los de retroceso* (P. DELENS: *Journal de Mathématiques spéciales*, 4.ᵉ *série*, *t.* XVI, *p.* 193).

Los puntos en que la recta

$$ux + vy + w = 0$$

corta á la curva se hallan, en efecto, determinados por la ecuación siguiente, obtenida por eliminación de las $x$ é $y$ entre ésta y las ecuaciones (2) de la curva:

$$(w - 4ru)\,t^4 - 8rvt^3 + (2w - 12ru)\,t^2 + w = 0.$$

Y para que la recta pase por los puntos de contacto de las tres tangentes, trazadas por el punto $(\alpha, \beta)$, es necesario y suficiente que las raíces de la ecuación (4) coincidan con tres raíces de la anterior, ó que el resto de la división de sus primeros miembros sea idénticamente nulo. Basta, pues, formar este resto, igualar á cero los coeficientes de las diversas potencias de $t$, y eliminar $u$, $v$ y $w$ entre las ecuaciones resultantes, para obtener el lugar geométrico pedido. Y procediendo de este modo, como se procedió en cuestiones análogas, discutidas en los Núms. **164** y **212**, obtiénese, en conclusión, la ecuación de la circunferencia, de radio igual á $3r$.

**533**. Comparando la ecuación de la tangente (3) con la

$$uY + vX + 1 = 0,$$

hállase que

$$u = -\frac{t^2 + 1}{4rt^3} \quad \text{y} \quad v = \frac{t^2 + 1}{4rt^2};$$

y, por consiguiente, eliminando $t$ entre las dos,

$$4rv^3 - v^2 - u^2 = 0:$$

*ecuación tangencial* de la curva, suponiendo que el origen de las coordenadas coincide con el punto de retroceso, $A$.

Si partimos de esta ecuación y buscamos la de la *polar* de la curva, por ella representada, relativamente á la recta

$$u_0 y + v_0 x + 1 = 0,$$

para lo cual se debe aplicar la fórmula

$$u_0 f_u' + v_0 f_v' + w_0 f_w' = 0$$

á la ecuación homogénea

$$f(u, v, w) = 4rv^3 - v^2 w - u^2 w = 0,$$

encuéntrase la ecuación

$$u^2 + (1 - 12rv_0) v^2 + 2u_0 u + 2v_0 v = 0, \tag{5}$$

que representa una *cónica.*

Y, buscando la ecuación cartesiana de esta cónica, por el método conocido (LAURENT: *Traité d'Analyse, t.* II, *p.* 59), obtiénese la siguiente:

$$\begin{cases} r_0^2 y^2 + u_0^2 x^2 - 2u_0 v_0 xy \\ -2(1 - 12rv_0) u_0 y - 2v_0 x = 1 - 12rv_0, \end{cases}$$

que representa una *parábola.*

Pues escribamos esta ecuación bajo la forma

$$(u_0 x - v_0 y)^2 - 2(u_0 y + v_0 x) + 24ru_0 v_0 y = 1 - 12rv_0;$$

cambiemos de coordenadas, con auxilio de las expresiones

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \operatorname{sen}\alpha \quad \text{é} \quad y = y_1 \cos\alpha + x_1 \operatorname{sen}\alpha,$$

adoptando para eje de las abscisas en el nuevo sistema una recta, paralela á la recta dada, que forme con el primitivo eje de este nombre el ángulo $\alpha$, determinado de este modo: $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{v_0}{u_0}$; y hallaremos, por resultado final,

$$\frac{v_0^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} x_1^2 + 2\frac{v_0}{\operatorname{sen}\alpha} y_1 + 24ru_0 v_0 (y_1 \cos\alpha + x_1 \operatorname{sen}\alpha) = 1 - 12rv_0.$$

Y cambiando luego el origen de las coordenadas, por medio de las expresiones $x_1 = x + h$ é $y_1 = y + l$, á condición de determinar primeramente $h$, con auxilio de la igualdad

$$2h\frac{v_0^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} + 24ru_0v_0\operatorname{sen}\alpha = 0,$$

y, después $l$, valiéndose de la igualdad

$$\frac{v_0^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}h^2 + 2\frac{v_0}{\operatorname{sen}\alpha}l + 24ru_0v_0(k\cos\alpha + h\operatorname{sen}\alpha)$$

$$= 1 - 12rv_0,$$

nos resultará, finalmente, la ecuación

$$\frac{v_0^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}x^2 + 2\frac{v_0}{\operatorname{sen}\alpha}y + 24ru_0v_0y\cos\alpha = 0,$$

según la cual *el eje de la parábola* coincide con el eje de las ordenadas, y, por consiguiente, *es perpendicular á la recta dada.*

**534.** Para determinar los *focos* de la parábola anterior, apliquemos á la ecuación (5) el método general, valedero para la determinación de los puntos de aquel nombre en las curvas algébricas.

Poniendo para ello

$$u = -\frac{1}{b+ai} \quad \text{y} \quad v = -\frac{i}{b+ai},$$

hallaremos la ecuación

$$12rv_0 - 2u_0(b+ai) - 2v_0i(b+ai) = 0.$$

que se descompone, ó resuelve, en las dos siguientes:

$$u_0b - v_0a = 6rv_0 \quad \text{y} \quad u_0a + v_0b = 0.$$

Ó, por ser $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{v_0}{u_0}$,

$$b + a\operatorname{tang}\alpha = -6r\operatorname{tang}\alpha \quad \text{y} \quad a - b\operatorname{tang}\alpha = 0:$$

ecuaciones que determinan las coordenadas $a$ y $b$ del foco de la parábola, y enseñan *que, cuando la recta dada se mueve paralelamente, el foco no varía,* por cuanto $\alpha$ no varía tampoco.

Las dos propiedades que acabamos de demostrar se hallan consignadas en la memoria de PAINVIN, anteriormente citada, y fueron descubiertas por CREMONA. Mas las demostraciones que acabamos de proponer difieren de las formuladas por uno y otro geómetra.

**535.** Si la recta dada es tangente á la hipocicloide, se verificará que

$$4rv_0^3 - v_0^2 - u_0^2 = 0.$$

Y poniendo $u = u_0$ y $v = v_0$ en la ecuación de la parábola, dedúcese la relación, idéntica á la anterior,

$$u_0^2 + (1 - 12rv_0)\,v_0^2 + 2u_0^2 + 2v_0^2 = 0.$$

De manera que *la recta considerada resulta también tangente á la parábola.*

**536.** Busquemos los puntos en que esta recta

$$u_0\,y + v_0\,x + 1 = 0$$

toca á la curva y á la parábola: puntos dados por la ecuación

$$uf_u'(u_0, v_0, w_0) + vf_v'(u_0, v_0, w_0) + wf_w'(u_0, v_0, w_0) = 0,$$

representando por $f(u, v, w) = 0$ la ecuación homogénea de la curva.

Aplicando esta igualdad á la ecuación de la hipocicloide

$$4rv^3 - v^2\,w - u^2\,w = 0,$$

hállase que

$$2u_0\,u - (12rv_0^2 - 2v_0)\,v + v_0^2 + u_0^2 = 0;$$

y la ecuación de la parábola conduce al mismo resultado.

Luego *la recta considerada toca á las dos curvas en el mismo punto.*

Y como ya se ha visto que el eje de la parábola es perpendicular á la recta de que se trata, resulta que *el punto de contacto, común á la hipocicloide y á la parábola, coincide con el vértice de la segunda* (CREMONA).

Si, además, se elimina $\text{tang}\alpha$ entre las dos ecuaciones de donde se desprenden las coordenadas, $a$ y $b$, del foco de la parábola, hállase la ecuación

$$a^2 + b^2 + 6ra = 0.$$

Luego *todos los focos de las parábolas, correspondientes á las diversas rectas, encuéntranse situados sobre la circunferencia que pasa por los puntos de retroceso de la hipocicloide* (Cremona).

**537.** El radio de curvatura de la hipocicloide de tres retrocesos se halla expresado por la fórmula

$$R_1 = 8r \operatorname{sen} \frac{3}{2}\alpha = 4k,$$

en el supuesto de representar $k$ la distancia, al punto considerado de la curva, del punto en que el círculo generador de la misma curva toca al círculo fijo ó director del movimiento.

Las coordenadas $x_1$ é $y_1$ del *centro de curvatura* de la misma hipocicloide tienen por expresión

$$x_1 = 3r\,(2\cos\alpha - \cos 2\alpha) \quad \text{é} \quad y_1 = 3r\,(2\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha):$$

ó, poniendo $\alpha + \pi$ por $\alpha$,

$$x_1 = -3r\,(2\cos\alpha + \cos 2\alpha) \quad \text{é} \quad y_1 = -3r\,(2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha):$$

las cuales corresponden también á una hipocicloide de tres retrocesos, engendrada por una circunferencia de radio $3r$: ó una curva, salva la situación, idéntica á la primitiva.

**538.** El valor del *área*, limitada por uno de los tres arcos componentes de la *hipocicloide de tres retrocesos* y por los radios de la circunferencia fija que pasan por los extremos del mismo arco, tiene por expresión

$$A = \frac{2}{3}\pi r^2,$$

*y es igual, en consecuencia, á* $\frac{2}{3}$ *del área del círculo generador.*

Y el valor del *área total del triángulo curvilíneo,* formado por los tres arcos de la curva, igual á $2\pi r^2$: doble del área del mismo círculo.

**539.** Análogamente: *la longitud* de uno de aquellos tres arcos es igual á $\frac{4}{3}\pi r$, *ó á dos terceras partes de la longitud de la circunferencia generadora.* Y la longitud total *doble* de la longitud de la circunferencia desarrollada.

**540.** Las *hipocicloides de tres retrocesos* poseen aún otras propiedades interesantes, relativas á sus *podarias*, descubiertas por LONGCHAMPS *(Journal de Mathématiques spéciales*, 1887, p. 203 y 220), y por BROCARD *(Idem*, 1891, p. 32), que relacionan su teoría con la de otras cuárticas anteriormente consideradas.

Como muestra ó prueba de lo dicho, tomaremos por origen de las coordenadas el punto *C.*

La ecuación (3) de las tangentes á la hipocicloide transfórmase en la siguiente:

$$Y = tX - \frac{4rt}{t^2+1}.$$

Y la perpendicular á esta recta, trazada por el punto $(\alpha, \beta)$, tiene asimismo por ecuación

$$Y - \beta = -\frac{1}{t}(X - \alpha).$$

Eliminando la $t$ entre ambas ecuaciones, obtiénese la que sigue, correspondiente á la *podaria* de la hipocicloide considerada, relativamente al mismo punto $(\alpha, \beta)$:

$$(y-\beta)\,y\,[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]$$
$$= x\,(\alpha - x)\,[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2] - 4r\,(\alpha - x)\,(y-\beta)^2.$$

Ó, trasladando el origen de las coordenadas á este punto $(\alpha, \beta)$,

$$(A) \qquad y\,(y+\beta)\,(x^2+y^2)+(x+\alpha)\,x\,(x^2+y^2) - 4rxy^2 = 0.$$

Suponiendo ahora que $\alpha$ y $\beta$ representan las coordenadas de un punto

de la circunferencia, tangente á la hipocicloide en los puntos $C$, $C_1$ y $C_2$, hállase que

$$\alpha = r + r\cos\omega \quad \text{y} \quad \beta = r\,\text{sen}\,\omega,$$

designando por $\omega$ el ángulo formado con el eje $Cx$ por la recta que une el centro de la circunferencia considerada al punto $(\alpha, \beta)$.

Y, en virtud de las precedentes igualdades y de las $x = \rho\cos\theta$ é $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$, la ecuación de la curva considerada se reduce á la forma

$$\rho = -r\,(\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\omega + \cos^2\theta + \cos\theta\cos\omega - 4\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta);$$

ó

$$\rho = -r\,[\cos(\theta - \omega) + \cos 3\theta]:$$

ó, finalmente,

$$\rho = -2r\cos\left(2\theta - \frac{1}{2}\omega\right)\cos\left(\theta + \frac{1}{2}\omega\right).$$

Vese, pues, que *la podaria de la hipocicloide de tres retrocesos, relativamente á un punto cualquiera de la circunferencia, tangente á la curva en los puntos $C$, $C_1$ y $C_2$, es un trifolium* (Longchamps).

**541.** Ampliaremos un poco más este asunto, fijando breves momentos la atención en las *podarias* de la misma hipocicloide, relativamente á los puntos de la recta $CA$.

Poniendo para ello en la ecuación $(A)$ $\beta = 0$, dedúcese la ecuación

$$\rho = -\alpha\cos\theta + 4r\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta:$$

la cual *representa una rosácea de tres hojas, cuando $\alpha = r$; un folium duplex* (Núm. **237**), *cuando $\alpha = 0$; un folium simplex* (Núm. **231**), *si $\alpha = 4r$; y un trifolium* (Núm. **244**) *en el caso de ser $\alpha = 2r$* (Brocard).

**542.** La *hipocicloide de tres retrocesos* puede, también, trazarse fácilmente por *puntos* y *tangentes*, conforme vamos á indicar ahora.

Consideremos para ello una circunferencia, de centro $O$ y radio $R_1$; y, á contar de un punto fijo de la misma, $C$, señalemos los arcos $CM$ y $CN$ (fig. 135), de doble longitud el segundo que el primero. Pues, designando

por ω el ángulo $COM$, y las coordenadas de los puntos $M$ y $N$, respectivamente, por $x_1$ é $y_1$ y $x_2$ é $y_2$, los valores de estas coordenadas podrán expresarse de este modo:

$$x_1 = -R_1 \cos\omega \text{ é } y_1 = R_1 \operatorname{sen}\omega, \text{ y } x_2 = -R_1 \cos 2\omega \text{ é } y_2 = -R_1 \operatorname{sen} 2\omega.$$

Con los cuales se deducirá para ecuación de la recta, $MN$, que pasa por aquellos puntos, la siguiente:

$$Y \operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega + X \cos\frac{1}{2}\omega = -R_1 \cos\frac{3}{2}\omega.$$

Y la *envolvente* de las posiciones que la recta toma, conforme ω varía, se determinará por medio de esta ecuación, y de su *derivada* con relación á ω,

$$Y \cos\frac{1}{2}\omega - X \operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega = 3 R_1 \operatorname{sen}\frac{3}{2}\omega,$$

equivalentes á estas otras:

$$X = R_1(\cos 2\omega - 2\cos\omega) \quad \text{é}$$
$$Y = R_1(\operatorname{sen} 2\omega + 2\operatorname{sen}\omega),$$

las cuales se reducen á las (1) del Número **527**, poniendo en ellas $\pi - \alpha$ por ω.

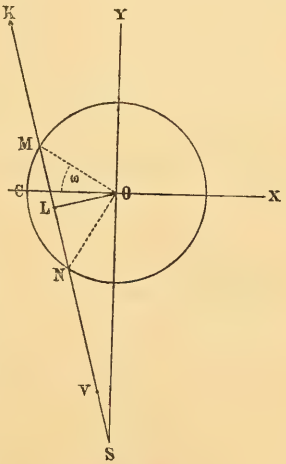


Figura 135.

De donde se concluye que la envolvente de las distintas posiciones de la recta $MN$, conforme $M$ y $N$ varían sobre la circunferencia, conservándose constante siempre la relación *arco* $CN = 2$ *arco* $CM$, es una *hipocicloide de tres retrocesos.*

**543.** De análoga manera: sobre la recta $MN$, también indefinidamente prolongada, señalemos ahora el punto $K$, de manera que $MK = MN$; y demostraremos que, cuando la recta $MN$ varíe de posición, sin alterarse la relación expuesta, el *lugar geométrico*, descrito por $K$, coincide asimismo con la *hipocicloide* mencionada.

Trazando, en efecto, por el punto $O$ la recta $OL$, perpendicular á la $MN$; proyectando la línea quebrada $KLO$, sucesivamente, sobre los ejes de las abscisas y ordenadas, $OX$ y $OY$; y representando por $X$ é $Y$ las coordenadas variables del punto $K$, hallaremos que

$$-X = KL \operatorname{sen} LOC + LO \cos LOC \quad \text{é}$$
$$Y = KL \cos LOC - OL \operatorname{sen} LOC.$$

Ecuaciones que, por ser

$$LO = R_1 \cos LON = R_1 \cos \frac{3}{2}\omega, \quad KL = 3LN = 3R_1 \operatorname{sen} \frac{3}{2}\omega,$$

$$\text{y} \quad LOC = \frac{1}{2}\omega,$$

se transforman en otras dos, que coinciden con las dos poco antes deducidas y correspondientes á la *hipocicloide de tres retrocesos*.

Luego, según lo acabado de manifestar, la curva de este nombre puede considerarse engendrada, tanto por un *punto* en movimiento, conforme á ley bien definida, como por intersecciones sucesivas de una recta, móvil conforme también á la consignada en el **542**: recta que, en todas sus posiciones, resultará *tangente* á la mencionada curva.

**544.** Designemos ahora por $V$ otro punto de la misma recta generatriz, relacionado con los $M$ y $N$ por la condición de ser $VN = NM$; y veamos cuál es la curva descrita por este punto, $V$, cuando la recta á que corresponde varía de situación, de la manera antes explicada, ó al propio tiempo que el $K$ describe la *hipocicloide*.

Proyectando para ello la línea quebrada, $VLO$, sobre los ejes de las coordenadas, y representando por $X_1$ é $Y_1$ las coordenadas del $V$, hállanse estas ecuaciones:

$$X_1 = -(OL \cos LOC - LV \operatorname{sen} LOC) \quad \text{é}$$
$$Y_1 = -(OL \cos LOS + LV \cos LSO),$$

que, procediendo como en el caso anterior, se transformarán en estas otras:

$$X_1 = R_1(\cos\omega - 2\cos 2\omega) \quad \text{é} \quad Y_1 = -R_1(\operatorname{sen}\omega + 2\operatorname{sen} 2\omega),$$

correspondientes á la curva buscada, y de las cuales, por eliminación de $\omega$, se deduce, en coordenadas cartesianas, la ecuación única de la misma curva,

$$Y_1^4+(2X_1^2-3R_1X_1-\frac{27}{4}R_1^2)Y_1^2-(X_1+R_1)(X_1+3R_1)(X_1-\frac{3}{2}R_1)^2=0:$$

*cuártica* muy notable, estudiada por LONGCHAMPS en el *Journal des Mathématiques spéciales* (1885), y por BROCARD y M. D'OCAGNE en el volumen del mismo periódico correspondiente al año 1886, representada en la fig. 136. Donde se ve que posee tres ejes: $aA$, $a_1A_1$ y $a_2A_2$, que forman entre sí ángulos de 60° ó de 120°; y *tres nodos*, situados sobre estos ejes, á la distancia $\frac{3}{2}R_1$ de su centro; y es tangente, además, á las dos circunferencias, de centro común, $O$, y radios $R_1$ y $OA_1$: igual éste á $3R_1$, en los puntos, respectivamente, $C$, $C_1$ y $C_2$, y $a$, $a_1$ y $a_2$, pertenecientes asimismo á los ejes y vértices de dos triángulos equiláteros.—En la figura es de notar la línea $A_2A_3$, que corta al círculo interior y á la *cuártica trinodal* en los puntos $p$, $q$ y $r$, de tal modo que $pq = qr$: lo cual permite construir, en cualquier caso, la *cuártica* por procedimiento muy sencillo. La conexión, ó íntimo enlace, de esta cuártica con la *hipocicloide tricuspidal*, $AC_2A_1C\ldots$, se manifiesta también muy claramente en la figura.

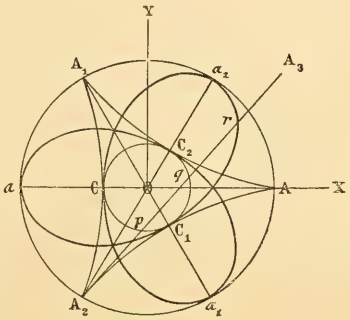



Figura 136.

## IV

### EVOLVENTE DEL CÍRCULO

**545.** Entre las curvas epicicloidales notables merece también contarse la *espiral evolvente del círculo*, correspondiente al caso particular de ser $r = \infty$: como que entonces el *círculo móvil* se convierte, efectivamente, en una recta, reduciéndose la *epicicloide* de los demás casos á la curva engendrada por un punto de una recta *móvil*, que rueda sin resbalar sobre una circunferencia *fija*, á la cual se conserva *tangente* aquella recta en todas las posiciones que sucesivamente va tomando.

Las ecuaciones de la *evolvente del círculo* se infieren inmediatamente por medio de las generales de las epicicloides, sustituyendo en éstas $\operatorname{sen}\frac{R}{r}\alpha$ y $\cos\frac{R}{r}\alpha$ por sus desarrollos en serie, y suponiendo después que $r = \infty$. Con lo cual se obtienen las siguientes:

$$x = R(\cos\alpha + \alpha\operatorname{sen}\alpha) \quad \text{é} \quad y = R(\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha);$$

de las cuales se desprenden además estas otras *diferenciales:*

$$dx = R\alpha\cos\alpha\, d\alpha \quad \text{y} \quad dy = R\alpha\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha.$$

**546.** La curva á que se refieren estas ecuaciones es de bien sencilla construcción; pues si, en efecto, representamos (fig. 137) por $A m m_1 m_2 \ldots$ el círculo director, de centro $O$, y por $PQ$ la tangente generadora de la curva, en su posición inicial en $A$; trazando por un punto cualquiera, $m_1$, la tangente á la circunferencia, y señalando en ella el $M_1$ á la distancia $m_1 M_1$, igual al arco desarrollado, $m_1 m A$, este punto, $M_1$, corresponderá á la curva buscada. Y repitiendo la misma construcción, por referencia á los demás puntos de la circunferencia, se determinarán sucesivamente cuantos otros se consideren necesarios de la evolvente.

Y advirtiendo que, á contar del punto inicial $A_1$, la rotación de la tangente $PAQ$ puede efectuarse en dos sentidos opuestos, $Amm_1\ldots$ y $Am_3m_2\ldots$, dedúcese que la curva resultante de este doble giro constará de dos ramas

distintas, $AMM_1\ldots$ y $ANN_1\ldots$, con un *punto* intermedio *de retroceso*, en $A$. Siendo también de advertir que, por definición ó construcción, las tangentes á la circunferencia, como la $Mm$ (prolongada), $M_1 N_1$, etc., son *normales* á una y otra rama de la curva, conforme pide la teoría general de las *evolutas* y *evolventes*.

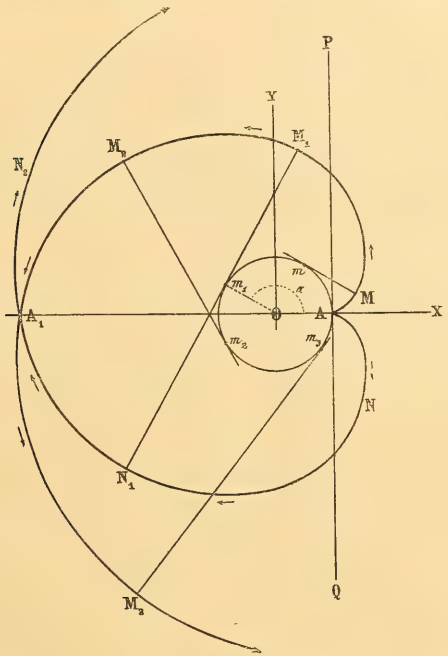



Figura 137.

**547.** Por ser

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2\,\alpha^2\,d\alpha^2,$$

conclúyese que la longitud del arco $AMM_1$, correspondiente al ángulo $\alpha = m_1 OA$, tiene por expresión $s = \frac{1}{2} R\alpha^2$.

Y, análogamente: representando por $A$ el área recorrida por el vector de $M$, cuando este punto describe el arco $AMM_1$.. de la curva, el valor de la diferencial de esta área, en función de $\alpha$, se hallará expresado como sigue:

$$dA = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\alpha} - y\frac{dx}{d\alpha}\right)d\alpha = \alpha^2\, d\alpha.$$

De manera que, en conclusión,

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\left(x\frac{dy}{d\alpha} - y\frac{dx}{d\alpha}\right)d\alpha = \frac{1}{6}R^2\alpha^3.$$

**548.** Por ser $m_1 M_1$ el radio, $R_1$, de curvatura de la evolvente considerada, en el punto $M_1$, este radio, en función del $R$, del círculo, tendrá por expresión $R_1 = \alpha R$, y, por lo tanto, la *ecuación intrínseca* de la evolvente será: $R_1^2 = 2sR$.

Luego, *cuando la curva de este nombre rúede sobre la recta OA, indefinidamente prolongada* (eje de las abscisas), *los centros de curvatura, correspondientes á los puntos donde la curva sea tangente á esta recta, se hallarán situados sobre la parábola representada por la ecuación*

$$y^2 = 2R\,(x - R).$$

(Cesàro, *Mathesis*, 1884, p. 233.)

**459.** *La podaria de la evolvente del círculo, relativamente al punto O, es una espiral de Arquímedes.* (Mannheim: *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1880, p. 186.)

La tangente á la curva de que se trata tiene, en efecto, por ecuación ésta:

$$Y\cos\alpha - X\,\mathrm{sen}\,\alpha = -R\alpha;$$

y la perpendicular á la tangente, trazada desde el mismo punto $O$, esta otra:

$$Y\,\mathrm{sen}\,\alpha + X\cos\alpha = 0.$$

De las cuales se desprenden para $X$ é $Y$ los valores siguientes:

$$X = -R\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad \text{é} \quad Y = -R\alpha\cos\alpha;$$

y de aquí, para ecuación cartesiana de la *podaria*, la siguiente:

$$X^2 + Y^2 = R^2 \operatorname{arc}^2 \operatorname{tang} \frac{X}{Y}.$$

Ó, en *coordenadas polares:*

$$\rho = R\theta,$$

representando por $\rho$ el radio vector de la curva, contado desde el origen, y por $\theta$ el ángulo formado por el radio de este nombre, correspondiente al punto $(X, Y)$, con el eje de las ordenadas.

**550.** De las dos ecuaciones fundamentales de la evolvente

$$x = R(\cos\alpha + \alpha\operatorname{sen}\alpha) \quad \text{é} \quad y = R(\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

se deducen sin dificultad las que siguen:

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = R \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = R^2(1 + \alpha^2).$$

Y de éstas, por eliminación de $\alpha$ en la primera, la siguiente, única, en coordenadas cartesianas, de la curva:

$$x\cos\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - R^2}{R^2}} + y\operatorname{sen}\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - R^2}{R^2}} = R,$$

equivalente, en coordenadas polares, por referencia al punto de origen $O$, á cualquiera de las dos siguientes:

$$\rho\cos\left(\alpha - \sqrt{\frac{\rho^2 - R^2}{R^2}}\right) = R, \quad \text{ó} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\rho^2 - R^2}{R^2}} - \operatorname{arc}\cos\frac{R}{\rho}$$

De donde, por referencia al Núm. 453, y suponiendo que $\rho\rho_1 = R^2$, se desprende, en conclusión, que *la curva inversa de la evolvente del círculo por referencia al mismo punto mencionado, es una espiral tractriz.* (Haton de la Goupilliere: *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1863, p. 498.)

**551.** Del estudio de la *evolvente del círculo* y determinación de la lon-

gitud de sus arcos, y extensión de las áreas de la misma curva, entre determinados límites, trató JUAN BERNOULLI en sus *Lectiones Calculi integralis (Opera omnia,* t. III, p. 446). Y, muy recientemente, el geómetra italiano PIRONDINI ha vuelto á discurrir sobre la misma materia, ampliándola con nuevas y muy interesantes investigaciones, en el *Periodico di Matematica (Livorno,* t. XII, p. 112, 1897).

## V

### EPICICLOIDES É HIPOCICLOIDES CONTRAÍDAS Y DILATADAS

**552.** Sábese ya que, cuando una circunferencia *móvil* rueda sin resbalar, ó de un modo continuo, sobre otra *fija,* tangente á ésta *exteriormente,* cualquiera de sus puntos engendra otra curva, llamada *epicicloide* (Núm. **516**). Pero si el punto generador corresponde, no precisamente á la circunferencia primera, sino á la región de su plano, interior ó exterior á ella, supuesta móvil también, con igual y simultáneo movimiento, la curva resultante, epicicloide asimismo, será *epicicloide contraída,* en un caso, y *dilatada,* en otro. Y, por referencia á la *hipocicloide* (Núm. **525**), ó curva, engendrada por un punto de una circunferencia *móvil,* que rueda *interiormente* á otra *fija,* ó directriz, podrá decirse, análogamente, que serán *hipocicloides contraídas* las procedentes de los puntos del plano de la circunferencia móvil, *interiores* á ella; y *dilatadas* las generadas por los *exteriores.*

Representando por $R$ el radio de la circunferencia fija; por $r$ el de la móvil; por $a$ la distancia del punto generador de la curva al centro de la primera; y por $\alpha$ el ángulo que forma la recta que une los centros de ambas circunferencias con el eje de las abscisas, por procedimiento análogo al expuesto en el caso de las epicicloides ordinarias (Núm. **516**), concluyese que las epicicloides *contraídas* y *dilatadas* tienen por ecuaciones las siguientes:

$$x = (R + r)\cos\alpha - a\cos\frac{R+r}{r}\alpha \quad \text{é} \quad y = (R + r)\operatorname{sen}\alpha - a\operatorname{sen}\frac{R+r}{r}\alpha.$$

**553.** Las curvas á que estas ecuaciones se refieren compónense de series de arcos iguales, en número finito ó infinito, según que $\frac{R}{r}$ sea racio-

nal ó irracional: siendo, además, cosa fácil ver que los arcos componentes de las series, poseen, aisladamente considerados, análoga figura á la de los arcos componentes también de las *cicloides contraídas ó dilatadas*, estudiadas en los Núms. **510** é inmediatos siguientes (figs. 107 y 108), hallándose ahora reemplazada la base $OO_1$ de entonces por un arco del *círculo fijo*, de longitud igual á la *circunferencia móvil*, $2\pi r$.

**554.** E igualmente se advierte, procediendo con atención en el estudio de este asunto, que, como en el caso de las *epicicloides ordinarias*, es aplicable el método de Descartes al trazado de tangentes á las nuevas curvas; porque la *normal* á la curva en cualquier punto pasa también ahora por aquel otro punto donde el círculo generador correspondiente *toca al círculo fijo:* como entonces tocaba al círculo director del movimiento.

**555.** El radio $\rho$ de curvatura de las *epicicloides* de que tratamos, *contraídas ó dilatadas*, suponiendo que sea $\beta = \frac{R}{r}\alpha$, tiene por expresión la siguiente:

$$\rho = \frac{4(R+r)[r^2+a^2-2ar\cos\beta]^{\frac{3}{2}}}{r^3+a^2(R+r)-a(R+2r)r\cos\beta}.$$

La cual muestra que las epicicloides solamente poseen *puntos de retroceso reales*, cuando $a = r$, ó en el caso de la *epicicloide ordinaria;* y *puntos de inflexión*, cuando

$$a < r \quad \text{y} \quad R > \frac{r(r-a)}{a}, \quad \text{ó} \quad a > r \quad \text{y} \quad R < \frac{r(r-a)}{a};$$

caso el último á que corresponden los valores de $\beta$, determinados por la igualdad

$$\cos\beta = \frac{r^3+a^2(R+r)}{ar(R+2r)}.$$

**556.** La diferencial del arco $s$ de las mismas epicicloides depende de la fórmula

$$ds^2 = (R+r)^2\left[1+\frac{a^2}{r^2}-2\frac{a}{r}\cos\beta\right]d\alpha^2.$$

Ó, poniendo por $\beta$ la expresión $\pi + 2\theta$,

$$ds^2 = 4(R+r)^2\left(\frac{r+a}{R}\right)^2\left[1 - 4\frac{ar}{(r+a)^2}\operatorname{sen}^2\theta\right]d\theta^2.$$

Luego *la rectificación de los arcos de epicicloides, contraídas ó dilatadas, depende de la de arcos de elipse.* Lo cual constituye una ampliación del teorema de Pascal, relativo á las *cicloides* de los mismos nombres (Número **514**), descubierta por NICOLLE. (*Mémoires de l'Académie*, París, 1708.)

**557.** Advirtióse en el Núm. **159** que la curva denominada *caracol de* PASCAL era una epicicloide, engendrada por un punto de la circunferencia de radio $R$, cuando rueda sobre otra, fija, del mismo radio. Lo cual puede ahora demostrarse sencillamente.

Suponiendo, en efecto, que $R = r$, de las ecuaciones obtenidas en el Núm. **552** se deducen para este caso particular las que siguen:

$$x = 2R\cos\alpha - a\cos 2\alpha \quad \text{é} \quad y = 2R\operatorname{sen}\alpha - a\operatorname{sen}2\alpha,$$

equivalentes á estas otras:

$$x^2 + y^2 = 4R^2 + a^2 - 4Ra\cos\alpha \quad \text{y} \quad x = 2R\cos\alpha - a(2\cos^2\alpha - 1),$$

y de las cuales, por eliminación entre ellas de $\cos\alpha$, se infiere que

$$(x^2+y^2-4R^2-a^2)^2 = -8R^2ax + 8R^2a^2 - 4R^2(x^2+y^2-4R^2-a^2).$$

Ó, trasladando el origen de las coordenadas al punto $(a, 0)$, para lo cual basta poner $x$ en vez de $x + a$, se halla finalmente que

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Ecuación que, en coordenadas polares, se convierte en la que sigue:

$$\rho = -2a\cos\theta \pm 2R,$$

correspondiente al *caracol* mencionado.

**558.** A propósito de las *hipocicloides,* baste saber que sus ecuaciones son éstas:

$$x = (R - r)\cos\alpha + a\cos\frac{R - r}{r}\alpha \quad \text{é} \quad y = (R - r)\operatorname{sen}\alpha - a\operatorname{sen}\frac{R - r}{r}\alpha$$

De las cuales se deducen resultados análogos á los acabados de consignar, por referencia á las *epicicloides contraídas* y *dilatadas.*

**559.** A las dos variedades de curvas extendió, en 1869, FOURET el teorema de EULER, relativo á la doble generación de las *epicicloides* é *hipocicloides ordinarias* (Núm. 522). Por sencillo procedimiento geométrico, FOURET demostró, en efecto *(Nouvelles Annales,* 2.ª serie, t. VIII, 1869, p. 162), que las curvas de estos nombres pueden ser engendradas por dos círculos diferentes, de radios $r$ y $r_1$, rodando en contacto con otros dos, *fijos,* de radios $R$ y $R_1$, siempre que los cuatro radios y las distancias, $a$ y $a_1$, del punto generador, en cada caso, á los centros de los *círculos móviles,* satisfagan á las siguientes condiciones:

$$R_1 = a\frac{R}{r}, \quad r_1 = a\frac{R \pm r}{r}, \quad \text{y} \quad a_1 = R \mp r.$$

**560.** Para dar por ultimada la teoría de las *cicloides, epicicloides* é *hipocicloides,* en este largo Capítulo X expuesta, advertiremos que de las *podarias* de estas curvas, de sus *paralelas* y *evolventes,* y de otras curvas, de atractivo estudio, con ellas también estrechamente ligadas, trató BARISIEN en dos interesantes artículos, publicados en el *Journal de Sciencias Mathematicas (Coimbra,* t. XIV, p. 121, y t. XV, p. 47), donde hallará el lector sus ecuaciones y la deducción razonada de los valores de sus áreas y de las longitudes de sus arcos, con otros detalles geométricos, merecedores de atención asimismo.

## VI

### RULETA DE DELAUNAY

**561.** Aplícase el nombre de *ruleta de* DELAUNAY, por su modo de generación, y en recuerdo del ilustre geómetra que estudió primeramente sus más salientes propiedades, á la curva engendrada por cualquiera de los focos de una elipse ó de una hipérbola, cuando la generatriz rueda sin resbalar sobre una recta indefinida á ella tangente. *(Journal de Liouville, 1.ª serie, t.* VI, 1841).

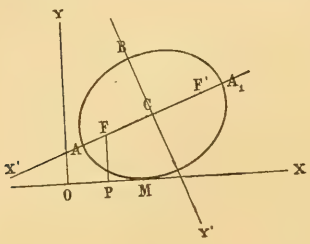


Figura 138.

Consideremos por de pronto, y exclusivamente casi, el supuesto de ser la generatriz una elipse, $AMB$ (fig. 138), de semiejes $CA = a$ y $CB = b$; focos situados en $F$ y $F_1$; y semidistancia focal, $CF = c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Por referencia á los ejes coordenados, $CX'$ y $CY'$, *móviles con la generatriz*, la ecuación de ésta será

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Y, designando por $M$ el punto de su tangencia con la recta $OX$, sobre la cual rueda, adoptada como eje permanente de las abscisas; por $FP$ la perpendicular á este eje, trazada desde el foco $F$; y por $AA_1$ el eje de la elipse generatriz, coincidente, en su posición inicial, con el de las ordenadas, $OY$, las coordenadas $x$ é $y$ del $F$, generador de la ruleta, serán éstas:

$$y = FP \quad \text{y} \quad x = OM - PM.$$

Determinando ahora, con los recursos propios de la *Geometría Analítica*, la distancia $FP$, comprendida entre el foco $F$, cuyas coordenadas,

por referencia al sistema de los ejes móviles, son $c$ y $0$, y la tangente $OX$, en el punto $M(x', y')$, hállase que

$$y = b\sqrt{\frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}}.$$

Por ser $FM = a - \frac{cx'}{a}$, también se deduce sin dificultad, que

$$MP = \sqrt{FM^2 - y^2} = \frac{cyy'}{b^2}.$$

Y, finalmente, por definición

$$OM = \text{arc } MA = s'.$$

Las ecuaciones de la ruleta, por referencia á los ejes fijos, $OX$ y $OY$, serán, pues, en consecuencia de esto,

$$x = s' - \frac{cy'y}{b^2} \quad \text{é} \quad y = b\sqrt{\frac{a^2 - cx'}{a^2 + cx'}},$$

las cuales determinan los valores de $x$ é $y$ en función de la cantidad arbitraria $x'$.

562. Del modo de generación de la *ruleta* se deduce que esta curva

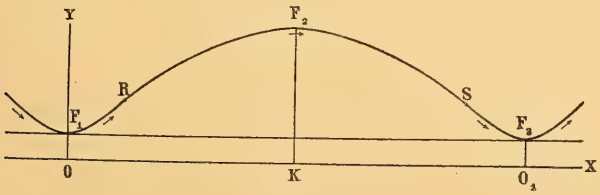



Figura 139.

constará de un número infinito de arcos, iguales unos á otros, como el representado en la figura 139.

El arco componente, tomado como ejemplo, arranca de un punto $F_1$ situado en el eje de las ordenadas, á la distancia $a - c$ del de las absci-

sas, igual á la del *foco generador* al vértice más próximo de la elipse; se levanta luego, desviándose del segundo de aquellos ejes, hasta llegar á otro punto, $F_2$, cuya ordenada, $a + c$, es igual á la del mismo foco al vértice de él más apartado, y la abscisa á la longitud de la mitad de la elipse en movimiento; y se aproxima, finalmente, en la sucesión de éste, al eje de las abscisas, describiendo un arco, $F_2 F_3$, igual al $F_1 F_2$, y simétricamente situado por referencia á $KF_2$.

Por medio de la segunda de las ecuaciones de la ruleta, combinada con la ecuación de la elipse, se obtienen las igualdades

$$x' = \frac{a^2}{c} \cdot \frac{b^2 - y^2}{b^2 + y^2} \quad \text{é} \quad y' = \frac{b^2 \sqrt{4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}}{c\,(b^2 + y^2)},$$

de las cuales resulta (SERRET: *Calcul intégral*, 1880, p. 498)

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2} = \frac{8a^2 b^2 y^2\, dy}{(b^2 + y^2)^2 \sqrt{4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}} \quad \text{y}$$

$$\frac{c}{b^2}\, d\,(y y') = \frac{8a^2 b^2 y^2 - (b^2 + y^2)^3}{(b^2 + y^2)^2 \sqrt{4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}}\, dy;$$

y, por consiguiente,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b^2 + y^2}{\sqrt{4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2}}.$$

Igualdad esta última que determina el coeficiente angular de las tangentes á la curva considerada, y demuestra que $\frac{dy}{dx} = 0$, cuando $y = a - c$ é $y = a + c$; y, por lo tanto, que las tangentes en los puntos $F_1$ y $F_2$ son paralelas al eje de las abscisas.

Derivando la ecuación anterior, relativamente á $y$, hállase también que

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{4a^2 y\,(y^2 - b^2)}{[4a^2 y^2 - (b^2 + y^2)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Luego $\frac{d^2 x}{dy^2}$ es nula cuando $y = b$: de manera que la curva posee dos

inflexiones en los puntos $R$ y $S$, cuyas ordenadas son iguales á $b$. Y como á $y = b$ corresponden los valores $x' = 0$ é $y' = b$, infiérese que la abscisa del primero de estos puntos es igual á la longitud de un cuadrante de la elipse, y el coeficiente angular de la tangente en aquel punto igual á $\frac{c}{b}$.

**563.** El radio de curvatura de la *ruleta de* DELAUNAY tiene por expresión

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}} = \frac{2ay^2}{y^2 - b^2}.$$

Y la longitud de la normal esta otra:

$$N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{2ay^2}{y^2 + b^2}.$$

Luego entre $R$ y $N$ existe la siguiente notable relación, descubierta por el mismo DELAUNAY:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{N} = \frac{1}{a}.$$

**564.** Para estudiar la *ruleta*, engendrada por el foco interior de una rama de hipérbola, cuando esta rama rueda sobre una recta, basta en las fórmulas anteriores cambiar $b^2$ en $-b^2$. Y entonces fácilmente se ve que la curva se compone de una rama única, simétrica por referencia al eje de las ordenadas; la cual, partiendo del punto cuya ordenada es igual á $c - a$, se extiende indefinidamente hasta lo infinito, sin presentar en su trayecto *puntos de inflexión.*

**565.** DELAUNAY encontró ambas curvas aquí consideradas al proponerse determinar las superficies de revolución, de *curvatura media* constante. Sábese, en efecto, que los *radios de curvatura principales* de las mencionadas superficies son, en cada punto, el *radio de curvatura* de la *sección meridiana* y el *segmento* de la normal, comprendido entre aquel punto y el eje de revolución. Luego, representando por $R$ y $N$ este radio

y este segmento de la normal, el problema que se trata de resolver se halla formulado en la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{N}=\frac{1}{a},$$

á la cual satisfacen, por consiguiente, las superficies (Núm. **563**) cuyos meridianos son *ruletas de* DELAUNAY.

**566.** Las ruletas á que nos referimos fueron también encontradas por DELAUNAY al ocuparse en otro problema interesante de *Cálculo de las Variaciones*.

Si queremos, en efecto, determinar la curva plana que, girando al rededor de un eje, situado en su plano, engendra la *superficie de revolución mínima*, correspondiente á un volumen dado, será menester que hallemos el mínimo valor de la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

habida cuenta de esta ecuación condicional:

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx = \text{const.}$$

Cuestión de *mínimos relativos*, que puede resolverse por método conocido, y que produce para ecuación diferencial de las curvas pedidas (SERRET: *Calcul Intégral*, 1880, p. 733) la siguiente:

$$dx=\frac{(y^2\pm b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2-(y^2\pm b^2)^2}};$$

la misma, renglones antes ya deducida, representante de las *ruletas de* DELAUNAY.

**567.** Antes de dar por ultimado este asunto, es de advertir que, por procedimiento analítico, análogo al del Núm. **561**, puede también demostrarse que, cuando una parábola rueda sobre una recta, su foco describe una *catenaria*. Por lo cual propuso LINDELÖF denominar también las cur-

vas de DELAUNAY con el nombre de *catenarias, elíptica* una, é *hiperbólica* la otra, según fuese la *generatriz* una elipse ó una hipérbola.

Y añadiremos más: que CESÀRO estudió estas curvas valiéndose de su ecuación común, expresa en *coordenadas intrínsecas*, en un artículo publicado en los *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1888, donde expuso la *Teoría general de las Ruletas*, y, como aplicación de ella, la particular de la *ruleta de* DELAUNAY.

## VII

### PSEUDOCICLOIDES

**568.** Con el nombre de *pseudocicloides* fueron estudiadas por CESÀRO en sus *Lezioni di Geometria intrinseca (Napoli*, 1856, p. 12 y p. 32) las curvas representadas por las ecuaciones, en *coordenadas* del mismo nombre,

$$s^2 - k^2\rho^2 = a^2 \quad \text{y} \quad k^2\rho^2 - s^2 = a^2,$$

por motivos que se apuntarán más adelante (Núm. **574**).

**569.** Fijemos la atención por de pronto en la primera de estas ecuaciones.

Por ser independiente aquella ecuación de los ejes de las coordenadas, puédense tomar arbitrariamente el punto inicial de la curva á que corresponde y la tangente á la misma curva en este punto. Admitamos, pues, como punto inicial, el $A$ de la figura 140, correspondiente á $s = a$, y como tangente inicial la recta $A_1AX$.

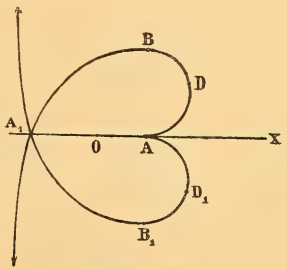


Figura 140.

Los ángulos, $\varphi$, que con esta tangente forman las demás, pueden representarse por la fórmula

$$(1) \quad \frac{\varphi}{k} = \frac{1}{k}\int_a^s \frac{ds}{\rho} = \int_a^s \frac{ds}{\sqrt{s^2 - a^2}} = \log\frac{s + \sqrt{s^2 - a^2}}{a}.$$

Y, adoptando para eje de las abscisas la recta $A_1 A X$, y para origen de las coordenadas un punto $O$ de esta recta, tal que sea $OA = \frac{a}{k^2+1}$, hallaremos que

$$x = \int_a^{\varphi} \cos\varphi \frac{ds}{d\varphi} d\varphi + \frac{a}{k^2+1} \quad \text{é} \quad y = \int_a^{\varphi} \operatorname{sen}\varphi \frac{ds}{d\varphi} d\varphi.$$

Pero de la fórmula (1) y de la ecuación de la curva se deduce este valor de $s$, en función de $\varphi$:

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}\right).$$

Luego

$$x = \frac{a}{2k}\int_0^{\varphi} \cos\varphi \left(e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}\right) + \frac{a}{k^2+1} \text{ é } y = \frac{a}{2}\int_0^{\varphi} \operatorname{sen}\varphi \left(e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}\right); \text{ ó}$$

$$x = \frac{ka}{2(k^2+1)}\left[\frac{1}{k}\cos\varphi \frac{e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2} + \operatorname{sen}\varphi \frac{e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2}\right], \quad \text{é}$$

(2)

$$y = \frac{ka}{2(k^2+1)}\left[\frac{1}{k}\operatorname{sen}\varphi \frac{e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2} - \cos\varphi \frac{e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2}\right].$$

**570.** Con lo cual podemos ahora determinar la forma de la curva.

Si en estas ecuaciones ponemos $-\varphi$ por $\varphi$, vese, en efecto, que $x$ no cambia de valor ni de signo, y que $y$ cambia solamente de signo: luego la curva es simétrica, relativamente al eje de las abscisas.

En el punto $A$ la curva es, como ya se dijo, tangente al eje de las abscisas, y aquel punto $A$ lo será de *retroceso*.

Cuando el valor de $s$ sea inferior al de $a$, la curva será imaginaria.

Y representando por $\rho_1$ el radio vector de un punto cualquiera de la curva, hállase que

$$\rho_1^2 = \frac{a^2 k^2}{4(k^2+1)^2}\left[\frac{1}{k^2}\left(e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}\right)^2 + \left(e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}\right)^2\right].$$

Por medio de esta fórmula y de la (1) vese que $\varphi$ y $\rho_1$ crecen indefinidamente, conforme $s$ crece; y que, por lo tanto, cada rama de la curva debe dar un número infinito de vueltas alrededor del punto $O$, alejándose cada vez más de este punto con tendencia á lo infinito.

**571.** Sea $V$ el ángulo que el radio vector forma con la tangente en el punto á que corresponde, y hallaremos que

$$\operatorname{tang} V = \frac{xy' - yx'}{xx' + yy'} = k\,\frac{e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}}{e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}}.$$

De manera que, cuando $\varphi$ se aproxime indefinidamente al $\infty$, $\operatorname{tang} V$ propenderá á confundirse con $\operatorname{tang} k$.

La proyección del radio vector, $\rho_1$, sobre la tangente es igual á $\rho_1 \cos V$, y, por lo tanto, á $\dfrac{s}{k^2+1}$. Y la del mismo $\rho_1$ sobre la normal, igual á $\rho_1 \operatorname{sen} V$, y, en consecuencia, á $\dfrac{k^2\rho}{k^2+1}$.

**572.** Consideremos ahora la segunda curva, que tiene por ecuación

$$k^2\rho^2 - s^2 = a^2.$$

En este caso,

$$\frac{\varphi}{k} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s^2+a^2}} = \log\frac{s+\sqrt{s^2+a^2}}{a};$$

de manera que

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}\right), \quad \rho = \frac{a}{2k}\left(e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}\right),$$

$$x = \frac{ka}{k^2+1}\left[\frac{1}{k}\cos\varphi\,\frac{e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2} + \operatorname{sen}\varphi\,\frac{e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2}\right],$$

$$y = \frac{ka}{k^2+1}\left[-\cos\varphi\,\frac{e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2} + \frac{1}{k}\operatorname{sen}\varphi\,\frac{e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}}{2}\right], \quad \text{y}$$

$$\rho_1^2 = \frac{a^2k^2}{4(k^2+1)^2}\left[\frac{1}{k^2}\left(e^{\frac{\varphi}{k}} - e^{-\frac{\varphi}{k}}\right)^2 + \left(e^{\frac{\varphi}{k}} + e^{-\frac{\varphi}{k}}\right)^2\right],$$

tomando ahora por origen de las coordenadas el punto $O$ (fig. 141) sobre la perpendicular $VA$ á la $AA_1$, á la distancia $\frac{a}{k^2+1}$ del punto $O$.

Por medio de estas fórmulas conclúyese, como en el caso anterior, que la curva parte del punto $A$, correspondiente á $s=0$, donde posee una tangente paralela al eje de las abscisas; que es simétrica relativamente al eje de las ordenadas; y que da también un número infinito de vueltas alrededor del origen, alejándose indefinidamente de este punto.

Y, procediendo como en el caso anterior, dedúcese, parecidamente, que en este caso el ángulo $V$ varía desde $\frac{1}{2}\pi$ hasta arc tang $k$, y que las proyecciones del radio vector, $\rho_1$, sobre la tangente y sobre la normal, son también iguales á $\frac{s}{k^2+1}$ y $\frac{k^2\rho}{k^2+1}$.

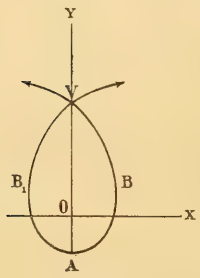


Figura 141.

**573.** Determinando las coordenadas del centro de curvatura de las pseudocicloides por medio de las fórmulas conocidas, veríase asimismo fácilmente que *la evoluta de la pseudocicloide, representada por la ecuación* $k^2\rho^2 = s^2 - a^2$, *es la pseudocicloide á que corresponde la ecuación* $k^2\rho^2 = s^2 + a^2$; *y que, recíprocamente, la evoluta de esta segunda pseudocicloide coincide con la primera.*

Las curvas, pues, en este lugar consideradas, representan las soluciones del problema estudiado por EULER en el tomo I de las *Nova Acta Petrop.* (1783), que tenía por objeto *hallar las curvas iguales á una de sus evolutas sucesivas:* por lo cual algunos autores las denominan *curvas de* EULER.

**574.** Las así denominadas pueden también calificarse de *epicicloides,* engendradas por *círculos imaginarios,* conforme enseñó SAUSSURE en un artículo, inserto en el tomo XVII, p. 269, del *American Journal of Mathematics,* donde á las por nosotros aquí consideradas (Núm. **569**), aplicó el nombre de *paracicloides,* y á las de que se trata en el Núm. **572** el de *hipercicloides.*

Poniendo, en efecto, en la *ecuación intrínseca* de las epicicloides

$$R^2 s^2 + (R + 2r)^2 \rho^2 = 16 (R + r)^2 r^2,$$

obtenida por eliminación de $\beta$ entre las ecuaciones de los Núms. **520** y **524**,

$$s = -\frac{4r}{R}(R + r)\cos\frac{1}{2}\beta \quad \text{y} \quad \rho = \frac{4 (R + r) r \operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta}{R + 2r},$$

en lugar de $R$ y $r$, los valores

$$R = -\frac{a}{1 + k^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{a (1 - ki)}{2 (1 + k^2)}, \text{ siendo } i = \sqrt{-1},$$

hállase este resultado:

$$k^2 \rho^2 = s^2 - a^2;$$

y, poniendo

$$R = -\frac{ai}{1 + k^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{a (k + i)}{2 (1 + k^2)},$$

este otro:

$$k^2 \rho^2 = s^2 + a^2.$$

Curvas estas últimas que se hallan á su vez comprendidas, como casos particulares, en el grupo de las estudiadas por WÖLFFING en un artículo publicado en el *Zeitschrift für Mathematik*, t. XLIV, y cuyas ecuaciones se deducen sustituyendo en las contenidas en el Núm. **552**, para determinar las coordenadas de las epicicloides, *prolongadas y contraídas*, $R$ y $r$ y $a$ y $\alpha$, por valores imaginarios. A las curvas correspondientes á las ecuaciones así encontradas denominó el mismo WÖLFFING *pseudotrocoides*.

# CAPÍTULO UNDÉCIMO

## VARIAS CLASES DE CURVAS

### I

### PERLAS DE SLUSE

**575.** PASCAL y SLUSE dieron el nombre de *perlas* á las curvas representadas por la ecuación

$$y^n = k\,(a - x)^p\,x^m,$$

en la cual $m$, $n$ y $p$ designan números enteros y positivos.

Las noticias más antiguas de estas curvas encuéntranse en tres cartas de SLUSE á HUYGENS, del 14 de Agosto de 1657 y 8 de Enero y 12 de Abril de 1658, y otra á PASCAL del 6 de Abril de 1658. (Cartas de SLUSE, publicadas por C. LE PAIGE en el *Bulletino di Boncompagni.— Roma*, t. XVII, 1884). En esta última carta atribuye el eminente geómetra de Liège á PASCAL la primitiva noción de estas curvas, cuyas tangentes, añade, determinó él en todos los casos, así como las dimensiones de sus áreas, sus centros de gravedad, y los volúmenes de sus sólidos de revolución, en algunos casos particulares.

Y, por su parte, PASCAL, en carta del 10 de Diciembre del mismo año (*Oeuvres, ed. Hachette*, t. III, p. 444), comunicó á SLUSE una aplicación importante de las *perlas* á la resolución de cierto problema de *Geometría de los Sólidos*.

El método empleado por SLUSE para determinar las tangentes á las *perlas*, hállase expuesto en carta suya, dirigida también á PASCAL en 29 de Junio de 1658: método que constituye una interesante aplicación del general de las tangentes, y que es uno de los principales descubrimientos del mismo SLUSE.

**576.** La forma de cada *perla* depende de los valores de las constantes $m$, $n$ y $p$, que figuran en la ecuación general anterior.

Por ser

$$y' = \frac{\sqrt[n]{k}}{n} x^{\frac{m}{n}-1} (a-x)^{\frac{p}{n}-1} [am - (p+m)x] = \frac{y[am-(p+m)x]}{nx(a-x)},$$

vese que cualquier *perla* corta el eje de las abscisas en los puntos donde $x = 0$ y $x = a$, siendo la tangente, en el primero de estos puntos, paralela al *eje de las abscisas* cuando $m > n$, y al de las ordenadas cuando $m < n$; y, en el segundo, paralela á uno ú otro eje, si $p > n$ ó $p < n$, sin contar que la tangente es además paralela al eje de las abscisas allí donde la abscisa es igual á $\frac{ma}{m+p}$.

**577.** Representando por $S_t$ la subtangente, será

$$S_t = \frac{nx(a-x)}{ma-(p+m)x};$$

lo cual permite construir sencillamente en cualquier caso las tangentes á las *perlas*.

**578.** El área $A$ de la zona, limitada por el arco de una perla, por el eje de las abscisas, y por las paralelas al eje de las ordenadas, trazadas por los puntos cuyas abscisas son $x_0$ y $x_1$, tiene por expresión la fórmula

$$A = \sqrt[n]{k} \int_{x_0}^{x_1} (a-x)^{\frac{p}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx:$$

cuyo segundo miembro puede representarse por funciones elementales, cuando alguno de los números $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{n}$ ó $\frac{m+p}{n}$ es entero.

Conclúyese, pues, que los problemas de la determinación de las áreas de las *perlas* coinciden con los de integración de las *expresiones diferenciales binomias*, y que, al resolver Sluse en muchos casos los primeros, resolvió también implícitamente los segundos, si no en todos, en algunos

de aquellos, bastante frecuentes, en que las integrales de estas expresiones pueden expresarse por funciones elementales.

579. Al volumen, $V$, del sólido, engendrado por el movimiento de la zona, cuya área acabamos de considerar, alrededor del eje de las abscisas, corresponde la fórmula

$$V = \pi k^{\frac{2}{n}} \int_{x_0}^{x_1} (a - x)^{\frac{2p}{n}} x^{\frac{2m}{n}} dx,$$

resoluble en funciones elementales cuando alguno de los números $\frac{2p}{n}$, $\frac{2m}{n}$, ó $\frac{2(m+p)}{n}$, es entero.

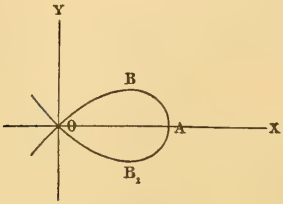



Figura 142.

580. Entre las variedades de *perlas* son las de mayor interés aquellas que tienen por ecuación ésta:

$$y^n = kx^n (a - x),$$

á las cuales PASCAL denominó *perlas de orden* $n + 1$.

Si $n$ es *par*, la forma de la curva es la de la figura 142: simétrica relativamente al eje de las abscisas; y secante al eje de este nombre en el punto $A$, situado á la distancia $a$ del $O$. La abscisa del punto $B$, donde $y$ pasa por un valor máximo, es igual á $\frac{na}{n+1}$; y los coeficientes angulares de las tangentes, en el punto doble $O$, son iguales á $\pm n(ka)^{\frac{1}{n}}$. La curva, además, se extiende indefinidamente en el sentido de las abscisas negativas.

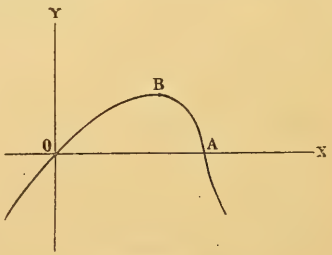



Figura 143.

Si $n$ es *impar*, la curva tiene la forma indicada en la figura 143, en la cual la distancia $OA$ es también igual á la $a$; y la abscisa del punto $B$,

donde la ordenada es máxima, igual asimismo á $\frac{na}{n+1}$. Pero la curva se extiende en este caso indefinidamente, tanto en el sentido de las abscisas negativas como en el de las positivas, cortándola solamente en un punto cualquier paralela al eje de las ordenadas.

**581.** En el caso de que ahora tratamos, la ecuación de la tangente á la perla en el punto $(x, y)$ tiene por expresión

$$Y - y = \frac{y\,[na - (n+1)\,x]}{nx\,(a-x)}\,(X - x);$$

que se reduce, cuando $X = 0$, á esta otra:

$$Y = \frac{yx}{n\,(a-x)}.$$

Por medio de la cual con gran sencillez se construirá gráficamente la tangente.

**582.** En el caso de las *perlas particulares* á que nos referimos, el valor del área $A$ puede calcularse por la siguiente fórmula:

$$A = k^{\frac{1}{n}}\left\{(a-x_1)^{\frac{n+1}{n}}\left[\frac{n}{2n+1}(a-x_1) - \frac{na}{n+1}\right]\right.$$
$$\left. - (a-x_0)^{\frac{n+1}{n}}\left[\frac{n}{2n+1}(a-x_0) - \frac{na}{n+1}\right]\right\}.$$

De la cual, para expresión $A_1$ del arco $OBA$ en las figuras anteriores, se desprende la que sigue, poniendo para ello $x_0 = 0$ y $x_1 = a$:

$$A_1 = \frac{nk^{\frac{1}{n}}}{(n+1)\,(2n+1)}\,a^{\frac{2n+1}{n}}.$$

**583.** Las varias curvas á que en estos últimos párrafos nos hemos referido, hállanse comprendidas en el grupo representado por la ecuación

$$y = kx^{\alpha}\,(a-x)^{\beta},$$

en la cual $\alpha$ y $\beta$ serán *números positivos* siempre: *racionales* tratándose

de *perlas algébricas*, é *irracionales* ambos, ó *racional* uno é *irracional* otro, por referencia á las llamadas *transcendentes*. Y, en cualquier caso, la curva que se considere pasará por los puntos que tengan por abscisas 0 y $a$; y el área, limitada por la misma curva y la cuerda definida por estos dos puntos, tendrá por expresión

$$A = k\int_0^a x^\alpha (a-x)^\beta\, dx = k a^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\, dt$$

$$= k\, a^{\alpha+\beta+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

en la cual $\Gamma$ representa la función *gamma* de Euler.

Y, parecidamente, el volumen engendrado por la revolución del área $A$ alrededor del mismo eje de las abscisas, esta otra:

$$V = \pi k^2\int_0^a x^{2\alpha}(a-x)^{2\beta}\, dx$$

$$= \pi k^2 a^{2(\alpha+\beta)+1}\,\frac{\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma(2\beta+1)}{\Gamma[2(\alpha+\beta)+1]}.$$

584. Concluiremos advirtiendo que entre las *perlas de* Sluse hállanse comprendidas las curvas á que corresponden las ecuaciones

$$ax^2 - x^3 = b^2 y, \quad ax^3 - x^4 = a^2 y^2, \quad \text{y} \quad ax^3 - x^4 = y^4,$$

particularmente estudiadas por el mismo Sluse y por Huygens y Schooten en varias cartas, que pueden verse en el tomo II de las *Obras completas* del segundo de estos tres geómetras.

A la segunda de estas curvas, de que ya se trató con algún detalle en la pág. 215 del presente libro, aplicó Huygens el nombre de *cuártica piriforme*, en carta dirigida á Sluse, fechada el 22 de Enero de 1658 (*Obras* citadas, II, pág. 123). Y á la primera llámanla algunos autores *parábola de* Wallis.

## II

### ROSÁCEAS DE G. GRANDI

**585.** Aplícase el nombre de *rosáceas, ó de rodóneas,* á las curvas comprendidas en la ecuación general siguiente, referida á coordenadas polares:

$$\rho = a \operatorname{sen} m\theta.$$

Curvas por vez primera estudiadas por GUIDO-GRANDI en un opúsculo titulado *Flores geometrici ex rhodonearum et clæliarum curvarum descriptione resultantes,* y publicado en Florencia, año de 1728.

**586.** La figura característica de cada rosácea depende del valor numérico de $m$.

Cuando $\theta$ (fig. 144) varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{m}$, $\rho$ aumenta desde 0 hasta $OA = a$, y disminuye después desde $a$ hasta 0: de manera que el punto generador de la curva describe una rama ú *hoja* de la curva, tangente á las rectas que forman con el eje de las abscisas ángulos iguales á 0 y á $\frac{\pi}{m}$, y simétrica relativamente á la recta $OA$, correspondiente á $\theta = \frac{\pi}{2m}$. Y una segunda *hoja,* igual á la primera, resultará descrita á continuación, si $\theta$ varía luego desde $\frac{\pi}{m}$ hasta $\frac{2\pi}{m}$. Ó, en términos generales, á los valores de $\theta$, comprendidos entre cada dos números sucesivos de la serie

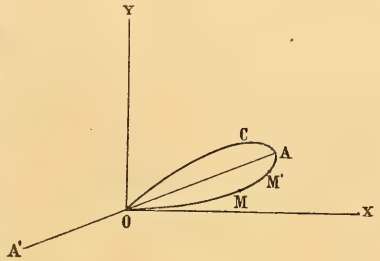



Figura 144.

$$0, \quad \frac{\pi}{m}, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{3\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \ldots$$

corresponderá una *hoja* de la curva; así como á los valores de $\theta$, componentes de la serie

$$\frac{\pi}{2m}, \quad \frac{3\pi}{2m}, \quad \frac{5\pi}{2m}, \quad \frac{7\pi}{2m}, \ldots$$

corresponderán los *ejes* de las hojas, iguales todas unas á otras.

**587.** En el supuesto de ser $m$ número irracional, las hojas á que acabamos de referirnos se diferenciarán unas de otras; su número total resultará *infinito;* y la curva entonces será *transcendente.* Pero, si $m$ es número racional, igual á $\frac{\alpha}{\beta}$, la *rosácea* correspondiente será una *curva algébrica.*

Para persuadirse de lo cual basta recordar que de las fórmulas de Trigonometría, que expresan los desarrollos de $\operatorname{sen}\alpha\frac{\theta}{\beta}$, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, ordenados por las potencias de $\operatorname{sen}\frac{\theta}{\beta}$ y $\cos\frac{\theta}{\beta}$, resulta que las cantidades $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$, y $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{\beta}\theta$ están ligadas por una relación algébrica, y advertir que de la ecuación de las *rosáceas* y de las ecuaciones, $x = \rho\cos\theta$ é $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, resulta que las mismas cantidades son también funciones algébricas de $x$ y de $y$. En este caso el número de *hojas* de la curva será finito y se determinará conforme ahora vamos á exponer.

1.° Si en $m = \frac{\alpha}{\beta}$, los números $\alpha$ y $\beta$ son *impares,* el punto generador de la curva vuelve á la posición $A$ cuando

$$\theta = \frac{(2\alpha + 1)\pi}{2m} = \frac{\pi}{2m} + \beta\pi,$$

porque entonces la dirección del vector, correspondiente á este valor de $\theta$, será $OA'$; y la ecuación de la curva dará para valor de este vector $\rho = -a$: luego el número de hojas de la rosácea resultará igual á $\alpha$.

2.° Si $\beta$ es *impar* y $\alpha$ *par,* aquel punto generador vuelve á la posición $A$, cuando

$$\theta = \frac{(4\alpha + 1)\pi}{2m} = \frac{\pi}{2m} + 2\beta\pi:$$

por cuanto la dirección del vector, correspondiente á este valor de $\theta$, será

entonces $OA$; su valor, dado por la ecuación de la curva, $\rho = a$; y el número de hojas de la curva igual á $2\alpha$.

Y 3.° Si $\beta$ es *par* y $\alpha$ *impar*, el mencionado punto generador de la curva regresa á la posición $A$, cuando

$$\theta = \frac{(4\alpha + 1)\pi}{2m} = \frac{\pi}{2m} + 2\beta\pi,$$

y el número de ramas de la *rosácea* será igual también á $2\alpha$, como en el segundo de los dos supuestos anteriores.

En la hipótesis particular de ser $\beta = 1$, vese, finalmente, que, cuando $m$ sea entero, el número de ramas de la rosácea será igual á $m$, ó á $2m$, según que $m$ sea *impar* ó *par*.

588. Para construir las *rosáceas* propuso Guido-Grandi el siguiente método.

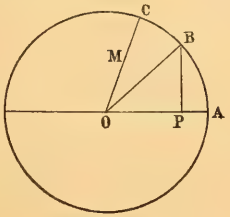


Figura 145.

En una circunferencia de radio igual á $a$ (fig. 145) y centro $O$, señalemos, á partir del punto $A$, dos arcos, $AB$ y $AC$, tales que sea $AB = mAC$; y sobre el radio $OC$ tomemos luego la longitud $OM$, igual al segmento $BP$ de la perpendicular trazada desde $B$ sobre $OA$: el punto $M$ corresponderá á la curva pedida, por cuanto, siendo $AOC = \theta$, inmediatamente se concluye que

$$\rho = OM = BP = a \operatorname{sen} BOA = a \operatorname{sen} m\theta.$$

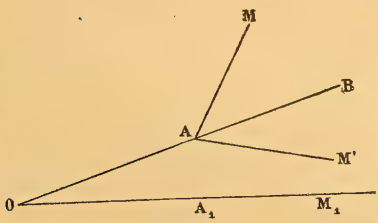


Figura 146.

Para lograr el mismo fin, ideó Pirondini (*Mathesis*, 1894, p. 15) este otro método. Tómense dos rectas iguales, $OA$ y $AM$ (fig. 146), articuladas en $A$ y $O$, y supongamos que ambas giran alrededor de estos puntos y en el mismo sentido, con velocidades cuya razón sea igual á $n$; y, además, que $A_1$ y $M_1$ sean las posiciones iniciales de $A$ y $M$. Pues con esto, y mediante la notación adjunta:

$$OM = \rho,\ MOM_1 = \omega,\ OA = \frac{1}{2}\,a,\ y\ AOM_1 = \alpha,$$

hallaremos que

$$\omega = \alpha + \frac{1}{2}\,n\alpha \quad y \quad \rho = a\cos\frac{n}{2}\,\alpha,$$

y, por lo tanto,

$$\rho = a\cos\frac{n}{n+2}\,\omega.$$

Cuando $MA$ se mueva en sentido contrario de $OA$, resultará del mismo modo, representando por $AM'$ la recta que en este caso sustituye á la $AM$,

$$\rho = a\cos\frac{-n}{n+2}\,\omega.$$

Y poniendo

$$\pm\frac{n}{n+2} = m, \quad y \quad \omega = \frac{\pi}{2\,m} - \theta,$$

hallaránse para $n$ dos distintos valores, á los cuales corresponde la misma rosácea, $\rho = a\ \text{sen}\,m\theta$: de donde se deduce que cada *rosácea puede ser engendrada de dos modos diferentes, por la rotación de OA y AM alrededor de O y A, con velocidades cuya razón sea constante.*

**589.** La *subnormal polar* de las rosáceas tiene por expresión la igualdad, fácil de construir,

$$S_n = am\cos m\theta.$$

En el punto $A$, como en los análogos de las demás hojas de la rosácea, vértices todos de estas hojas, ó ramas, de la curva, donde se verifica que $m\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\,\pi}{2}\ldots$, y, por lo tanto, $\cos m\theta = 0$, la subnormal es nula: luego los ejes de las ramas son *normales* á la curva.

**590.** Aplicando á las rosáceas la ecuación general de las normales á las curvas, expresa en coordenadas polares, hállase la ecuación

$$\frac{a}{\rho} = \frac{\cos(\theta - \theta_1)}{\text{sen}\,m\theta_1} + \frac{\text{sen}\,(\theta - \theta_1)}{m\cos m\theta_1},$$

en la cual $\theta_1$ representa el valor de $\theta$ en el punto donde esta recta es normal á la curva.

Y poniendo en esta ecuación $\theta = (m+1)\,\theta_1 + \frac{\pi}{2}$, conclúyese, finalmente, que

$$\rho = \frac{m}{1-m}\,a.$$

Luego *la normal á una rosácea, en el punto correspondiente á* $\theta = \theta_1$, *corta al vector, correspondiente al ángulo* $(m+1)\,\theta_1 + \frac{\pi}{2}$, *en el punto cuyo radio del mismo nombre se desprende de esta igualdad:* proposición demostrada por Aubry (*Journal des Mathématiques spéciales*, t. xvii, 1893, *p.* 173).

**591.** El radio de curvatura de las rosáceas puede determinarse por la fórmula

$$R = a\,m\,\frac{\left(1 - \frac{m^2-1}{m^2}\,\operatorname{sen}^2 m\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{2 - \frac{m^2-1}{m^2}\,\operatorname{sen}^2 m\theta}.$$

De la cual se infiere que las rosáceas carecen de puntos de inflexión reales.

Y que demuestra además, poniendo $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2\,m}$, que el radio de curvatura es, en el centro de las rosáceas, igual á $\frac{a\,m}{2}$, y en los vértices á $\frac{a}{m^2+1}$.

**592.** El valor del área, $A$, de una hoja de las rosáceas, según demostró Guido-Grandi, tiene por expresión:

$$A = \frac{\pi a^2}{4\,m}.$$

**593.** Pero la rectificación de las rosáceas no es tan sencilla, pues de-

pende de la rectificación de arcos de elipse, como también advirtió por vez primera el mismo GUIDO-GRANDI.

Consideremos, en efecto, una rama cualquiera de estas curvas.

La longitud del arco comprendido entre el origen de las coordenadas y el punto $(\vartheta, \rho)$ tiene por expresion general la siguiente:

$$s = \int_0^{\vartheta} \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\vartheta^2}}\, d\vartheta = a\, m \int_0^{\vartheta} \sqrt{1 - \frac{m^2 - 1}{m^2} \operatorname{sen}^2 m\vartheta}\, .\, d\vartheta;$$

ó, poniendo $m\vartheta = \omega$,

$$s = a \int_0^{\omega} \sqrt{1 - \frac{m^2 - 1}{m^2} \operatorname{sen}^2 \omega}\, .\, d\omega$$

De manera que aquella longitud depende de *una integral eliptica de segunda especie.*

Si es $m < 1$, el *módulo* de la integral precedente será *imaginario.* Pero, poniendo $\omega = \frac{\pi}{2} - \tau$, lo que da

$$s = -\frac{a}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\tau} \sqrt{1 - (1 - m^2) \operatorname{sen}^2 \tau}\, .\, d\tau,$$

$s$ dependerá asimismo de otra integral elíptica de *segunda especie*, y de *módulo real.*

De donde se deduce que la longitud del arco comprendido entre el origen y el vértice de una hoja tendrá por expresión

$$s = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{m^2 - 1}{m^2} \operatorname{sen}^2 \omega}\, d\omega, \text{ si } m > 1; \quad \text{y}$$

$$s = \frac{a}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (1 - m^2) \operatorname{sen}^2 \tau}\, d\tau, \text{ si } m < 1:$$

en atención á que, en el vértice, $\vartheta = \frac{\pi}{2m}$ y, por tanto, $\omega = \frac{\pi}{2}$ y $\tau = 0$.

**594.** Por ser las longitudes de los arcos de rosácea iguales á las de arcos de elipse, puédense extender á los primeros ciertas interesantes propiedades, conocidas y ya demostradas por referencia á los segundos. Fijémonos particularmente en el teorema aplicable á las rosáceas, que corresponde al de FAGNANO.

Consideremos (fig. 144, p.ª 481) los arcos de rosácea $OM$, $OM'$ y $OA$; y sean $\varphi$ y $\psi$ los valores de $\omega$ en los puntos $M$ y $M'$. El valor de $\omega$ en el punto $A$ será $\frac{\pi}{2}$.

Del teorema de adición de las integrales elípticas de segunda especie se infiere que

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

en el doble supuesto de ser

$$E(k, \omega) = \int_0^{\omega} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \omega}\, d\omega,$$

y de existir entre $\varphi$ y $\psi$ la relación

$$\cos\varphi \cos\psi = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \sqrt{1 - k^2}.$$

Pero cuando sea $m > 1$ (y del mismo modo se trataría el caso de ser $m < 1$),

$$OM = a\, E(k, \varphi) \quad \text{y} \quad OM' = a\, E(k, \psi); \quad \text{y}$$

$$OA = a\, E(k, \psi) \quad \text{y} \quad k^2 = \frac{m^2 - 1}{m^2}.$$

Luego

$$OM + OM' - OA = OM - AM' = \frac{a k^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}};$$

faltando ahora construir el segundo miembro de esta igualdad. Para lo cual basta advertir que, en el punto $M$, $\rho = a \operatorname{sen}\varphi$; y, por tanto, $d\rho = a \cos\varphi d\varphi$ de manera que

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

Y, en consecuencia,

$$\frac{ak^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = ak^2 \operatorname{sen}\varphi \frac{d\rho}{ds}.$$

Si advertimos, además, que $\frac{d\rho}{ds}$ es igual al coseno del ángulo $V$, formado por la tangente á la curva, con el radio vector del punto de contacto, concluiremos que

$$\frac{ak^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = ak^2 \cos V \operatorname{sen}\varphi;$$

ó, representado por $\varphi_1$ el valor de $\theta$ en el punto $M$,

$$\frac{ak^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = ak^2 \cos V \operatorname{sen}\frac{\varphi_1}{m}.$$

Igualdad de la cual sencillamente se desprende esta otra:

$$OM - AM' = a \frac{m^2 - 1}{m^2} \cos V \operatorname{sen}\frac{\varphi_1}{m},$$

cuyo segundo miembro muy fácilmente puede asimismo construirse.

## III

### ESPIGAS

**595.** Aubry *(Journal de Mathématiques spéciales*, 1895, p. 201) designó con el nombre de *espigas* á las curvas comprendidas en la ecuación

$$\rho = \frac{a}{\operatorname{sen} m\theta}.$$

Cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{m}$, $\rho$ decrece desde $\infty$ hasta $a$: valor éste que corresponde á $\theta = \frac{\pi}{2m}$; y crece después, desde $a$ hasta $\infty$. El punto

generador de la curva describe, pues, una rama infinita $BAC$ (fig. 147), de la cual $OA$ es un eje de simetría; y las rectas $OX$ y $OD$, que forman entre sí un ángulo igual á $\frac{\pi}{m}$, serán asíntotas de la curva.

Una segunda rama de la misma curva, igual á la anterior, resulta descrita cuando $\theta$ varía desde $\frac{\pi}{m}$ hasta $\frac{2\pi}{m}$.

Y en términos generales, á los valores de $\theta$, comprendidos entre cada dos números sucesivos de la serie

$$\ldots 0, \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \frac{3\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots$$

corresponde una rama de la curva considerada.

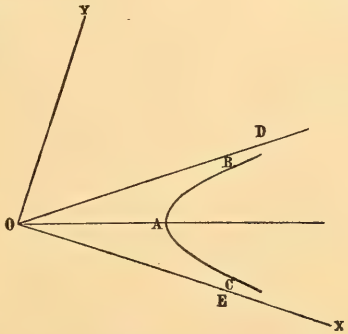


Figura 147.

**596.** Procediendo como en el caso de las *rosáceas*, se verá que las *espigas* son curvas *algébricas*, cuando $m$ sea número racional, y *transcendentes* cuando irracional; y que, en el caso de ser $m$ racional é igual á $\frac{\alpha}{\beta}$, el número de ramas resulta igual á $\alpha$, si $\alpha$ y $\beta$ son ambos *impares;* é igual á $2\alpha$, si uno de estos números es *par* é *impar* el otro. Cuando $m$ sea irracional, el número de ramas será infinito.

**597.** Por ser

$$\frac{a}{\rho} = \operatorname{sen} m\theta_1 \cos(\theta - \theta_1) + m \cos m\theta_1 \operatorname{sen}(\theta - \theta_1)$$

la ecuación, referida á coordenadas polares, de la tangente á una espiga, en el punto $(\theta_1, \rho_1)$, poniendo $\theta = \theta_1 + m\theta_1$, será

$$\frac{a}{\rho} = \frac{1+m}{2} \operatorname{sen} 2m\theta_1.$$

Y, con auxilio de esta fórmula, encuéntrase el radio vector del punto,

donde la tangente á la curva corta á la recta que pasa por el origen de las coordenadas y forma un ángulo, igual á $\theta_1 + m\theta_1$, con el eje de las abscisas.

**598.** El radio de curvatura de las *espigas* se halla expresado por la fórmula

$$R = \frac{a\left(1 + m^2 \frac{\cos^2 m\theta}{\operatorname{sen}^2 m\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}{(1 - m^2)\operatorname{sen} m\theta};$$

de la cual se desprende que las curvas de que ahora tratamos carecen de puntos de inflexión á distancia finita. En los vértices de las mismas curvas

$$R = \frac{1}{1 - m^2};$$

y en los puntos donde $\theta$ es igual á $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{5\pi}{4m}$, $\frac{9\pi}{4m}$, ...

$$R = \frac{a(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{1 - m^2}.$$

**599.** El área descrita por el radio vector de una espiga, cuando $\theta$ varía desde $AO = X\frac{\pi}{2m}$ hasta $\theta_1$, se deduce de la fórmula

$$A = \frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2m}}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 m\theta} = -\frac{a^2}{2m}\cot m\theta_1.$$

Y, si $\theta_1 = \frac{3\pi}{4m}$, el área se expresará como sigue:

$$A = \frac{a^2}{2m}.$$

**600.** La rectificación de las espigas depende también de las integrales elípticas de primera y de segunda especie, en los términos que á renglón seguido se exponen.

Por de pronto,

$$ds = \frac{a\,m}{\operatorname{sen}^2 m\theta}\sqrt{1 - \frac{m^2-1}{m^2}\operatorname{sen}^2 m\theta}\; d\theta;$$

ó, poniendo $m\theta = \omega$ y $\dfrac{m^2-1}{m^2} = k^2$,

$$ds = \frac{a}{\operatorname{sen}^2 \omega}\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \omega}\; d\omega.$$

Y, apoyándonos ahora en la identidad

$$\frac{d\left[\cot\omega\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\omega}\right]}{d\omega} = -\frac{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\omega}}{\operatorname{sen}^2\omega}$$

$$-\frac{k^2-1}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\omega}} - \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\omega},$$

puédese también escribir

$$ds = -a\,d\left(\cot\omega\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\omega}\right) - a\,(k^2-1)\frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\omega}}$$

$$-a\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\omega}\; d\omega.$$

Luego *la longitud, s, de los arcos de las espigas depende de una integral elíptica de primera especie y de otra de segunda.*

En el caso de ser $m < 1$, $k$ será imaginaria; pero la dificultad de aquí resultante puede eludirse poniendo $m\theta = \dfrac{\pi}{2} - \tau$, porque así

$$ds = -\frac{a}{m\cos^2\tau}\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\tau}\; d\tau \quad \text{y} \quad k^2 = 1 - m^2.$$

Y como

$$\frac{d\left[\operatorname{tang}\tau\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\tau}\right]}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\tau}}{\cos^2\tau} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\tau}}$$

$$+\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\tau},$$

hallaremos, en conclusión, que

$$ds = -\frac{a}{m}\left\{d\left(\operatorname{tang}\tau\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\tau}\right)+\frac{d\tau}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\tau}}\right.$$
$$\left.-\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\tau}\,d\tau\right\}.$$

Luego la longitud $s$ depende también entonces de integrales elípticas de primera y segunda especie, de *módulo real.*

## IV

### NUDOS

**601.** También fué AUBRY quien, en el mismo *Journal de Mathématiques spéciales* (1895, p. 201), designó con el nombre de *nudos* á las curvas ya anteriormente conocidas, representadas por la ecuación

$$\rho = a\operatorname{tang} m\theta,$$

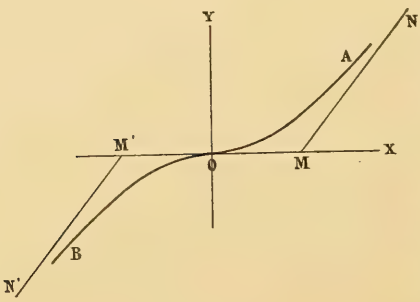



Figura 148.

que, dando á la palabra *espiral* suficiente amplitud para aplicarla á cualquier curva, definida por una ecuación en *coordenadas polares*, tal vez fuera preferible denominar *espirales tangentoides*, cuya forma (fig. 148) depende del valor de $m$, como dependían las formas de las otras clases de curvas que se acaban de estudiar. Si $\theta$ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{2m}$, $\rho$ aumenta desde 0 hasta $\infty$, y el punto generador de la curva describe la rama infinita $OA$..., tangente al eje $OX$ en el punto $O$. Y cuando después $\theta$ varía desde 0 hasta $-\frac{\pi}{2m}$, $\rho$ decrecerá desde 0 hasta $-\infty$, y el punto genera-

dor de la curva describirá una rama infinita *OB...*, igual á *OA...* y simétrica de ésta relativamente al punto *O*, centro de la curva.

**602.** Sábese además que la ecuación general de las asíntotas de las curvas planas, en coordenadas polares, tiene por expresión la siguiente:

$$\frac{1}{\rho} = f'(\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta - \alpha),$$

representando por $\alpha$ las raíces de la ecuación $f(\theta) = 0$, y por $\rho = \frac{1}{f(\theta)}$ la ecuación de la curva. De donde, por referencia á las curvas consideradas, se concluye que la ecuación de la asíntota, correspondiente á la rama *OA...*, tiene por expresión

$$\frac{a}{\rho} = -m\,\mathrm{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2m}\right).$$

Ó, en coordenadas cartesianas, esta otra:

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2m} - \frac{a}{m\cos\frac{\pi}{2m}}.$$

De donde se deduce que la rama *OA...* de la curva posee una asíntota, *MN*, secante al eje de las abscisas en el punto *M*, á la distancia del origen de las coordenadas, igual á $\frac{a}{m\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2m}}$, y la rama *OB* otra, *M' N'*, paralela á la primera, y que además pasa por el punto *M'* del mismo eje de las abscisas, siendo $OM' = OM$.

**603.** A los valores de $\theta$, comprendidos entre $\frac{\pi}{2m}$ y $\frac{3\pi}{2m}$, $\frac{3\pi}{2m}$ y $\frac{5\pi}{2m}$, etc., etc., corresponden otras ramas de la curva, iguales á la designada por *BOA*.

Como en el caso de las rosáceas, infiérese también que, cuando $m$ sea irracional, el número de ramas de la curva resultará infinito, y la curva será entonces *transcendente*. Mientras que, si $m$ es racional, é igual á $\frac{\alpha}{\beta}$, aquel número será igual á $2\alpha$ cuando $\alpha$ y $\beta$ sean *impares*, é igual á $\alpha$ cuan-

do uno de estos números sea *par*, é *impar* el otro: caso este último en que será algébrica la curva.

**604.** La *subtangente* y la *subnormal* de los *nudos* se hallan determinadas por las fórmulas

$$S_t = \frac{a}{m}\operatorname{sen}^2 m\theta \quad \text{y} \quad S_n = \frac{am}{\cos^2 m\theta},$$

enlazadas por la siguiente relación:

$$S_t \cdot S_n = \rho^2.$$

**605.** Y el radio de curvatura de los mismos nudos por esta otra:

$$R = \frac{a\left(m^2 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2m\theta\right)^{\frac{3}{2}}}{(2m^2 + \operatorname{sen}^2 m\theta)\cos^4 m\theta},$$

que en el punto $O$ se reduce á $R = \frac{1}{2}am$, y que en todos los casos enseña que las curvas de este nombre carecen de *inflexiones reales*, á distancia finita, salvo en el punto $O$.

**606.** El área descrita por el radio vector, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\theta_1$, puede fácilmente calcularse por la fórmula

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\theta_1} \operatorname{tang}^2 m\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2m}(\operatorname{tang} m\theta - m\theta).$$

## V

### CURVAS DE LAMÉ

**607.** Con el nombre de *curvas de* Lamé, y también, alguna vez, con el de *estoroides* (Leroy: *Géométrie Descriptive*, París, 1872, p. 203) se distinguen las curvas representadas por la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

previamente estudiadas por aquel distinguido geómetra en un trabajo titu-

lado *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie* (París, 1828), y, con posterioridad, por EURET y GILBERT en los *Nouvelles Annales des Mathématiques* (1854, p. 193, y 1870, p. 370), y por R. GODEFROY *(Journal de l'École Polytechnique* de París, 1892), y las cuales son *algébricas* cuando $m$ representa un número racional, y *transcendentes* en caso contrario.

**608.** La forma de cualquiera de estas curvas depende de $m$, bastando para determinarla el atento examen de su ecuación y de estas otras dos, *derivadas* suyas:

$$y' = -\left(\frac{b}{a}\right)^m \left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} \quad \acute{o}$$

$$y'' = -(m-1)\left(\frac{b}{a}\right)^m \left(\frac{x}{y}\right)^{m-2} \frac{y - xy'}{y^2} = -(m-1)\frac{b^{2m}\, x^{m-2}}{a^m\, y^{2m-1}}.$$

En efecto: para fijar las ideas, supongamos que $a$ y $b$ son números *positivos.*

*Primer caso.*—Si $m = \dfrac{2\beta}{2\alpha + 1}$ y $m > 1$, la curva presenta la forma general de una elipse, simétrica por referencia á los ejes de las coordenadas; secante al eje de las abscisas en los dos puntos definidos por la ecuación $x = \pm a$, donde las tangentes trazadas desde ellos á la curva son perpendiculares al mismo eje; y secante también al eje de las ordenadas en otros dos puntos, $y = \pm b$, donde asimismo las tangentes á la curva que por ellos pasan son perpendiculares al segundo eje mencionado. Estos cuatro puntos son *múltiplos,* cuando $\beta$ es diferente de $\alpha$; pero solamente una de las ramas que por ellos pasan será *real,* careciendo además la curva de otros *puntos singulares, reales* asimismo.

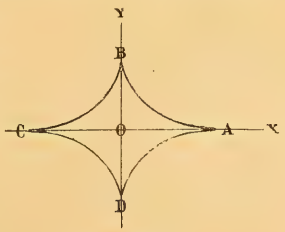


Figura 149.

*Segundo caso.*—Si $m = \dfrac{2\beta}{2\alpha + 1}$ y $m < 1$, la curva será de la forma indicada en la figura 149: simétrica también relativamente á los ejes de las coordenadas, con sus semiejes iguales á $a$ y $b$, y cuatro puntos de retroceso en $A$, $B$, $C$, $D$.

*Tercer caso.*—Si ahora $m = \dfrac{2\beta+1}{2\alpha+1} > 1$, escribiendo la ecuación de la curva bajo la forma

$$y = b \sqrt[2\beta+1]{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2\beta+1}{2\alpha+1}}\right]^{2\alpha+1}},$$

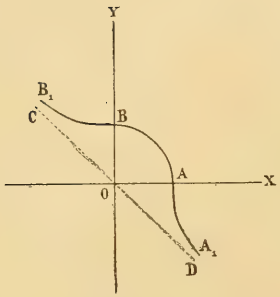


Figura 150.

se verá fácilmente que la curva á que se refiere tiene la forma indicada en la figura 150: secante á los dos ejes de las coordenadas en los puntos $A$ y $B$, $(a, 0)$ y $(0, b)$, extendiéndose luego indefinidamente, tanto en el sentido de las abscisas positivas como de las negativas, y alejándose constantemente del eje de las abscisas. Los puntos $A$ y $B$ lo son de inflexión, y las tangentes á la curva en ellos son perpendiculares, respectivamente, al eje de las abscisas y al de las ordenadas. La recta $COD$, paralela á la $AB$, que tiene por ecuación $y = -\dfrac{b}{a}x$, es asíntota de la curva.

*Cuarto caso.*—Si fuere $m = \dfrac{2\beta+1}{2\alpha+1} < 1$, veríase del mismo modo que la curva es de la forma representada en la figura 151: tangente á los ejes de las coordenadas en los puntos $A$ y $B$, $(a, 0)$ y $(0, b)$, ambos de inflexión, y que además se extiende indefinidamente tanto en el sentido de las abscisas positivas como de las negativas. En este caso la curva carece de asíntotas.

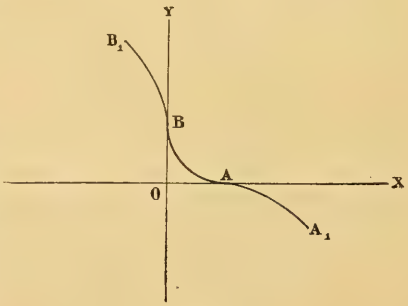


Figura 151.

*Quinto caso.*—Si $m = \frac{2\alpha+1}{2\beta} > 1$, la ecuación

$$y = b\sqrt[2\alpha+1]{\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2\alpha+1}{2\beta}}\right]^{2\beta}}$$

muestra que la curva posee la forma indicada en la figura 152, en la cual los puntos $A$ y $B$, ó $(a, 0)$ y $(0, b)$, lo son de *retroceso*, y las tangentes á la curva en estos puntos, respectivamente, perpendiculares al eje de las abscisas y al de las ordenadas. La recta $OC$, perpendicular á la $AB$, será entonces *asíntota* de la curva.

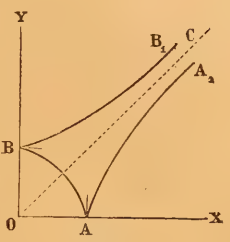


Figura 152.

*Sexto caso.*—Si $m = \frac{2\alpha+1}{2\beta} < 1$, la curva será de la forma indicada en la figura 153: tangente respectivamente á los ejes de las abscisas y de las ordenadas en los puntos $A$ y $B$, ó $(a, 0)$ y $(0, b)$. Curva que en este caso se extiende indefinidamente, á modo de parábola, en dos distintas direcciones ó rumbos, y carece de asíntotas, y de puntos de inflexión y puntos múltiplos reales fuera de los $A$ y $B$.

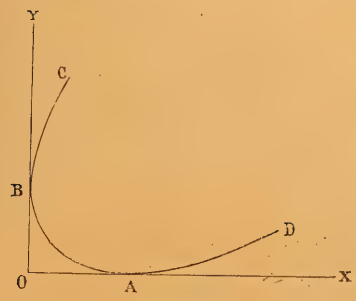


Figura 153.

*Séptimo caso.*—Cuando $m$ sea *irracional*, la curva se reducirá al arco $AB$ de la figura 150, página 496, si $m > 1$, ó al de la 151, si $m < 1$.

**609.** La ecuación de las tangentes á las *curvas de* Lamé, en el punto $(x, y)$, será

$$Y - y = -\left(\frac{b}{a}\right)^m \left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} (X - x).$$

De la cual, poniendo en ella $X = 0$, se desprende el valor de la ordenada, $Y$, del punto en que esta tangente corta el eje de las ordenadas:

$$Y = y + \frac{b^m x^m}{a^m y^{m-1}} = \frac{b^m}{y^{m-1}}.$$

Así como, poniendo $Y = 0$, se deduce para valor de la abscisa, $X$, del punto de intersección de la misma tangente con el eje de las abscisas esta otra relación:

$$X = \frac{a^m}{x^{m-1}}.$$

Resultando entre los segmentos $X$ é $Y$ la que sigue:

$$\frac{x}{X} + \frac{y}{Y} = 1.$$

**610.** La expresión del *radio de curvatura* de las mismas curvas dice como sigue:

$$R = \frac{[a^{2m} y^{2m-2} + b^{2m} x^{2m-2}]^{\frac{3}{2}}}{(m-1)\, a^{2m} b^{2m} x^{m-2} y^{m-2}}.$$

**611.** Comparando la ecuación de las tangentes con la ecuación

$$uY + vX = 1,$$

hállase que $u = \frac{y^{m-1}}{b^m}$ y $v = \frac{x^{m-1}}{a^m}$.

Y, en consecuencia, la *ecuación tangencial* de las curvas de Lamé podrá expresarse de este modo:

$$b^{\frac{m}{m-1}} u^{\frac{m}{m-1}} + a^{\frac{m}{m-1}} v^{\frac{m}{m-1}} = 1.$$

**612.** El área limitada por un arco de curva de Lamé, por el eje de las abscisas, y por dos paralelas al de las ordenadas, trazadas por los ex-

tremos del arco, depende de una integral, que solamente podrá expresarse por *funciones elementales* cuando sea $m = 2$, ó en el caso de reducirse la curva á una elipse.

**613.** La ecuación general que acabamos de considerar comprende, como casos particulares, las de algunas curvas notables. Si, por ejemplo, $m = 2$, hállase la *elipse*, conforme ya hemos advertido; si $m = \frac{1}{2}$, la *parábola;* si $m = \frac{2}{3}$, la *evoluta de la elipse;* si $m = \frac{2}{3}$ y $a = b$, la *astroide:* etc., etc.

**614.** La *polar* de la cónica

$$\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1,$$

relativamente al punto $(x, y)$ de la curva de Lamé considerada, tiene por ecuación

$$\frac{xX}{\alpha^2} + \frac{yY}{\beta^2} = 1;$$

y la *envolvente* de las posiciones de la misma *polar*, cuando el punto $(x, y)$ varía de posición, describiendo la curva á que corresponde, se hallará por eliminación de $x$, $y$ y $\frac{dy}{dx}$ entre su ecuación y las siguientes:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1 \quad \text{y} \quad \frac{X}{\alpha^2} + \frac{Y}{\beta^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

De donde se desprende esta otra:

$$\left(\frac{aX}{\alpha^2}\right)^{\frac{m}{m-1}} + \left(\frac{bY}{\beta^2}\right)^{\frac{m}{m-1}} = 1.$$

Luego *la polar recíproca de la curva de* Lamé, *de que se trata, relativamente á la cónica propuesta, es otra curva de* Lamé.

615. Relativamente al punto $(x_1, y_1)$, la ecuación de la *polar* de la misma curva será:

$$x_1\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}+y_1\left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}=1,$$

ó, suponiendo que $a=Ax_1^{\frac{1}{m-1}}$ y $b=By_1^{\frac{1}{m-1}}$,

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{m-1}+\left(\frac{y}{B}\right)^{m-1}=1.$$

Luego las *polares sucesivas de las curvas de* Lamé *son otras curvas del mismo nombre.*

616. Las *curvas de* Lamé pueden considerarse como *perspectivas* de las representadas por la ecuación, en *coordenadas trilineales.*

$$\left(\frac{X}{A}\right)^m+\left(\frac{Y}{B}\right)^m+\left(\frac{Z}{C}\right)^m=0,$$

á las cuales se aplica el nombre de *curvas triangulares simétricas*, y que Lagourneric estudió en un trabajo, publicado por los años 1867, con el título de *Recherches sur les surfaces reglées tetraédrales symétriques;* y por Jamet en otro, inserto en los *Annales de l'École Normale Supérieure* (París, 1887); etc.

Las propiedades proyectivas de las *curvas triangulares* se desprenden de las correspondientes á las de Lamé, contenidas en la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m=1,$$

suponiendo en ella que

$$a=\sqrt[m]{-\left(\frac{A}{C}\right)^m} \quad \text{y} \quad b=\sqrt[m]{-\left(\frac{B}{C}\right)^m}.$$

Y así: por ser $\left(\frac{Ahx}{Cl}\right)^{\frac{m}{m-1}}+\left(\frac{Bky}{Cl}\right)^{\frac{m}{m-1}}=1$ la ecuación (Núme-

ro 614) de la *polar recíproca* de la precedente curva de Lamé, relativamente á la cónica

$$hx^2 + ky^2 + l = 0,$$

vese también que *la ecuación de la polar recíproca de la curva triangular considerada, relativamente á la cónica que tiene por ecuación, expresada en el mismo sistema de coordenadas triangulares,*

$$hX^2 + kY^2 + lZ^2 = 0,$$

*es la curva triangular simétrica, representada por esta otra ecuación:*

$$(AhX)^{\frac{m}{m-1}} + (Bky)^{\frac{m}{m-1}} + (ClZ)^{\frac{m}{m-1}} = 0.$$

Y del propio modo se verá que la *polar* de la curva triangular considerada, *por referencia al punto* $(X_1, Y_1, Z_1)$, *es otra curva triangular, definida por la ecuación*

$$X_1\left(\frac{X}{A}\right)^{m-1} + Y_1\left(\frac{Y}{B}\right)^{m-1} + Z_1\left(\frac{Z}{C}\right)^{m-1} = 0.$$

617. La *ecuación tangencial* de las curvas triangulares simétricas obtiénese advirtiendo que la de sus tangentes posee la forma

$$uX_1 + vY_1 + wZ_1 = 0,$$

en la cual

$$u = \frac{X^{m-1}}{A^m}, \quad v = \frac{Y^{m-1}}{B^m}, \quad \text{y} \quad w = \frac{Z^{m-1}}{C^m};$$

ó, en consecuencia,

$$X = (A^m u)^{\frac{1}{m-1}}, \quad Y = (B^m v)^{\frac{1}{m-1}}, \quad \text{y} \quad Z = (C^m w)^{\frac{1}{m-1}}; \quad \text{ó}$$

$$(Au)^{\frac{m}{m-1}} + (Bv)^{\frac{m}{m-1}} + (Cw)^{\frac{m}{m-1}} = 0,$$

que es la ecuación buscada.

## VI

### CURVAS DE PERSEGUIMIENTO

**618.** Las curvas de este nombre, ó de *seguimiento* simplemente, excitaron por vez primera la curiosidad de BOUGUER, quien las descubrió buscando por de pronto la que describe en mar tranquilo un barco, empeñado en los alcances de otro, ambos animados de movimiento uniforme, rectilíneo el del perseguido, y variable en dirección de un modo continuo el del perseguidor. (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1732, *p.* 1). Curvas de la misma forma general á las descritas por un perro, disparado con velocidad constante, hacia una persona, mientras ésta, con paso también acompasado, ó igual, recorre una línea recta, de posición arbitraria en el plano de la curva: por lo cual suelen también designarse con el nombre de *curvas del perro*, y á las cuales prestaron asimismo fecunda atención otros geómetras distinguidos, como MAUPERTUIS, F. DE SAINT LAURENT (*Annales de Gergonne*, t. XIII, p. 145.), etc.

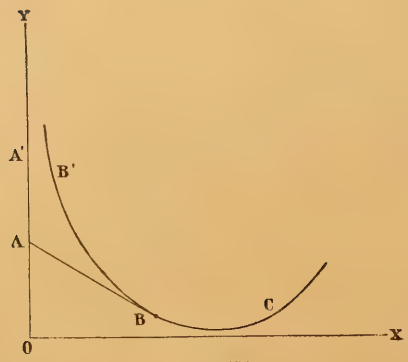


Figura 154.

**619.** Para estudiar las propiedades de estas curvas, supongamos que $A$ y $B$ (fig. 154) representan dos móviles, animados de movimientos uniformes: rectilíneo el del primero, en la dirección señalada por el eje de las ordenadas, $OAA'$; y curvilíneo el segundo, á lo largo de la curva $CBB'$, cuya ecuación, $y = f(x)$, nos proponemos determinar con los datos del problema, comenzando por advertir que esta curva ha de satisfacer á la condición de que su tangente, en cualquier posición del punto $B$, corte al eje de las ordenadas en la posición que corresponde al punto $A$.

Esto sentado, si por $x$ é $y$ representamos las coordenadas del punto $B$, la ecuación de esta tangente será

$$Y - y = f'(x)(X - x);$$

y, por lo tanto, la ordenada del punto $A$ se hallará expresada por la fórmula

$$OA = y - xf'(x).$$

Cuando $A$ se traslade de la posición, así designada, á la $A'$, $B$ pasará á la $B'$; y, por cuanto los movimientos de $A$ y $B$ son uniformes,

$$\frac{AA'}{\text{arco } BB'} = m, \tag{1}$$

siendo esta $m$ cantidad constante positiva.

Pero, representando por $x + h$ é $y + k$ las coordenadas del punto $B'$, resultará que

$$OA' = y + k - (x + h) f'(x + h),$$

y, en consecuencia,

$$AA' = k - (x + h) f'(x + h) + xf'(x).$$

Luego, representando por $s$ la longitud del arco $CB$, si $C$ además designa la posición inicial del punto $B$, en atención á que, cuando $s$ aumenta, $x$ disminuye, dedúcese que la *ecuación diferencial de las curvas de perseguimiento* será la siguiente:

$$m = \lim \frac{AA'}{\text{arco } BB'} = -\frac{xf''(x)}{ds} = \frac{xy''}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

É integrando esta ecuación, hállase por de pronto esta otra:

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = cx^m,$$

sencillamente transformable en las que siguen:

$$\left[y' + \sqrt{1 + y'^2}\right]^{-1} = -\left(y' - \sqrt{1 + y'^2}\right) = \frac{x^{-m}}{c}; \text{ ó}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(cx^m - \frac{x^{-m}}{c}\right).$$

De la cual, repitiendo la integración, se desprende que

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{cx^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{(m-1)\,cx^{m-1}}\right] + C,$$

cuando sea $m \lesseqgtr 1$, ó

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{cx^2}{2} - \frac{1}{c}\log x\right] + C,$$

si $m = 1$.

Con lo cual queda resuelto el problema de que se trata, en términos finitos, debiendo ser determinadas las *constantes* $c$ y $C$ por medio de los valores de $y'$ é $y$ en el punto inicial del movimiento de $B$.

Con auxilio de las mismas ecuaciones, conclúyese también que la recta $x = 0$, recorrida por el móvil $A$, será asíntota de la curva cuando sea $m > 1$ ó $m = 1$, y que, por el contrario, la curva cortará á esta recta cuando sea $m < 1$: luego, en los primeros casos, el móvil $B$ no encuentra al $A$, hacia el cual se aproxima indefinidamente; pero sí en el último.

**620.** Advertido lo que precede, fácil será determinar la forma de las curvas, representadas por las ecuaciones á que nos referimos. Por de pronto, supondremos que $c > 0$, como asimismo podemos también suponer que $C = 0$, cambiando para ello, si fuere menester, el origen de las coordenadas. Y, tras de esto, examinaremos los siguientes casos:

1.° Si es $m = \dfrac{2a+1}{2b} > 1$, la curva constará de dos ramas iguales y simétricamente dispuestas relativamente al eje de las abscisas, ambas de la forma indicada en la fig. 154, que se extenderán indefinidamente en el sentido de las abscisas positivas, con *dos puntos de inflexión reales*, correspondientes á la abscisa $x = \left(-\dfrac{1}{c^2}\right)^{\frac{b}{2a+1}}$, cuando $b$ sea *par*, y con

una asíntota común en coincidencia con el eje de las ordenadas. El valor absoluto de $y$ pasa entonces por un mínimo, correspondiente á los puntos cuya abscisa es igual á $c^{-\frac{2b}{2a+1}}$.

2.° Si fuese $m = \dfrac{2a+1}{2b+1} > 1$, la curva tendría la misma forma general que en el caso anterior, sin *puntos de inflexión reales;* pero el eje de simetría coincidiría entonces con el de las ordenadas, é $y$ sería mínimo cuando fuese $x = \pm c^{-\frac{2b+1}{2a+1}}$.

3.° Si es $m = \dfrac{2a}{2b+1} > 1$, la curva tendrá, además de la rama indicada en la figura anterior, otra rama en el ángulo opuesto de los ejes coordenados, dispuesta de tal modo que el origen de las coordenadas sea *centro* de la curva. Y, en este caso, el valor absoluto de la ordenada será mínimo cuando sea $x = \pm c^{-\frac{2b+1}{2a}}$.

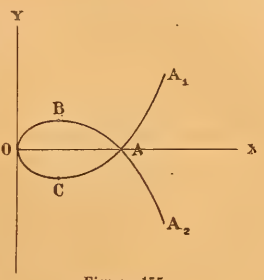


Figura 155.

4.° Si fuese $m = \dfrac{2a+1}{2b} < 1$, la curva resulta de la forma señalada en la figura 155: tangente al eje de las ordenadas en el origen; y con un *punto doble* sobre el eje de las abscisas, allí donde $x = \left(\dfrac{m+1}{(1-m)c^2}\right)^{\frac{b}{2a+1}}$, y otros dos puntos donde el valor absoluto de $y$ es máximo, correspondientes á $x = c^{-\frac{2b}{2a+1}}$.

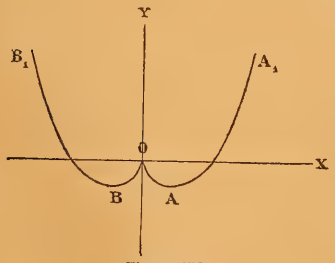


Figura 156.

5.° Si es $m = \dfrac{2a+1}{2b+1} < 1$, la curva presentará la forma indicada en la figura 156: con un *punto de retroceso* en el origen de las coordenadas, y dos, de mínimos valores de $y$, correspondientes á las abscisas $x = \pm c^{-\frac{2b+1}{2a+1}}$

6.° Si $m = \frac{2a}{2b+1} < 1$, la curva será de la forma representada en la figura 157, y poseerá en el origen de las coordenadas un punto de inflexión.

7.° Si $m$ fuese irracional, la curva sería de la forma señalada en la figura 154, en el supuesto de ser $m > 1$, y de la diseñada en la 158 cuando fuese $m < 1$.

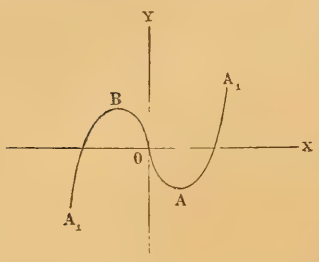


Figura 157.

8.° Y si es $m = 1$, la forma de la curva será la que representa, en general, la figura 154.

**621.** Las longitudes de los arcos de las curvas que vamos estudiando encuéntranse fácilmente, partiendo de la ecuación (1), de la cual se deduce (fig. 154), por de pronto, para $s$ la siguiente:

$$s = BB' = \frac{AA'}{m} = \frac{OA' - OA}{m}.$$

Y como la ordenada $OA'$, ó la $OA$, de cualquiera de los dos puntos, donde las tangentes á la curva, en $A'$ y $A$, cortan al eje de las $Y$, pueden expresarse, en función de la abscisa correspondiente, $x_1$ ó $x_2$, de este modo,

$$OA = -\frac{m}{2}\left[\frac{cx_2^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{(m-1)\,cx_2^{m-1}}\right], \text{ etc.,}$$

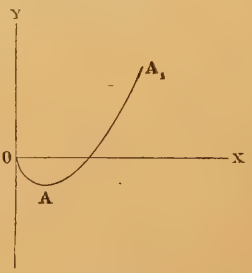


Figura 158.

conclúyese que la determinación del valor de $s$ no presenta, en efecto, dificultad alguna.

**622.** Por algunos geómetras han sido estudiadas otras *curvas de perseguimiento*, basadas en condiciones primordiales del movimiento de los

puntos $A$ y $B$, distintas de las simplicísimas, adoptadas para fundamentar el razonamiento del Núm. **619**, del cual se desprenden las consecuencias en los inmediatos siguientes consignadas: conforme puede verse en el caso examinado en el tomo XIII de los *Annales de Gergonne* (p. 289 y 391), adonde remitimos al curioso lector.

## VI

### ESPIRALES SINUSOIDES

**623.** HATON DE LA GOUPILLIÈRE aplicó el nombre de *espirales sinusoides* á las curvas representadas por la ecuación

$$\rho^n = a^n \operatorname{sen} n\theta,$$

en un artículo publicado en los *Nouvelles Annales de Mathématiques (Paris,* 1876, p. 97), en donde insertó una lista ó resumen de sus principales propiedades. Y BASSANI, en otro artículo, publicado en el *Giornale di Matematiche (Napoli,* t. XXIV, 1886, p. 23), trató también del mismo asunto, agregando nuevas propiedades á las contenidas en la mencionada lista del geómetra francés.

La forma de cada espiral sinusoide depende de $n$.

Si $n$ fuese positivo é igual á $\frac{2g}{2p+1}$, cuando $\theta$ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{n}$, el punto generador de la curva describe (considerando, por de pronto, solamente los valores positivos de $\rho$) una rama cerrada, que pasa por el origen de las coordenadas y es tangente en este punto á las rectas que forman con el eje de las abscisas ángulos iguales á 0 y $\frac{\pi}{n}$: rama, además, simétrica relativamente á la recta que pasa también por el origen y forma con el mismo eje un ángulo igual á $\frac{\pi}{2n}$.

Cuando, después, $\theta$ varía desde $\frac{\pi}{n}$ hasta $\frac{2\pi}{n}$, $\rho$ es imaginario.

Cuando la misma $\theta$ varía desde $\frac{2\pi}{n}$ hasta $\frac{3\pi}{n}$, el punto generador de la curva describe otra rama, igual á la que primeramente describió.

Y, continuando por el mismo orden los giros del radio vector, el punto generador de la curva describirá una serie de ramas, alternadamente reales é imaginarias, terminando la de orden $l$ cuando sea $\theta = \frac{l\pi}{n}$.

Dando, pues, á $l$ el valor $4g$, llégase al valor de $\theta = 2(2p+1)\pi$: con lo cual se ve que el punto generador de la curva vuelve á la posición primitiva de donde partió, después de describir $2(2p+1)$ ramas, *reales* ó *imaginarias*, de la misma curva.

Cuando $n$ sea negativo é igual á $-\frac{2g}{2p+1}$, $\rho$ varía desde $\infty$ hasta $a$; y desde $a$ hasta $\infty$, cuando $\theta$ varíe desde 0 hasta $\frac{\pi}{n}$. El punto generador de la curva describe, pues, en este caso una rama abierta, que tiene por asíntotas las rectas que forman con el eje los ángulos 0 y $\frac{\pi}{n}$; simétrica también relativamente al vector que forma con el eje el ángulo $\frac{\pi}{2n}$; y secante de este vector en el punto $\left(\theta = \frac{\pi}{2n},\ \rho = a\right)$. Y continuando, lo mismo que cuando $n$ era positivo, los giros sucesivos de $\theta$, conclúyese, análogamente, que la curva se compone de $2(2p+1)$ ramas, alternadamente *reales* é *imaginarias*, siendo las reales iguales todas unas á otras.

Si á los valores negativos de $\rho$ nos atenemos ahora, hallaremos otras $2(2p+1)$ ramas, iguales á las precedentes.

Y suponiendo, por último, que sucesivamente sean $n = \frac{2g+1}{2p}$ y $n = \frac{2p+1}{2g+1}$, por análogo género de consideraciones llegaremos á resultados comparables á los en los anteriores supuestos acabados de obtener.

Vese también, como en el Núm. 587, que, en todos los casos hasta ahora examinados, las espirales sinusoides son *curvas algébricas*. Pero, en el de ser $n$ irracional, el número de ramas de la curva será infinito y la curva *transcendente*.

624. Aplicando á las espirales sinusoides la fórmula conocida

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta},$$

hállase la igualdad

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}(n+1)\,\theta,$$

que, representando por $\varphi$ el ángulo de la tangente á la curva con el eje de las abscisas positivas, produce esta nueva igualdad:

$$\varphi = (n+1)\,\theta.$$

Por medio de la cual pueden determinarse las tangentes á la curva, paralelas al eje de las abscisas en los puntos donde $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$, siendo $k$ entero, *par ó impar;* y perpendiculares al mismo eje en aquellos otros donde $\theta = \frac{k\pi}{2\,(n+1)}$, si $k$ es entero *é impar.*

Y también se ve que, *cuando el radio vector gira uniformemente alrededor del polo, la tangente gira uniformemente alrededor del punto de contacto.* Por lo cual Laquière dió á estas curvas el nombre de *curvas de inflexión proporcional. (Nouvelles Annales de Mathématiques, Paris,* 1883).

**625.** Por ser $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \cot n\theta$, el ángulo $V$, *que forma la tangente con el radio vector, en el punto de contacto,* podrá determinarse como sigue:

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \operatorname{tang} n\theta,$$

ó $V = n\theta$. Luego el ángulo que se acaba de definir será *igual á n veces el ángulo del mismo radio vector con el eje polar.*

Y de la misma última igualdad se concluye también que la *tangente á la curva es perpendicular al radio vector del punto de contacto en los puntos* donde $n\theta = \frac{1}{2} k\pi$ ($k$ impar), ó en las extremidades de los ejes de la curva; y que coincide con este radio en los puntos donde $n\theta = k\pi$, sea $k$ *par ó impar,* ó en los puntos donde el radio vector es nulo.

626. Sean $OP$ y $OQ$ dos vectores de la curva, y $PM$ y $QM$ dos tangentes á la misma en los puntos $P$ y $Q$. Suponiendo (fig. 159) que sean

$$QOX = \theta, \quad POX = \theta', \quad OQM = \alpha \quad \text{y} \quad OPM = \alpha',$$

y, en virtud del teorema anterior,

$$\alpha = \pi - n\theta \quad \text{y} \quad \alpha' = n\theta';$$

hállase que

$$PMQ + \theta' - \theta + \pi - n\theta + n\theta' = 2\pi.$$

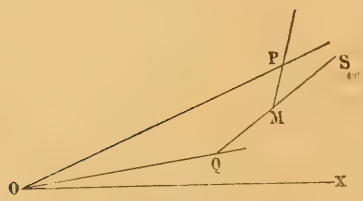


Figura 159.

Luego

$PMQ = \pi - (1+n)(\theta' - \theta)$, y

$PMS = (1+n)(\theta' - \theta)$:

igualdad consignada por Barbier y Lucas en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2.ª serie, t. v, p. 27), que determina el ángulo de las tangentes á la curva en dos puntos dados.

627. Por medio de la fórmula

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho\,\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 2\,\frac{d\rho^2}{d\theta^2} - \rho^2}$$

y de estas otras dos

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \cot n\theta, \quad \text{y} \quad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho \cot^2 n\theta - \frac{n\rho}{\operatorname{sen}^2 n\theta},$$

dedúcese la siguiente, para expresión del radio de curvatura de las espirales sinusoides:

$$R = \frac{\rho}{(n+1)\operatorname{sen} n\theta},$$

según la cual las curvas de este nombre carecen de *puntos de inflexión, fuera del polo.*

Y, representando por $N$ la longitud de la normal, y teniendo en cuenta que

$$N=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}=\frac{\rho}{\operatorname{sen} n\theta},$$

hállase, según lo demostrado por HATON DE LA GOUPILLIÈRE en su *Thèse,* página 34, esta otra expresión

$$R=\frac{N}{n+1}.$$

Ó, por cuanto $\operatorname{sen} n\theta=\left(\frac{\rho}{a}\right)^n$, la que sigue:

$$R=\frac{a^n}{(n+1)\,\rho^{n-1}}.$$

La cual nos dice que *el radio de curvatura es inversamente proporcional á la potencia n — 1 del radio vector, en el punto considerado: propiedad característica de las espirales sinusoides,* conforme demostró BASSANI *(l. c.,* p. 27).

628. Por ser, representando por $s$ la longitud de los arcos,

$$R=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{ds}{d\theta}=\frac{1}{n+1}\,\frac{ds}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{d\theta},$$

$$\frac{dR}{d\rho}=-\frac{(n-1)\,a^n}{(n+1)\,\rho^n},\quad \frac{d\rho}{d\theta}=\rho\cot n\theta=\sqrt{\frac{a^{2n}-\rho^{2n}}{\rho^{2(n-1)}}},$$

y

$$R=\frac{a^n}{(n+1)\,\rho^{n-1}};$$

conclúyese, eliminando $d\rho$, $d\theta$ y $\rho$ entre estas ecuaciones, que

$$ds=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{(n+1)\,R}{a}\right]^{\frac{2n}{n-1}}-1}}:$$

ó, poniendo $(n+1)\,b$ en vez de $a$,

$$ds = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Ecuación, en *coordenadas intrínsecas*, de las *espirales sinusoides*, utilizada por CESÀRO para el estudio de estas curvas *(Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1888, p. 183; y *Lezioni di Geometria intrinseca, Napoli,* 1896, pág. 51).

629. La proyección del radio de curvatura sobre la normal á la curva, en el punto $(\vartheta, \rho)$, es igual á $R \operatorname{sen} V$. Pero, como

$$R \operatorname{sen} V = \frac{a^n}{(n+1)\,\rho^{n-1}} \operatorname{sen} n\vartheta = \frac{\rho}{n+1},$$

entre *la proyección del radio de curvatura, sobre el radio vector correspondiente, y el mismo radio vector existe una razón constante.*

Teorema que puede también ser enunciado de otro modo.

Si trazamos, en efecto, el círculo de curvatura, correspondiente á un punto de la curva, en este círculo, secante del vector que pasa por el mismo punto, quedará determinada una cuerda, *que será* proyección ortogonal, á su vez, del segmento por el mismo círculo interceptado sobre la normal: igual, en consecuencia, á $2R \cos\left(\frac{\pi}{2} - V\right) = \frac{2\rho}{n+1}$.

Luego *el círculo de curvatura intercepta sobre el radio vector del punto considerado una cuerda, en razón constante con este radio.* Teorema descubierto por MACLAURIN *(Treatise of Fluxions,* cap. XI), y que ALLEGRET demostró asimismo ser característico de las *espirales sinusoides (Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2.ª serie, t. XI, p. 162).

630. La rectificación de las *espirales sinusoides* se obtiene por medio de la fórmula

$$s = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = a \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} [\operatorname{sen} n\vartheta]^{\frac{1}{n}-1} d\vartheta = \frac{a}{n} \int_{V_0}^{V_1} [\operatorname{sen} V]^{\frac{1}{n}-1} dV.$$

De la cual, poniendo $\operatorname{sen} V = t$, se desprende esta otra:

$$s = \frac{a}{n}\int_{t_0}^{t_1} t^{\frac{1}{n}-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

De manera que la longitud de los arcos de las curvas consideradas solamente podrá expresarse por *funciones elementales,* cuando $\frac{1}{n}$ *represente un número entero.*

Aplicando á la integral, que figura en la expresión de $s$, una fórmula, bien conocida, de reducción de las integrales binomias, llégase á esta otra:

$$s = a\left[t^{\frac{1}{n}}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\right]_{t_0}^{t_1} + \frac{1+n}{n}\,a\int_{t_0}^{t_1} t^{\frac{1}{n}+1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt: \quad \acute{o}$$

$$s = a\left[\operatorname{sen}^{\frac{1}{n}} V\cos V\right]_{V_0}^{V_1} + \frac{1+n}{n}\,a\int_{V_0}^{V_1}\operatorname{sen}^{\frac{1}{n}+1} V\,dV.$$

Pero, si consideramos otra espiral sinusoide, definida por la ecuación $\rho = a\left(\operatorname{sen}\frac{n}{1+2n}\theta\right)^{\frac{1+2n}{n}}$, la longitud, $s_1$, del arco de esta curva, comprendido entre los puntos donde las tangentes forman con los radios vectores de los puntos de contacto ángulos iguales á $V_0$ y $V_1$, tendrá por expresión

$$s_1 = a\,\frac{1+2n}{n}\int_{V_0}^{V_1}\operatorname{sen}^{\frac{1+n}{n}} V\,dV.$$

Y así se ve que entre $s$ y $s_1$ existe la relación (Bessani, *l. c.,* p. 29)

$$s = (\rho_1 - \rho_0)\cos V + \frac{1+n}{1+2n}\,s_1.$$

Cuando sean $\theta_0 = 0$ y $\theta_1 = \frac{\pi}{2n}$, ó cuando el arco que se pretende rectificar sea mitad de la primera rama de la curva, hállase que $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$; y, por lo tanto,

$$s = \frac{a}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{a}{n}\,B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right),$$

designando por $B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$ una *integral euleriana de primera especie.*

De todo lo cual se concluye, recordando algunos teoremas de frecuente aplicación, referentes á las integrales eulerianas, que

$$s = \frac{a}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} = \frac{a}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\pi}.$$

**631.** El área descrita por el radio vector de una espiral sinusoide, cuando $\theta$ varía desde $\theta_0$ hasta $\theta_1$, tiene por expresión

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} [\operatorname{sen} n\theta]^{\frac{2}{n}}\, d\theta;$$

ó, poniendo $\operatorname{sen} n\theta = t$,

$$A = \frac{a^2}{2n}\int_{t_0}^{t_1} t^{\frac{2}{n}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Designemos, además, por $s_2$ la longitud de los arcos de la curva

$$\rho = a\left[\operatorname{sen}\frac{n}{n+2}\theta\right]^{\frac{n+2}{n}};$$

y, de lo expuesto renglones antes, deduciremos que

$$s_2 = \frac{a(n+2)}{n}\int_{t_0}^{t_1} t^{\frac{2}{n}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Luego

$$A = \frac{a}{2(n+2)}\, s_2.$$

**632.** Para determinar las *podarias* de las espirales sinusoides por relación al polo, puede procederse de este modo.

Sean $\theta_1$ y $\rho_1$ las coordenadas polares del punto de la podaria, correspondiente al punto $M(\theta, \rho)$ de la curva. Del triángulo $MTO$ (fig. 160) se desprende que

$$\rho_1 = OT = \rho \operatorname{sen} V = \rho \operatorname{sen} n\theta = a\,[\operatorname{sen} n\theta]^{\frac{1}{n}+1}.$$

Y como también

$$\theta_1 = TOX = \theta - \left(\frac{\pi}{2} - V\right) = \theta + n\theta - \frac{\pi}{2},$$

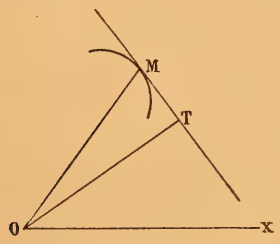



Figura 160.

la precedente ecuación se convertirá en la que sigue:

$$\rho_1 = a\left[\operatorname{sen}\frac{n}{1+n}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1+n}{n}}.$$

Ó, cambiando ahora la recta que sirve de origen común á los ángulos vectores, ó suponiendo que $\theta_1 + \frac{\pi}{2} = \theta'$, llégase á esta conclusión:

$$\rho_1 = a\left(\operatorname{sen}\frac{n}{1+n}\theta'\right)^{\frac{1+n}{n}},$$

según la cual *las podarias de las espirales sinusoides son otras espirales sinusoides:* teorema debido á W. Roberts *(Journal de Lionville,* 1847).

Representando por $R_1$ el radio de curvatura de la *podaria* de una espiral sinusoide dada, hállase que

$$R_1 = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{a^{\frac{n}{n+1}}}{\rho_1^{\frac{n}{n+1}-1}};$$

ó, por ser

$$\rho_1 = a\,(\operatorname{sen} n\theta)^{\frac{1}{n}+1},$$

$$R_1 = \frac{n+1}{2n+1}\, a\,(\operatorname{sen} n\theta)^{\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{2n+1}\,\rho.$$

Luego *el radio de curvatura de la podaria de una espiral sinusoide es proporcional al radio vector del punto correspondiente de la curva á que se refiere* (Bassani).

633. La clase de curvas que acabamos de considerar comprende, en particular, muchas curvas notables. Como, por ejemplo: la *circunferencia*, si $n = 1$; la *línea recta*, si $n = -1$; la *lemniscata de* Bernoulli, cuando $n = 2$; en el caso de ser $n = -2$, la *hipérbola equilátera*; y, si $n = 0$, la *espiral logarítmica:* etc., etc.

634. Las espirales sinusoides poseen, además de las expuestas, otras muchas propiedades, geométricas y mecánicas, que pueden y merecen verse en los trabajos de Haton de la Goupillière y de Bassani, poco más atrás mencionados.

## VII

### CURVAS DE RIBAUCOUR

635. Dase el nombre de *curvas de* Ribaucour, en memoria del ilustre geómetra que las descubrió, al estudiar las superficies llamadas *elasoides*, ó de *curvatura media* nula, á las que poseen la propiedad de que sus *radios de curvatura son proporcionales á las normales en todos sus puntos (Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique,* t. xliv, 1880).

La ecuación diferencial de las *curvas de* RIBAUCOUR será, pues, por definición,

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = my\,(1+y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

representando por $m$ una constante; ó

$$myy'' = 1 + y'^2.$$

Como, además,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\frac{dy}{dx}}{dy} = \frac{y'\,dy'}{dy},$$

la igualdad anterior puede escribirse en esta forma:

$$\frac{my'\,dy'}{1+y'^2} = \frac{dy}{y}.$$

De la cual, mediante dos integraciones sucesivas, se obtienen las ecuaciones siguientes, *diferencial* de *primer orden*, y *finita*, de las curvas de RIBAUCOUR:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} - 1}}, \quad \text{y}$$

$$x - c_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} - 1}}. \tag{1}$$

Siendo de advertir, ó recordar, que, según la teoría de las integrales *binomias*, la última ecuación solamente podrá expresarse por *funciones elementales* cuando sea $m$ número entero.

**636.** En la *clase* de las *curvas de* RIBAUCOUR hállanse comprendidas algunas, *particulares*, muy notables, ya consideradas en distinto concepto.

1.° Si, por ejemplo, $m = -1$, la ecuación (1) representa una *circunferencia*.

2.° Si $m = 1$, poniendo $c_2$ por $c^{-1}$, hállase que

$$x - c_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{c^2 y^2 - 1}} = c_2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c_2^2}};$$

y, en consecuencia,

$$x - c_1 = c_2 \log \frac{y + \sqrt{y^2 - c_2^2}}{c_2};$$

de donde se deduce que

$$\frac{y + \sqrt{y^2 - c_2^2}}{c_2} = e^{\frac{x - c_1}{c_2}}, \quad \text{ó} \quad \frac{y - \sqrt{y^2 - c_2^2}}{c_2} = e^{-\frac{x - c_1}{c_2}}.$$

Y sumando ordenadamente estas ecuaciones obtiénese por fin esta otra, correspondiente á la *catenaria:*

$$y = \frac{c_2}{2}\left(e^{\frac{x - c_1}{c_2}} + e^{-\frac{x - c_1}{c_2}}\right).$$

3.° Si fuere $m=2$, hallaríase que

$$x - c_1 = \int (cy - 1)^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{2}{c}(cy - 1)^{\frac{1}{2}},$$

ó

$$c(x - c_1)^2 = 2(cy - 1);$$

y la curva representada entonces por (1) sería una *parábola.*

4.° Y si fuere $m = -2$, encontraríase también sin dificultad que

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1 - cy}{cy}};$$

ecuación diferencial de la *cicloide.*

**637.** Por ser

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{(cy)^{\frac{1}{m}}}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} - 1}}\, dy,$$

las longitudes de los arcos de las curvas de Ribaucour podrán representarse por la fórmula

$$s = \int_a^b \frac{(cy)^{\frac{1}{m}}\, dy}{\sqrt{(cy)^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

designando por $a$ y $b$ las coordenadas de los extremos del arco considerado. Arco, según la misma fórmula, que no admite representación exclusiva por medio de funciones elementales, sino en el caso de ser $m$ número entero.

**638.** El *radio de curvatura* de las curvas de que tratamos tiene por expresión

$$R = my\,(cy)^{\frac{1}{m}} = mc^{\frac{1}{m}}\, y^{1+\frac{1}{m}}.$$

Luego, si $1 + \frac{1}{m}$ es *mayor* que *cero*, $R$ será nulo cuando sea $y = 0$; y, si *menor*, $R$ será infinito en el mismo segundo supuesto. Las curvas de Ribaucour no admiten, pues, *puntos de inflexión ni puntos de retroceso*, desviados del eje de las abscisas.

**639.** Por ser

$$dR = m\left(1 + \frac{1}{m}\right)(cy)^{\frac{1}{m}}\, dy,$$

infiérese que

$$ds = \frac{dR}{(m+1)\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^{\frac{2}{m+1}} R^{\frac{2}{m+1}} - 1}};$$

ó, poniendo $\frac{m}{c} = a$,

$$s = \frac{1}{m+1}\int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{\frac{2}{m+1}} - 1}}.$$

Y si además se admite que $\frac{1}{m+1} = \frac{n+1}{n-1}$, la última ecuación adquirirá la forma

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}.$$

Ecuación, en *coordenadas intrínsecas,* de las curvas de RIBAUCOUR, utilizada por CESÀRO para el estudio de estas curvas *(Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3.ª serie, t. VII, 1888, p. 179; y *Lezioni di Geometria intrinseca, Napoli,* 1896, p. 49).

640. Advertiremos, para concluir, que las curvas acabadas de considerar, como las *espirales sinusoides* de que momentos antes tratamos, son casos particulares de un grupo más extenso de otras curvas, estudiado por el mismo CESÀRO en los trabajos también pocos renglones antes mencionados.

# CAPÍTULO DÉCIMOSEGUNDO

## CURVAS DE DOBLE CURVATURA

### I

### ESPIRAL DE PAPPO

**641.** Consideremos una esfera y en ella dos círculos máximos que pasen por los polos $P$ y $P'$; uno de ellos, $PAP'$, fijo (fig. 161), y el otro, $PMC$, variable ó móvil alrededor del eje $PP'$. La curva descrita por el punto $M$ del círculo variable, cuando este círculo $PMC$ se aparta del $PAP'$ con movimiento uniforme, y al mismo tiempo $M$ se aleja del punto $P$ con movimiento uniforme también, y de tal modo que, al terminar $PMC$ su primera revolución completa, $M$ se encuentre en el punto $A$ del *ecuador*, recibe el nombre de *espiral de* Pappo, por haber este célebre geómetra llamado sobre ella la atención por vez primera en sus famosas *Colecciones Matemáticas*.

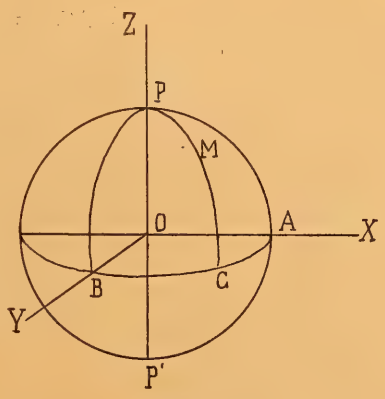


Figura 161.

Sea $\rho$ el *radio* de la esfera; $\varphi$ la *longitud* $AOC$ del punto $M$; y $\theta$ la *co-latitud* $PM$ del mismo punto: de la definición anterior se deduce que

$$\theta = \frac{\varphi}{4}.$$

Y ésta será la ecuación de la curva, expresada en *coordenadas esféricas.*

**642.** Para determinar el área esférica limitada por la espiral de que se trata, por el ecuador *CAB* y por el meridiano *PA*, procederemos como sigue:

De la fórmula general bien conocida de *Geometría infinitesimal*, aplicable á la determinación del área de las superficies curvas, referidas á coordenadas polares,

$$U = \iint \sqrt{\left[\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right] \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{d\rho^2}{d\varphi^2}} \cdot \rho \, d\varphi \, d\theta,$$

se deduce en este caso particular, por ser $\rho$ cantidad constante, esta otra:

$$U = \iint \rho^2 \operatorname{sen} \theta \, d\varphi \, d\theta.$$

Y como en los límites del área pedida $\theta$ varía desde $\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{\varphi}{4}$, y $\varphi$ desde 0 hasta $2\pi$, aquella área tendrá por expresión

$$U = \rho^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\varphi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta \, d\theta;$$

ó, después de integrada,

$$U = 4\rho^2.$$

En la cual está compendiada la siguiente proposición, debida á Pappo *(prop. 30.ª* del *libro IV* de la obra citada): *el área esférica limitada por la espiral, por el ecuador y por el meridiano inicial, vale tanto como el cuadrado del diámetro de la esfera.* Resultado muy notable por constituir el más antiguo ejemplo de la cuadratura de una superficie curva.

**643.** Con igual sencillez podemos determinar también el volumen del sólido limitado por la porción de la superficie de la esfera comprendida entre la curva y el ecuador, por el ecuador y por el cilindro recto que pasa

por la curva. Pues, en términos generales, el volumen $V$ de un sólido geométrico entre determinados límites tiene por expresión

$$V = \iint f(r\cos\varphi,\quad r\operatorname{sen}\varphi)\, r\,dr\,d\varphi,$$

suponiendo que $r$ representa el radio vector de la proyección de $M$ sobre el plano coordenado $xy$, y $z = f(x, y)$ la ecuación de la superficie del mismo sólido. Y como, en el caso ahora considerado,

$$f(r\cos\varphi,\quad r\operatorname{sen}\varphi) = \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{\rho^2 - r^2},$$

y la ecuación de la proyección de la espiral sobre el plano del ecuador es

$$r = \rho\operatorname{sen}\theta = \rho\operatorname{sen}\frac{\varphi}{4};$$

conclúyese que

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho\operatorname{sen}\frac{\varphi}{4}}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - r^2}\,.\,r\,dr;$$

ó, integrando,

$$V = \frac{8}{9}\,\rho^3.$$

644. La rectificación de la *espiral de* Pappo depende de la de un arco de elipse.

Pues, en efecto, si por $x$, $y$ y $z$ designamos las coordenadas cartesianas de los puntos de la curva, hállase que

$$x = \rho\operatorname{sen}\frac{\varphi}{4}\cos\varphi,\quad y = \rho\operatorname{sen}\frac{\varphi}{4}\operatorname{sen}\varphi,\quad \text{y}\quad z = \rho\cos\frac{\varphi}{4},$$

y por lo tanto, representando por $x'$, $y'$ y $z'$ las *derivadas* de $x$, $y$ y $z$, relativamente á $\varphi$,

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\varphi = \rho\int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1}{16} + \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{4}}\, d\varphi:$$

ó

$$s = \frac{1}{4}\sqrt{17}\,\rho\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\frac{16}{17}\cos^2\frac{\varphi}{4}}\,d\varphi:$$

ó, poniendo $\frac{\pi}{2}$ por $\frac{\varphi}{4}+\omega$,

$$s = -\sqrt{17}\,\rho\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\sqrt{1-\frac{16}{17}\operatorname{sen}^2\omega}\,.\,d\omega.$$

## II

### CURVA DE VIVIANI

**645.** En 1692, VIVIANI, discípulo de Galileo, propuso en las *Acta Eruditorum* el siguiente problema: determinar sobre un hemisferio una curva cerrada tal que, si en la superficie total del hemisferio se prescinde de la que limita la curva buscada, resulta otra superficie exactamente cuadrable.

Problema que muy luego fué resuelto por LEIBNITZ y JACOBO BERNOULLI en el mismo volumen de las *Acta;* y después por WALLIS y por el MARQUÉS DE L'HOSPITAL: etc., etc. Y que la *espiral de* PAPPO, anteriormente considerada, resuelve también, conforme hemos visto en el Número **642.**

Para resolver su célebre problema, VIVIANI empleó la curva resultante de la intersección de la esfera con dos cilindros rectos, de iguales bases circulares, y éstas de radio igual á la mitad del de la esfera, perpendiculares ambos al círculo máximo, que sirve de base al hemisferio, y uno á otro tangentes en el centro de la esfera: curva que se designa con el nombre de su inventor, y también con el de *ventana de* VIVIANI.

La solución dada por este matemático del problema á que acabamos de referirnos, fué por él publicada en un opúsculo titulado *Formazione e misura di tutti i cieli, con la structura e quadratura esatta d'un novo cielo ammirabile, Firenze,* 1692. VIVIANI, sin embargo, no dió á conocer las demostraciones de los resultados por él obtenidos, que pocos años después

insertó el Padre Guido-Grandi en otro opúsculo que sobre el mismo asunto publicó en 1699 con el título de *Geometrica divinatio Vivaneanum problematum.*

La curva de Viviani forma parte de una clase de curvas consideradas por el geómetra griego Eudosio, de las cuales trataremos en seguida. No sin antes añadir que P. Tannery juzga probable que esta curva coincida con otra, denominada *paradoxus* de Menelao, y de la cual se encuentra alguna vaga indicación en las obras de Pappo. *(Bulletin des Sciences Mathématiques,* 1883, p. 290.)

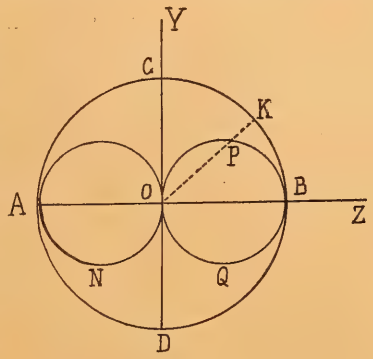


Figura 162.

**646.** Las ecuaciones de la *curva de* Viviani son, tomando para origen de las coordenadas el centro de la esfera, para plano $xy$ el de las bases de los cilindros y para eje de las $y$ la tangente común á los dos círculos (fig. 162),

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 \mp az = 0,$$

si $a$ representa el radio de la esfera.

Para demostrar que esta curva resuelve el *problema de* Viviani, busquemos el área $S$ de la porción del hemisferio que se proyecta en *AMOPBC* y en *ANOQBD.*

Representando por $A$ la figura *OPBCO,* en virtud de un teorema bien conocido del *Cálculo Integral,* hállase que

$$S = 4\int\int_A \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\, dy\, dz = 4\int\int_A \frac{a}{x}\, dy\, dz.$$

Y cambiando de coordenadas con auxilio de las ecuaciones $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$, de las cuales se desprende que $x^2 = a^2 - \rho^2$, por medio de

las fórmulas de *Cálculo Integral*, referentes á la *transformación* de las integrales duplas, hállase luego que también

$$S = 4a \iint \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Para reducir esta integral dupla á dos integrales simples, adviértase ahora que la ecuación polar del arco $OPB$ es $\rho = a\cos\varphi$, y la del arco $BC$, $\rho = a$. De manera que la *integral simple*

$$\int_{a\cos\varphi}^{a} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a \operatorname{sen}\varphi$$

representa la suma de los elementos de la *duple*, contados á lo largo de la línea $OPK$, que forma con $OZ$ el ángulo $\varphi$; y la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \operatorname{sen}\varphi d\varphi = a$$

la suma también de todos los elementos de la duple, correspondientes á las posiciones de $OK$, cuando ésta varía desde $OB$ hasta $OC$.

El resultado final será, pues, el obtenido por VIVIANI:

$$S = 4a^2.$$

**647.** El área lateral de la parte del cilindro que entra en la definición de la curva de Viviani, limitada por la base del hemisferio considerado y por la superficie de la esfera, se determina por la fórmula

$$A = 2\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\frac{ds}{dx}\,dx,$$

en la cual $s$ representa la longitud de los arcos de la curva que limita la base del cilindro. Poniendo por $y$ y $\frac{ds}{dx}$ sus valores, dados por la ecuación del cilindro y por la ecuación

$$\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{y^2 + \frac{1}{4}a^2 + x^2 - ax}{y^2} = \frac{a^2}{4y^2},$$

hállase que

$$A = a\int_0^a \frac{\sqrt{a(a-z)}}{\sqrt{az-z^2}}dz = a\int_0^a \frac{\sqrt{a}dz}{\sqrt{z}} = 2a^2.$$

Resultado éste encontrado por ROBERVAL, quien le dió á conocer en su *Traité des Indivisibles (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris,* 1730, p. 213).

**648.** El ilustre astrónomo D'ARREST *(Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. XIV y XV, p. 401 y 53) advirtió por vez primera que la *curva de* VIVIANI *es la proyección estereográfica de una lemniscata de* BERNOULLI.

Para demostrar lo cual, por referencia á la misma esfera anteriormente considerada, supondremos trazada en el plano coordenado $XY$ la lemniscata que tiene por ecuaciones

$$z = 0 \quad \text{y} \quad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

Imaginemos además un cono que tenga por vértice el punto $(0, 0, -a)$ y por directriz la lemniscata considerada.

Las ecuaciones de la generatriz de este cono son

$$x = ky, \quad z+a = ly.$$

Eliminando las $x$, $y$ y $z$ entre estas ecuaciones y las de la lemniscata, obtiénese la ecuación de condición para que la generatriz encuentre á la directriz

$$(k^2+1)^2 = (k^2-1)\,l^2.$$

Y eliminando después las $k$ y $l$ entre esta ecuación y las de la generatriz, encuéntrase finalmente para ecuación del cono considerado la siguiente:

$$(x^2+y^2)^2 = (z+a)^2(x^2-y^2).$$

Esta ecuación y la de la esfera determinan una curva, cuya proyección sobre el plano $xy$ se obtiene por eliminación entre ambas de la $x$, y la cual tiene por ecuación esta otra:

$$(x^2+2az+a^2)(x^2+y^2-az) = 0,$$

que se descompone en dos, coincidente la segunda con la de uno de los círculos que representan la proyección de la *curva de* VIVIANI sobre el plano $xy$.

Y del mismo modo el cono, cuyo vértice coincide con el punto $(0, 0, a)$, determinará aquella otra parte de la *curva de* VIVIANI que se proyecta sobre el otro círculo:

$$x^2 + y^2 + ax = 0.$$

649. Representando, en conclusión, por $\varphi$ y $\theta$ la longitud y la latitud de un punto cualquiera de la *curva de* VIVIANI, en el supuesto de coincidir con el plano del ecuador los planos de ambos círculos anteriormente considerados, resultará que

$$x = a \operatorname{sen}\theta, \quad y = a \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \quad z = a \cos\varphi \cos\theta;$$

y de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 \pm ax = 0$$

se desprenderá que $\cos\theta = \mp\cos\varphi$, y, por lo tanto, $\theta = \varphi$ en aquella parte de la curva que se proyecta sobre el círculo correspondiente al *signo inferior*, y $\theta = \pi - \varphi$ en la otra parte de la misma curva. Relaciones interesantes entre la *longitud* y la *latitud* de los puntos de la curva á que se refieren, descubiertas por JUAN BERNOULLI.

650. La curva de VIVIANI hállase comprendida entre las curvas á que corresponden las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (x - b)^2 + y^2 = b^2,$$

las cuales representan los lugares geométricos de los puntos de la superficie de un cilindro equidistante de un punto dado en la misma superficie. Estas curvas, designadas por LA LOUBÈRE con el nombre de *ciclo-cilíndricas*, fueron estudiadas por ROBERVAL en su *Traité des indivisibles (Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, t. v, 1730, p. 241).

## III

### HIPOPEDA DE EUDOSIO Ó LEMNISCATA ESFERICA

**651.** La *curva de* VIVIANI forma parte de una clase de curvas, consideradas por EUDOSIO DE CNIDO, geómetra griego que floreció cerca de 400 años antes de J. C., y á las cuales dióse en la antigüedad el nombre de *hipopedas*. EUDOSIO, creador del más antiguo sistema astronómico matemático de que se tiene noticia, reconstituído modernamente por SCHIAPPARELLI, utilizó en él las *hipopedas* para representar las trayectorias del movimiento de anomalía de los planetas (SCHIAPPARELLI: *Le sfere omocentriche di* EUDOSSO, *di* CALLIPO *e di* ARISTOTELE. *Milano*, 1875).

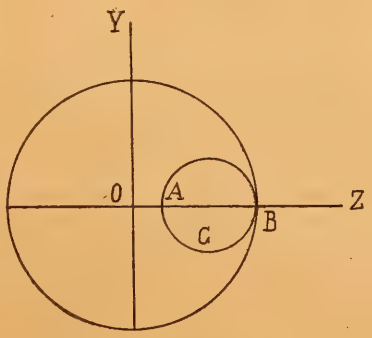


Figura 163.

Según el ilustre astrónomo milanés, las hipopedas son las curvas de intersección de la esfera con los cilindros de base circular á ella tangentes interiormente. Y, en consecuencia, la curva de VIVIANI es una hipopeda, correspondiente al caso de que el radio de la base del cilindro sea mitad del radio de la esfera.

De la definición precedente resulta, sin dificultad, que las hipopedas son curvas de doble curvatura, simétricas con relación al plano del círculo máximo que pasa por el punto de contacto de la esfera con el cilindro, perpendicular á la generatriz de éste, y también al del círculo máximo que pasa por el mismo punto y es perpendicular al anterior. De donde se desprende, igualmente, que el punto de contacto del cilindro con la esfera es un punto doble de la hipopeda, en el cual se reunen dos inflexiones de la misma curva. Por la forma de esta curva, SCHIAPPARELLI la designó con el nombre de *lemniscata esférica*.

Tomando, como en el caso de la curva de VIVIANI, por origen de las coordenadas el centro de la esfera; por plano $xy$ el de la base del cilindro, ypor eje de las $x$, la recta que pasa por el punto de contacto de la esfera con el cilindro (fig. 163), las ecuaciones de las hipopedas serán éstas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (x - b)^2 + y^2 = (a - b)^2;$$

en las cuales $a$ representará el radio de la esfera, y $(b, 0)$ las coordenadas del centro de la base del cilindro.

**652.** El área de la porción de superficie del cilindro, limitada por el plano $zy$ y por la hipopeda, se determinará fácilmente, conforme á continuación se indica.

Planificando el cilindro, vese, en efecto, que esta área puede expresarse por la fórmula

$$A = 2 \int_{2b-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{ds}{dx}\, dx,$$

representando por $s$ la longitud de los arcos de la curva que limita la base del mismo cilindro, y á condición también de sustituir los valores de $y$ y de $\dfrac{ds}{dx}$ por los deducidos de la ecuación del cilindro y de esta otra:

$$\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{(a-b)^2}{y^2}.$$

Resulta, pues, en conclusión,

$$A = 2(a-b) \int_{2b-a}^{a} \frac{\sqrt{2b(a-x)}\, dx}{\sqrt{(a-b)^2 - (x-b)^2}} = 8(a-b)\sqrt{b(a-b)}.$$

Tratándose, en particular, de la curva de VIVIANI, en cuyo caso $b = \dfrac{1}{2}a$, hállase el *teorema de* ROBERVAL ya mencionado (**Núm. 647**).

El resultado referente á las hipopedas, consideradas en general, que acabamos de obtener, hállase mencionado en la *Histoire des Mathématiques* de MONTUCLA (t. III, p. 101).

## IV

### CLELIAS

**653.** Consideremos una esfera (fig. 164), de polos $P$ y $P_1$ y radio $OM = a$; y en el plano, $XOY$, de su ecuador, un punto, de posición variable, $S$, proyección del $M$, situado éste sobre la misma esfera, y determinado por su *colatitud* $MOP = \theta$, y su *longitud* $SOX = \varphi$. Si por $\rho$ designamos, además, la distancia $OS$, proyección sobre el ecuador del radio $OM$, hallaremos que

$$\rho = a \operatorname{sen}\theta,$$

y suponiendo que el punto $M$ describa sobre la esfera una curva, sujeta á la condición de ser, en todas sus posiciones, $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} m\varphi$ ó $\theta = m\varphi$, el $S$ describirá una *rosácea*, inscripta en el mismo ecuador, y que tendrá por ecuación

$$\rho = a \operatorname{sen} m\varphi.$$

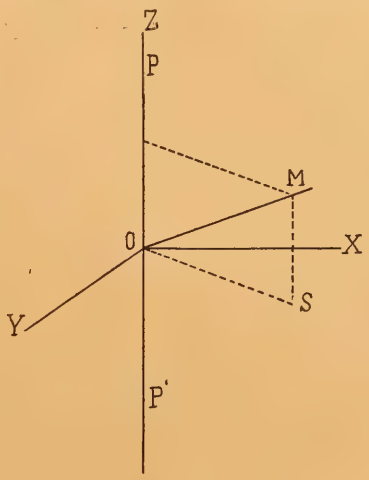



Figura 164.

A la curva así engendrada por $M$ dió el P. Guido-Grandi, en sus *Flores Geometrici*, etc., ya citadas en el Núm. 585, el nombre de *clelia*, en honor de la Condesa Clelia Borromeo, á quien dedicó aquella obra.

La *espiral de* Pappo es una clelia correspondiente á $m = \frac{1}{4}$.

**654.** Por su modo de generación vese fácilmente cuál es la forma de estas curvas. Cada clelia se compone, en efecto, de muchas *hojas* iguales,

tangentes todas al ecuador y reunidas en el polo $P$, que será un *punto múltiplo* de la curva.

Por medio de las fórmulas

$$x = a \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad \text{y} \quad z = a\cos\theta,$$

obtiénense las coordenadas cartesianas de los puntos de las clelias, poniendo en ellas $\theta = m\varphi$, lo que da

$$x = a \operatorname{sen} m\varphi \cos\varphi, \quad y = a \operatorname{sen} m\varphi \operatorname{sen}\varphi, \quad z = a \cos m\varphi.$$

**655.** Designemos por $s$ la longitud de un arco de clelia; y de la fórmula

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}\,.\,d\varphi,$$

con auxilio de las ecuaciones anteriores, se deducirá que

$$ds = a\sqrt{1+m^2}\sqrt{1 - \frac{1}{1+m^2}\cdot\cos^2 m\varphi}\,.\,d\varphi;$$

y, por lo tanto, poniendo $m\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$,

$$ds = a\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\sqrt{1 - \frac{1}{1+m^2}\operatorname{sen}^2\psi}\,.\,d\psi.$$

Luego *la longitud del arco considerado exprésase por una integral elíptica de segunda especie* (Guido-Grandi: *l. c.*).

**656.** Las clelias fueron empleadas por Guido-Grandi para resolver el *problema de* Viviani, á que nos hemos referido en el Núm. **645**.

Busquemos, en efecto, el área de aquella porción de la superficie esférica, limitada por una media *hoja* de la clelia, por el meridiano que la repasa de la hoja siguiente y por el ecuador. Como en el Núm. **646**, se hallará que

$$S = a\iint\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = a\int_0^{\frac{\pi}{2m}} d\varphi \int_{a\operatorname{sen} m\varphi}^{a}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}};$$

ó

$$S = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos m\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{m}.$$

**657.** El volumen $V$ del sólido limitado por aquella porción de la superficie esférica, exterior á la clelia, comprendida entre esta curva y el meridiano que pasa por una de sus tangentes, por este meridiano, por el plano del ecuador y por el cilindro que tiene por base la proyección sobre el plano del ecuador de la clelia considerada, es dado por la fórmula

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2m}} d\varphi \int_{a \operatorname{sen} m\varphi}^{a} \sqrt{a^2 - r^2} \, . \, r \, dr = \frac{2}{9} \cdot \frac{a^3}{m}.$$

## V

### LOXODROMIA

**658.** Desígnase con el nombre de *loxodromia* la curva esférica secante de todos los círculos máximos que pasan por los mismos polos, formando con ellos un ángulo constante, $V$.

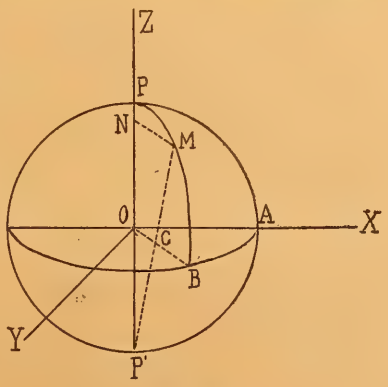


Figura 165.

Sean $PA$ uno de estos círculos ó meridianos (figura 165), á partir del cual se cuentan las *longitudes;* $\varphi$ la *longitud* del punto $M$, generador de la curva; y $\theta$ la *colatitud* $PM$ del mismo punto. Del triángulo infinitesimal formado por las tangentes á la curva y al meridiano $PB$ en el punto $M$, y por la tangente al paralelo infinitamente próximo de aquel que pasa por $M$, y del triángulo esférico formado por

un arco infinitamente pequeño de la curva considerada y por los meridianos que pasan por $M$ y por un punto infinitamente próximo, se deduce, representando por $s$ la longitud de los arcos de la *loxodromia*, que

$$ds \cdot \cos V = d\theta \quad \text{y} \quad ds \cdot \operatorname{sen} V = -\operatorname{sen}\theta\, d\varphi,$$

contando las *longitudes* de manera que $s$ disminuya conforme $\varphi$ aumente.

Si $V$ es constante, integrando la primera de las dos ecuaciones anteriores, resultará esta otra:

$$s \cos V = \theta_1 - \theta_0.$$

Eliminando $ds$ entre las mismas dos ecuaciones previas, hállase además que

$$d\varphi = -\operatorname{tang} V \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

E, integrando esta última, se infiere, en conclusión, que

$$\varphi - \varphi_0 = -\operatorname{tang} V \left[ \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta_0 \right].$$

Y así se encuentra la ecuación de la *loxodromia*, referida á coordenadas esféricas, y la longitud de sus arcos en función de las mismas coordenadas, las cuales fácilmente pueden convertirse en cartesianas con auxilio de las siguientes fórmulas, representando en ellas por $a$ el radio de la esfera:

$$x = a \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad y = a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad \text{y} \quad z = a \cos\theta.$$

A la ecuación de la curva puede darse forma más sencilla, adoptando por *primer meridiano* aquel que pasa por el punto donde la curva corta el ecuador. Porque entonces serán, en efecto, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ y $\varphi_0 = 0$; y, en consecuencia,

$$\varphi = -\operatorname{tang} V \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta. \tag{1}$$

Y por medio de esta ecuación, ó de la anterior, adviértese que $\varphi$ aumenta indefinidamente cuando $\theta$ disminuye y se aproxima indefinidamente también á 0: luego la curva posee la forma de una espiral, compuesta de un número infinito de vueltas descritas alrededor del polo $P$, al cual de continuo se aproxima sin jamás alcanzarle.

659. Propongámonos ahora encontrar la *proyección estereográfica* de la loxodromia por referencia al polo $P'$, ó la intersección con el plano del ecuador del cono que tiene por vértice el polo $P'$ y por *directriz* la misma loxodromia.

Las coordenadas polares del punto $C$ ó de la proyección estereográfica del $M$ de la curva son la longitud $\varphi$ del mismo punto $M$ y la recta $OC=r$. Mas, por ser $MN$ perpendicular á $OP$,

$$\frac{CO}{MN}=\frac{OP'}{P'N};$$

ó, por cuanto $NM=a\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $NO=a\cos\theta$,

$$\frac{r}{a\,\mathrm{sen}\,\theta}=\frac{a}{a+a\cos\theta}.$$

Luego

$$r=\frac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+\cos\theta}=a\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\theta=ae^{-\frac{\varphi}{\mathrm{tang}\,V}};$$

*ecuación polar de la proyección estereográfica de la loxodromia* relativamente al polo $P'$, que, según esto, es una *espiral logarítmica*.

660. De la *loxodromia* trató por vez primera el ilustre geómetra portugués Pedro Nuñez en 1537, en su *Tratado en defensao de carta de marear*, y en 1546, en su obra titulada *De arte atque ratione navigandi*, donde consignó los primeros principios de la teoría de aquella curva, que le sirvieron para resolver el problema náutico de «hallar el derrotero de una nave para que ésta corte todos los meridianos por donde pasa, formando con ellos un ángulo constante». Después estudiaron la misma curva Stevin en su *Precis de Géographie* y Snellius en su *Tiphys Batavus*.

En las *Phylosophical Transactions* del año 1596, Halley demostró

que la proyección estereográfica de la *loxodromia* sobre el plano del ecuador es una *espiral logarítmica;* LEIBNITZ, en 1691, consignó asimismo en las *Acta Eruditorum* la ecuación de la curva renglones antes expuesta; JACOBO BERNOULLI, en el mismo volumen de aquellas *Acta (Opera,* t. I, p. 444), además de la longitud de sus arcos, determinó el área de la superficie esférica limitada por un arco de *loxodromia,* por el ecuador y por dos meridianos; y MAUPERTUIS, en las *Memorias de la Academia de Ciencias de París* (año 1744), se ocupó también de la misma curva; etc , etc.

Para el estudio más detallado de la historia de la loxodromia, puede verse la obra de GÜNTHER titulada *Studien zur Geschichte der Math. und Phy. Geographie* (Halle, 1879); y para el estudio general de las *loxodromias trazadas sobre una superficie de revolución cualquiera*, puede verse un artículo interesante de PIRONDINI, publicado en 1888 en los *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

## VI

### EPICICLOIDES ESFÉRICAS

**661.** Dase el nombre de *epicicloide esférica* á la curva descrita por un punto de una circunferencia móvil que rueda en contacto con otra fija, cuyo plano forma con el de la primera un ángulo constante.

Las *epicicloides esféricas* comenzaron á ser estudiadas por JACOBO HERMANN en una Memoria titulada *De epicycloidibus in superficie spherica descriptis,* publicada en los *Comment. Acad. Petrop.* (t. I, p. 210): inducido á ello al tratar de resolver un problema propuesto por OFFENBURGUS en las *Acta Eruditorum* (1718, p. 175), en el cual se pedía la construcción, sobre la superficie de una esfera, de una ventana limitada por un contorno rectificable.

Poco después fijó su atención en las mismas curvas JUAN BERNOULLI en dos trabajos coleccionados en sus *Opera omnia* (t. III, p. 216 y 230), donde demostró que no es exacta en todos los casos la solución del problema de OFFENBURGUS propuesta por HERMANN, y estudió á fondo el problema de la rectificación de las *epicicloides esféricas.*

**662.** Busquemos tras de esto las ecuaciones de las mencionadas epicicloides, y para ello supongamos que $LAK$ (fig. 166) represente el círculo fijo, de radio $\rho$, trazado en el plano $xy$, y cuyo centro, $O$, tomaremos por origen de las coordenadas; $AMEA$ el círculo móvil, de centro en $C$ y radio $r$; $M$ el punto generador de la curva, que admitiremos parte del $L$, situado en la recta $OL$, que nos servirá de eje de las $x$; $\omega$ el ángulo que uno con otro forman los planos de ambos círculos; $Ox'$ y $Oy'$ dos nuevos

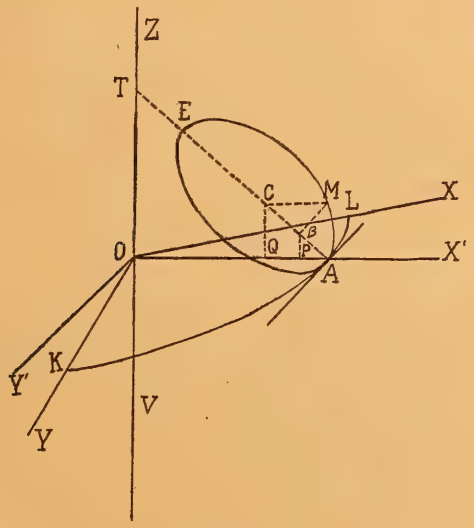



Figura 166.

ejes coordenados rectangulares y móviles, el primero de los cuales pasa por el punto $A$ donde el círculo móvil toca al círculo fijo; $t$ el ángulo $MCA$; y $\theta$ el $LOA$.

Si por el punto $M$ trazamos la paralela $MB$ á la tangente común á los dos círculos en el punto $A$, esta recta cortará á la $CA$ en otro punto, $B$, del plano $ZOA$, que se proyecta en el punto $P$ de la recta $Ox'$. Y el $C$ se proyectará en el punto $Q$ de la misma recta, y el ángulo $CAQ$ será igual al $\omega$.

Y todo esto sentado, en virtud del modo de generación de la curva, la longitud del arco $MA$ será igual á la del arco $LA$, y resultará, por lo tanto, que

$$rt = \rho\theta.$$

Pero las coordenadas del punto $M$, referidas á los ejes $x'$, $y'$, $z$, son

$$x' = OP, \quad y' = MB, \quad z = BP;$$

y, en consecuencia,

$$x' = OA - AP = OA - (CA - CB)\cos\omega = \rho - r(1 - \cos t)\cos\omega,$$

$$y' = -r\,\mathrm{sen}\,t, \quad \text{y} \quad z = BA\,\mathrm{sen}\,\omega = r(1 - \cos t)\,\mathrm{sen}\,\omega.$$

Ó

$$x' = \rho - r\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\cos\omega,$$

$$y' = -r\,\mathrm{sen}\frac{\rho}{r}\theta, \quad z = r\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\mathrm{sen}\,\omega.$$

Recordemos ahora que entre las coordenadas $x'$ é $y'$ y las $x$ é $y$ existen las siguientes relaciones:

$$x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{é} \quad y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta.$$

Luego las ecuaciones de las epicicloides esféricas podrán expresarse de este modo:

$$x = \rho\cos\theta - r\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\cos\omega\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\frac{\rho}{r}\theta\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta - r\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}\frac{\rho}{r}\theta\cos\theta \quad \text{y}$$

$$z = r\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\mathrm{sen}\,\omega:$$

donde $\theta$ designa la variable independiente.

663. Si por el centro del círculo móvil concebimos una perpendicular al plano de este círculo, esta perpendicular cortará al eje de las $x$ en un punto, $V$, independiente de $\theta$, y que podrá considerarse como eje de un cono de revolución cuya base sea el círculo considerado. Por lo tanto, la *epicicloide esférica podrá también considerarse como engendrada por un punto de la circunferencia que limita la base de un cono recto, al rodar éste sobre otro cono fijo, cuyo vértice coincide con el del cono móvil y cuya base sea el círculo fijo.*

664. Además, todos los puntos de la epicicloide hállanse situados sobre la superficie de una esfera cuyo centro es el punto $V$, y el radio, $r$, igual á $VL$. Para determinar este radio basta trasladar el origen de las coordenadas al punto $V$, admitiendo que $Z = x + h$, y $h$ sea una cantidad que determinaremos á renglón seguido.

Partiendo, por de pronto, de la ecuación

$$S^2 = x^2 + y^2 + Z^2,$$

hállase que

$$S^2 = \rho^2 + 2r^2 - 2r^2 \cos\frac{\rho}{r}\theta - 2\rho r\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\cos\omega$$

$$+ h^2 + 2hr\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\operatorname{sen}\omega;$$

resultado que debe ser independiente de $\theta$. Luego

$$h = \frac{\rho\cos\omega - r}{\operatorname{sen}\omega};$$

y, en consecuencia,

$$S^2 = \rho^2 + \left(\frac{\rho\cos\omega - r}{\operatorname{sen}\omega}\right)^2:$$

fórmula que determina el radio $S$ de la esfera sobre la cual se encuentra situada la epicicloide.

**665.** Por ser

$$\frac{dx}{d\theta} = -\rho \operatorname{sen}\theta + r\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\cos\omega\operatorname{sen}\theta$$

$$-\rho\operatorname{sen}\frac{\rho}{r}\theta\cos\omega\cos\theta + r\operatorname{sen}\frac{\rho}{r}\theta\cos\theta + \rho\cos\frac{\rho}{r}\theta\operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \rho\cos\theta - r\left(1 - \cos\frac{\rho}{r}\theta\right)\cos\omega\cos\theta$$

$$-\rho\operatorname{sen}\frac{\rho}{r}\theta\cos\omega\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\frac{\rho}{r}\theta\operatorname{sen}\theta - \rho\cos\frac{\rho}{r}\theta\cos\theta,$$

y

$$\frac{dz}{d\theta} = \rho\operatorname{sen}\frac{\rho}{r}\theta\operatorname{sen}\omega,$$

dedúcese que

$$ds^2 = \left[A + B\cos\frac{\rho}{r}\theta - r^2\cos^2\frac{\rho}{r}\theta\operatorname{sen}^2\omega\right]d\theta^2;$$

en donde

$$A = 2\rho^2 + r^2\cos^2\omega + r^2 - 4\rho r\cos\omega,$$

y

$$B = -2\rho^2 - 2r^2\cos^2\omega + 4\rho r\cos\omega.$$

Pues, poniendo ahora

$$\cos\frac{\rho}{r}\theta = t, \quad \frac{\rho}{r}\operatorname{sen}\frac{\rho}{r}\theta d\theta = -dt,$$

hállase que

$$ds = \frac{r}{\rho}\sqrt{\frac{r^2t^2\operatorname{sen}^2\omega - Bt - A}{t^2-1}}\,dt$$

$$= \frac{r}{\rho}\sqrt{\frac{r^2t\operatorname{sen}^2\omega + r^2\operatorname{sen}^2\omega - B}{t+1}}\,dt;$$

ó

$$ds = \frac{r^2}{\rho} \operatorname{sen}\omega \sqrt{\frac{t+K}{t+1}}\, dt,$$

en donde

$$K = \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \omega - B}{r^2 \operatorname{sen}^2 \omega}.$$

E, integrando tras de esto,

$$s = \frac{r^2}{\rho} \operatorname{sen}\omega \int \frac{(t+K)\,dt}{\sqrt{(t+1)\,(t+K)}}$$

$$= \frac{r^2}{2\rho} \operatorname{sen}\omega \left[ \int \frac{(2t+K+1)\,dt}{\sqrt{t^2+(K+1)\,t+K}} + \int \frac{(K-1)\,dt}{\sqrt{t^2+(K+1)\,t+K}} \right]$$

$$= \frac{r^2}{\rho} \operatorname{sen}\omega \left\{ \sqrt{t^2+(K+1)\,t+K} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(K-1) \log \left[ K+1+2t+2\sqrt{t^2+(K+1)\,t+K} \right] \right\};$$

y, en conclusión,

$$s = \frac{r^2}{\rho} \operatorname{sen}\omega \left\{ \sqrt{\cos^2 \frac{\rho}{r}\theta + (K+1)\cos\frac{\rho}{r}\theta + K} \right.$$

$$+ \frac{1}{2}(K-1) \log \left[ K+1+2\cos\frac{\rho}{r}\theta \right.$$

$$\left. \left. + 2\sqrt{\cos^2 \frac{\rho}{r}\theta + (K+1)\cos\frac{\rho}{r}\theta + K} \right] \right\}.$$

La determinación del arco $s$ depende, pues, de logaritmos, excepto cuando es $K=1$, ó $\cos\omega = \frac{\rho}{r}$. Lo cual se verifica cuando el radio $r$ del

círculo móvil es igual á $AT$: ó cuando *el centro del círculo móvil coincide con el de la esfera*. Porque en este caso.

$$s = \frac{r^2}{\rho} \operatorname{sen}\omega \left[\cos\frac{\rho}{r}\theta + 1\right],$$

y la epicicloide resulta exactamente rectificable.

*De los arcos de esta epicicloide especialísima es, pues, necesario valerse para resolver el problema de* Offenburgus (Juan Bernoulli: *l. c).*

## VII

### ELIPSE ESFÉRICA

**666.** Sean $A$ y $B$ dos puntos fijos (fig. 167), correspondientes á la circunferencia de un círculo máximo de la esfera, y $M$ otro punto móvil sobre la superficie de la esfera, de tal modo que en todas sus posiciones se verifique la condición

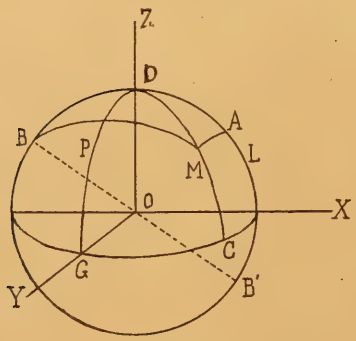



Figura 167.

$$(a) \quad MA + MB = 2c,$$

representando por $c$ una constante y por $MA$ y $MB$ dos arcos de círculos máximos distintos, y en tales supuestos procedamos á buscar la ecuación de la curva engendrada por $M$.

Para plano $xx$ tomaremos el del círculo máximo que pasa por los puntos fijos $A$ y $B$; para el $xy$ el del círculo máximo que pasa por el punto medio de $AB$; y para el $xy$ el que pasa por el centro de la esfera y es perpendicular á los anteriores; y sean además $\varphi$ y $\theta$ la *longitud* $ADC$ y la *colatitud* $DM$ del punto $M$.

Del teorema fundamental de la Trigonometría esférica, representando por $d$ el arco $AD$, se desprende que

$$\cos MA = \cos\theta \cos d + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} d \cos\varphi,$$

$$\cos MB = \cos\theta \cos d - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} d \cos\varphi.$$

Ecuaciones de las cuales se deduce que

$$\cos\frac{MB - MA}{2} \cos\frac{MB + MA}{2} = \frac{1}{2}[\cos MB + \cos MA] = \cos\theta \cos d,$$

y

$$\operatorname{sen}\frac{MB - MA}{2} \operatorname{sen}\frac{MB + MA}{2} = -\frac{1}{2}[\cos MB - \cos MA] = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} d \cos\varphi;$$

y de éstas la que sigue:

$$(1) \qquad 1 = \frac{\cos^2\theta \cos^2 d}{\cos^2 c} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2 d \cos^2\varphi}{\operatorname{sen}^2 c}.$$

Ecuación la última, en *coordenadas esféricas*, de la curva engendrada por el punto $M$, á la cual se aplica el nombre de *elipse esférica;* así como al punto $D$ se le atribuye el de *centro* de la misma curva, y á los $A$ y $B$ el de *focos*.

**667.** La elipse esférica es, evidentemente, simétrica por referencia á los planos $xx$ y $xy$, y corta el arco $DF$ en un punto $L$ tal que

$$DL = \frac{1}{2}(AL + BL) = c,$$

y al arco $DG$ en otro punto, $P$, de manera que $PA = PB = c$.

Representando por $b$ el arco $DP$, podremos introducir esta constante, en lugar de la $d$, en la ecuación de la curva, conforme á continuación se demuestra.

Supongamos, efectivamente, que $\varphi = \frac{\pi}{2}$, y advirtamos que de aquella ecuación resulta entonces que $\theta = b$, ó

$$1 = \frac{\cos^2 b \cos^2 d}{\cos^2 c}.$$

Y eliminando ahora la $d$ entre esta ecuación y la anterior, encuéntrase esta otra:

$$1 = \operatorname{sen}^2\theta \left[ \frac{\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}^2 c} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\operatorname{sen}^2 b} \right]. \tag{2}$$

668. En coordenadas cartesianas, una de las ecuaciones de la elipse esférica es necesariamente la ecuación de la esfera, y la otra se deduce como sigue:

Póngase $x = R \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$ é $y = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$, representando por $R$ el radio de la esfera; y de aquí inmediatamente se infiere que

$$R^2 = \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 c} + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 b}. \tag{3}$$

Ecuación ésta de la proyección de la curva sobre el plano $xy$, y de la cual se deduce que *la elipse esférica resulta de la intersección de la esfera con un cilindro de base elíptica:* siendo también cosa fácil de averiguar que las proyecciones de la curva sobre los otros planos de las coordenadas han de representar una hipérbola y otra elipse.

669. Llegados á este punto, natural es asimismo tratar de averiguar cuál es la curva descrita por $M$ cuando haya de ser

$$MB - MA = 2c.$$

Pero designando por $B'$ un punto del meridiano $DA$, tal que

$$DB' = \pi - d,$$

adviértese sin dificultad que

$$MB' + MA = \pi - MB + MA = \pi - 2c = 2\left(\frac{\pi}{2} - c\right).$$

Luego las curvas que satisfacen á la nueva condición también son elipses esféricas en distinta disposición que las anteriores, relativamente á los ejes de las coordenadas.

**670.** *Cualquier elipse esférica puede considerarse como intersección de la esfera con un cono de base elíptica cuyo vértice coincida con el centro de la esfera, y que tenga por eje el radio que pasa por el centro de la elipse.*

Para demostrarlo, advirtamos que las ecuaciones de la recta que pasa por $M$ y por el centro de la esfera son

$$Y = \frac{y}{x} X \quad \text{y} \quad Z = \frac{z}{x} X.$$

Pues eliminando las $x$, $y$ y $z$ entre estas ecuaciones, la de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

y la (3), hállase como final esta otra:

$$\frac{X^2}{\operatorname{tang}^2 c} + \frac{Y^2}{\operatorname{tang}^2 b} = Z^2,$$

que representa el cono á que nos referimos.

Y si por el punto $D$ concebimos un plano tangente á la esfera, este plano cortará al cono considerado según una elipse determinada por las ecuaciones

$$Z = R \quad \text{y} \quad \frac{X^2}{R^2 \operatorname{tang}^2 c} + \frac{Y^2}{R^2 \operatorname{tang}^2 b} = 1.$$

**671.** Para determinar el área de la porción de la esfera limitada por la elipse, podemos recurrir á la fórmula general de Cálculo Integral

$$A = \iint \sqrt{\left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\theta^2}\right) \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{d\rho}{d\varphi}} \cdot \rho \, d\theta \, d\varphi;$$

que, por ser en el caso de la esfera $\rho = R$, se reduce á esta otra:

$$A = R^2 \iint \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Ó, extendiendo la integral doble á toda el área considerada,

$$A = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)\, d\varphi:$$

en donde se debe sustituir $\theta$ por su valor expreso en función de $\varphi$, dado por la ecuación (2).

Para lo cual advertiremos que esta ecuación (2) puede escribirse como sigue:

$$\cos\theta = \cos c \sqrt{\frac{1 + \dfrac{\operatorname{tang}^2 c}{\operatorname{tang}^2 b} \operatorname{tang}^2 \varphi}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 c}{\operatorname{sen}^2 b} \operatorname{tang}^2 \varphi}}.$$

Luego

$$A = R^2 \left\{ 2\pi - 4 \cos c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + \dfrac{\operatorname{tang}^2 c}{\operatorname{tang}^2 b} \operatorname{tang}^2 \varphi}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 c}{\operatorname{sen}^2 b} \operatorname{tang}^2 \varphi}}\, d\varphi \right\}.$$

Y poniendo ahora

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} b} \operatorname{tan}\varphi,$$

hállase también que

$$A = R^2 \left\{ 2\pi - 4 \cos c\, \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\cos^3\psi \left(1 + \dfrac{\operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 c} \operatorname{tg}^2\psi\right) \sqrt{1 + \dfrac{\cos^2 c}{\cos^2 b} \operatorname{tg}^2\psi}} \right\}$$

$$= R^2 \left\{ 2\pi - 4c \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\left[1 - \dfrac{\operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 c} \operatorname{sen}^2\psi\right] \sqrt{1 - \dfrac{\cos^2 b - \cos^2 c}{\cos^2 b} \operatorname{sen}^2\psi}} \right\}.$$

Pero de la resolución del triángulo $PDA$ se desprende que

$$\cos d = \frac{\cos c}{\cos b};$$

y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}^2 d = \frac{\cos^2 b - \cos^2 c}{\cos^2 b}.$$

Además, representando por $e$ la excentricidad de la elipse que sirve de base al cono considerado anteriormente, el cuadrado de esta excentricidad tiene por expresión

$$e^2 = \frac{\operatorname{tang}^2 c - \operatorname{tang}^2 b}{\operatorname{tang}^2 c}.$$

Con lo cual el valor de $\Delta$ podrá representarse como sigue:

$$A = R^2 \left\{ 2\pi - 4\cos c \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \psi)\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 d \operatorname{sen}^2 \psi}} \right\}.$$

*De manera que el área considerada depende de una integral elíptica de tercera especie.*

Conclusión deducida por Gudermann y publicada en el *Journal de Crelle*, t. xiv, p. 217; pero la demostración expuesta fué dada por Booth, en su obra titulada *A Treatrise on some new geometrical methods*, t. ii, *London*, 1877, p. 9.

**672.** Para hallar la longitud de los arcos de la elipse esférica, podemos escribir la ecuación de su proyección sobre el plano $xy$ del siguiente modo:

$$x = A\cos\omega \quad \text{é} \quad y = B\operatorname{sen}\omega,$$

en donde

$$A = R\operatorname{sen} c \quad \text{y} \quad B = R\operatorname{sen} b;$$

adquiriendo con esto la ecuación de la esfera esta otra forma:

$$z = \sqrt{R^2 - [A^2\cos^2\omega + B^2\operatorname{sen}^2\omega]}.$$

De todo lo cual, atribuyendo á la $\omega$ las condiciones de variable independiente, se desprenden las siguientes consecuencias

$$\frac{ds^2}{d\omega^2} = \left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2$$

$$= \frac{R^2 (A^2 \operatorname{sen}^2 \omega + B^2 \cos^2 \omega) - A^2 B^2}{R^2 - (A^2 \cos^2 \omega + B^2 \operatorname{sen}^2 \omega]}$$

$$= B^2 \frac{1 + \dfrac{A^2 (R^2 - B^2)}{B^2 (R^2 - A^2)} \operatorname{tang}^2 \omega}{1 + \dfrac{R^2 - B^2}{R^2 - A^2} \operatorname{tang}^2 \omega}.$$

Y suponiendo ahora que sea

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{A}{B} \sqrt{\frac{R^2 - B^2}{R^2 - A^2}} \operatorname{tang} \omega,$$

hállase también que

$$ds = \frac{B^2}{A} \sqrt{\frac{R^2 - A^2}{R^2 - B^2}} \cdot \frac{d\psi}{\left[1 - \dfrac{R^2 (A^2 - B^2)}{A^2 (R^2 - B^2)} \operatorname{sen}^2 \psi\right] \sqrt{1 - \dfrac{A^2 - B^2}{A^2} \operatorname{sen}^2 \psi}};$$

ó, reemplazando $A$ y $B$ por sus valores, poco antes consignados,

$$ds = R \frac{\operatorname{sen}^2 b \cos c}{\operatorname{sen} c \cos b} \cdot \frac{d\psi}{\left[1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 c \cos^2 b} \operatorname{sen}^2 \psi\right] \sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 c} \operatorname{sen}^2 \psi}},$$

ó

$$ds = R \operatorname{sen} b \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \cdot \frac{d\psi}{\left[1 - \dfrac{\operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 c} \operatorname{sen}^2 \psi\right] \sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 c} \operatorname{sen}^2 \psi}}.$$

Pero advirtiendo asimismo que

$$e^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 c - \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{tg}^2 c} = \frac{\operatorname{sen}^2 c - \operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen}^2 c \cos^2 b},$$

llégase á esta otra conclusión final

$$ds = R \operatorname{sen} b \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \cdot \frac{d\psi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \psi)\sqrt{1 - e^2 \cos^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 \psi}}.$$

Igualdad debida también á GUDERMANN *(Journal de Crelle,* t. XIV, página 169), según la cual, *la rectificación de la elipse esférica depende de una integral elíptica de tercera especie, conforme asimismo demostró* L. BOOTH *(l. c.).*

673. El primer geómetra que se ocupó en el estudio de la *elipse esférica,* perece haber sido FUSS, el cual publicó, referente á esta curva, dos Memorias, en las *Nova Acta Petropolitana,* año de 1788, tituladas *Problema quorundam sphaericorum solutio* y *De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae.*

De la misma curva trató poco más tarde F. F. SCHUBERT, en otra Memeria publicada en 1801 en las mencionadas *Nova Acta,* etc., con el título *Problemata ex doctrina sphaerica.* Y con posterioridad diéronse á la estampa otros muchos trabajos referentes á esta misma curva, de los cuales consideramos suficiente mencionar los siguientes:

MAGNUS: *Théorèmes sur l'hyperboloide á une nappe et sur les surfaces coniques du second ordre (Annali di Matematica, Milano,* t. XVI, 1825).

CHASLES: *Mémoire sur les propriétés générales des coniques sphériques (Mémoires de l'Académie de Belgique,* t. VI, 1831); *y Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 1860).

GUDERMANN: *Ueber die analytische Sphärik (Journal de Crelle,* VI tomo, 1830).

CREMONA: *Sur les coniques sphériques (Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. XIX, 1860).

CAYLEY: *On a theorem relating to Spherical conics (Quarterly Journal,* t. III, 1860).

VOGHT: *Die sphärische Kegelschnitt (Breslau,* 1873).

Noticias bibliográficas éstas referentes á la elipse esférica, procedentes del libro de GINO LORIA, titulado *Il passato ed il presente delle principali teoria geometriche (Torino,* 1896, p. 136).

En el notable *Tratado de Geometría de la Posición*, de D. E. Torroja (Madrid, 1899, página 672), puede verse el estudio, por métodos puramente geométricos, de la elipse esférica.

## VIII

### CÍCLICAS

**674.** La curva que hemos estudiado pertenece á una clase general de curvas que resultan de la intersección de un cono cualquiera de segundo orden con una esfera, á las que Laguerre dió el nombre de *analagmáticas esféricas* en un artículo publicado en 1867 en el *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, y Darboux el de *cíclicas* en su notable Memoria *Sur une classe remarquable de courbes etc.* (París, 1873), donde las estudió con profundidad. Estas curvas también resultan de la intersección de la esfera con cualquier superficie de segundo orden, y por cada una de ellas pueden pasar cuatro conos, reales ó imaginarios, distintos ó coincidentes, según un teorema debido á Poncelet, y demostrado analíticamente por Painvin en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1868 y 1869).

Si se toma por origen de coordenadas el centro de la esfera y se representan por $(\alpha, \beta, \gamma)$ las del vértice del cono, las ecuaciones de las curvas consideradas pueden siempre reducirse á la forma

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ A\,(x-\alpha)^2 + B\,(y-\beta)^2 + C\,(z-\gamma)^2 = 0, \end{cases}$$

en las cuales $R$ representa el radio de la esfera, y $A$, $B$ y $C$ constantes arbitrarias.

La *elipse esférica* corresponde al caso particular de estar situado el vértice del cono en el centro de la esfera.

**675.** Pasemos ahora á estudiar sucintamente algunas propiedades fundamentales de las cíclicas, considerando primero sus transformadas por radios vectores recíprocos. Llamemos $(x_1, y_1, z_1)$ á las coordenadas del

centro de transformación, y traslademos el origen á este punto; las ecuaciones de la cíclica son

$$(x + x_1)^2 + (y + y_1)^2 + (z + z_1)^2 = R^2,$$
$$A(x + x_1 - \alpha)^2 + B(y + y_1 - \beta)^2 + C(z + z_1 - \gamma)^2 = 0;$$

y haciendo

$$x = \frac{k^2 X}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad y = \frac{k^2 Y}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad z = \frac{k^2 Z}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

resulta para las ecuaciones de la transformada

$$(R^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2k^2(x_1 X + y_1 Y + z_1 Z) - k^4 = 0,$$
$$[A(x_1 - \alpha)^2 + B(y_1 - \beta)^2 + C(z_1 - \gamma)^2](X^2 + Y^2 + Z^2)^2$$
$$+ 2k^2[A(x_1 - \alpha)X + B(y_1 - \beta)Y + C(z_1 - \gamma)Z](X^2 + Y^2 + Z^2)$$
$$+ k^4(AX^2 + BY^2 + CZ^2) = 0,$$

de las cuales se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª Eliminando $X^2 + Y^2 + Z^2$ entre dichas ecuaciones, la resultante es de segundo grado: luego *la cíclica se transforma en otra cíclica.*

2.ª Si el centro de transformación está sobre la esfera, se tiene $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R^2$, y, por consiguiente, la primera de las ecuaciones precedentes se reduce á la siguiente:

$$2(x_1 X + y_1 Y + z_1 Z) + k^2 = 0,$$

y la curva es plana. Cambiando la dirección de los ejes coordenados, y eligiendo para eje de las $z$ una perpendicular al plano de la curva, la segunda ecuación toma la forma

$$(X^2 + Y^2)^2 + u_1(X^2 + Y^2) + u_2 = 0,$$

en la que $u_1$ y $u_2$ representan funciones enteras de $X$ é $Y$ de primero y segundo grado, respectivamente. Por tanto, *la transformada de la cíclica es en este caso una cuártica bicircular.* Darboux *(l. c.)* se fundó en este

teorema para deducir de las propiedades de las cíclicas esféricas las de las cuárticas bicirculares.

3.ª Si el centro de transformación está sobre la cíclica considerada, se tiene

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R^2, \quad A(x_1 - \alpha)^2 + B(y_1 - \beta)^2 + C(z_1 - \gamma)^2 = 0,$$

y la cíclica se transforma en una *cúbica circular*.

4.ª Si el centro de transformación está situado en el vértice del cono y el módulo $k$ es igual al segmento de las tangentes á la esfera trazadas por dicho punto, comprendido entre él y el de contacto, ni el cono ni la esfera son alterados por la transformación considerada, sucediendo, por consiguiente, lo mismo á su intersección. *La cíclica es, pues, analagmática relativamente á los vértices de los cuatro conos que pasan por ella.*

**676.** Sea $P$ el vértice del cono $(P)$, que al cortar á la esfera determina la cíclica considerada, y $(L)$ la circunferencia de contacto de la esfera con el cono circunscripto del mismo vértice. Los planos tangentes al cono $(P)$ determinan en la esfera circunferencias $(C)$ que son bitangentes á la cíclica en cuestión.

Por otra parte, cada circunferencia $(C)$ es tangente á dos círculos máximos de la esfera, cuyos planos pasan por $P$, estando los puntos de contacto situados sobre la circunferencia $(L)$. Luego las circunferencias $(C)$ cortan todas ortogonalmente á la circunferencia $(L)$.

El polo de cada una de estas circunferencias $(C)$ debe estar situado sobre la perpendicular bajada desde el centro de la esfera al plano tangente al cono $(P)$, que contiene la circunferencia considerada. Luego los polos de $(C)$ forman una curva que coincide con la que resulta de la intersección de la esfera con el cono, suplementario de $(P)$, cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0,$$

y la curva es, por consiguiente, una *elipse esférica*.

Resulta, pues, el siguiente teorema:

*La cíclica es la envolvente de las circunferencias* (C) *que cortan orto-*

*gonalmente á la de contacto del cono con la esfera, y cuyos polos están situados sobre una elipse esférica.*

Los otros tres conos de segundo orden que pasan por la cíclica originan análogas formas de generación de esta curva.

**677.** Llamando, como en las curvas planas, *focos* de las curvas esféricas á los centros de círculos de radio nulo bitangentes á la curva, se ve que los puntos de contacto sobre la esfera de los planos tangentes comunes á ella y al cono $(P)$ son focos de la cíclica considerada. Resulta, por consiguiente, que los cuatro puntos de intersección de la circunferencia $(L)$ con la elipse esférica anteriormente estudiada son focos de la cíclica. Á los cuatro modos de generación de la curva, como envolvente de círculos bitangentes, corresponden, pues, 16 focos, reales ó imaginarios, distintos ó coincidentes.

**678.** Sean $\rho_1$, $\rho_2$ y $\rho_3$ las distancias de un punto cualquiera de la cíclica á tres focos, situados en la circunferencia $(L)$, y $D_1$, $D_2$, $D_3$ las del mismo punto á los planos tangentes á la esfera en estos focos, los cuales, según ya dijimos, son también tangentes al cono $(P)$.

Llamando $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$ las coordenadas de tres puntos del cono situados respectivamente sobre las tres rectas de contacto de esta superficie con los planos tangentes á la esfera, mencionados anteriormente, las ecuaciones del cono y de estos planos son, tomando el vértice del cono por origen,

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 &= 0, \\ Ax_1X + By_1Y + Cz_1Z &= 0, \\ Ax_2X + By_2Y + Cz_2Z &= 0, \\ Ax_3X + By_3Y + Cz_3Z &= 0; \end{aligned}$$

resultando, por consiguiente,

$$\begin{aligned} KD_1 &= Ax_1x + By_1y + Cz_1z, \\ KD_2 &= Ax_2x + By_2y + Cz_2z, \\ KD_3 &= Ax_3x + By_3y + Cz_3z, \end{aligned}$$

siendo $K$ una cantidad cuyo valor no es necesario escribir.

Eliminando $x, y, z$ entre estas ecuaciones y la del cono, se obtiene una ecuación homogénea de segundo grado respecto á $D_1$, $D_2$ y $D_3$; y por ser los planos considerados tangentes al cono, debe reducirse á cuadrados perfectos al ser $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$. Tendrá, pues, la forma

$$(MD_1 + ND_2 - LD_3)^2 = 4MND_1D_2,$$

de donde se deduce

$$\sqrt{M}\sqrt{D_1} + \sqrt{N}\sqrt{D_2} + \sqrt{L}\sqrt{D_3} = 0.$$

Basta fijarse en las relaciones, fáciles de demostrar,

$$D_1 = \frac{\rho_1^2}{2R}, \quad D_2 = \frac{\rho_2^2}{2R}, \quad D_3 = \frac{\rho_3^2}{2R},$$

para deducir que $\rho_1$, $\rho_2$ y $\rho_3$ están ligadas por una expresión de la forma

$$h\rho_1 + k\rho_2 + l\rho_3 = 0,$$

en la cual $h$, $k$ y $l$ son cantidades constantes.

Recíprocamente, toda superficie representada por una ecuación de esta forma corta á la esfera según una cíclica.

Para demostrarlo basta poner en esta ecuación

$$\rho_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$
$$\rho_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2, \text{ etc.},$$

hacer desaparecer los radicales, y, en fin, sustituir $x^2 + y^2 + z^2$ por $R^2$. De este modo se obtiene una ecuación de segundo grado en $x$, $y$ y $z$.

Se ve análogamente que también resultan las cíclicas de la intersección de la esfera con las superficies representadas por las ecuaciones

$$h\rho_1 + k\rho_2 = l, \quad \rho_1\rho_2 = m.$$

A estas cíclicas se les dieron respectivamente los nombres de *cartesianas esféricas* y *cassínicas esféricas*.

**679.** Antes de terminar, apliquemos la doctrina expuesta á la elipse esférica.

Hemos visto en el Núm. **670** que á la ecuación del cono que determina esta curva se la puede dar la forma

$$\frac{x^2}{\text{tang}^2 c} + \frac{y^2}{\text{tang}^2 b} = z^2.$$

Las ecuaciones de las proyecciones de la curva sobre los planos coordenados son, por consiguiente,

$$(A) \qquad \text{sen}^2 b \left[\frac{1}{\text{tang}^2 b} - \frac{1}{\text{tang}^2 c}\right] x^2 + z^2 = a^2 \cos^2 b,$$

$$\text{sen}^2 c \left[\frac{1}{\text{tang}^2 c} - \frac{1}{\text{tang}^2 b}\right] y^2 + z^2 = a^2 \cos^2 c,$$

$$\frac{x^2}{\text{sen}^2 c} + \frac{y^2}{\text{sen}^2 b} = a^2.$$

Los cuatro conos de segundo orden á que hicimos referencia en el Número **676** redúcense en el caso actual á un cono y tres cilindros.

Consideremos los focos situados sobre el primero de los cilindros citados. Estos focos deben coincidir (Núm. **677**) con los puntos de contacto de la esfera y los planos tangentes comunes á ella y al cilindro: luego deben estar situados en la circunferencia máxima de la esfera que está en el plano $xz$, y confundirse con los puntos de contacto de esta circunferencia con las tangentes comunes á ella y á la curva representada por la ecuación $(A)$, que está en el referido plano. Aplicando á esta ecuación y á la $x^2 + z^2 = R^2$ el método que generalmente se emplea para obtener los puntos de contacto de las tangentes comunes á dos curvas dadas, resulta, representando por $x'$ y $z'$ las coordenadas de los puntos pedidos,

$$x' = \pm R \frac{\cos c}{\cos b} = \pm R \cos d, \quad y' = \pm R \,\text{sen}\, d.$$

La curva tiene, por lo tanto, cuatro focos reales sobre la circunferen-

cia considerada, que coinciden con aquellos á que ya se dió este nombre en el Núm. **666.**

Es fácil ver que sobre las circunferencias de contacto del cono y de los otros dos cilindros mencionados con la esfera sólo existen focos imaginarios.

Para hacer un estudio más detallado de la teoría de las cíclicas, consúltese la obra de DARBOUX anteriormente citada y diversos trabajos de LAGUERRE publicados en el *Bulletin de la Société Philomatique de Paris.*

# CAPÍTULO DÉCIMOTERCERO

## CURVAS DE DOBLE CURVATURA (CONTINUACIÓN)

### I

### HÉLICE CILÍNDRICA

**680.** Consideremos un cilindro recto cuya base sea $APB\ldots$ (fig. 168), y supongamos que el punto $M$ se mueva sobre la superficie de este cilindro, de manera que en todas sus posiciones sea constante la razón de la ordenada $MP$ á la longitud $s$ del arco $AP$.

A la curva así engendrada por $M$ se aplica el nombre de *hélice cilíndrica*, la cual tendrá por ecuaciones las dos siguientes:

$$F(x, y) = 0, \quad z = cs.$$

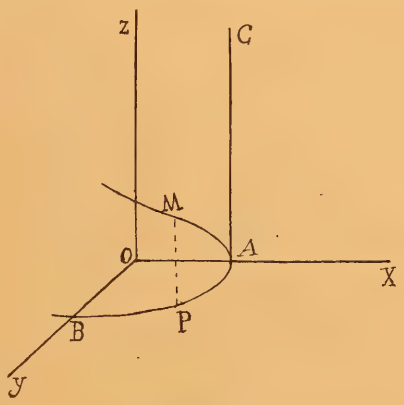



Figura 168.

**681.** Para determinar el ángulo $\theta$, formado por las tangentes á la hélice con las generatrices del cilindro, procederemos como sigue:

Por ser $\theta$ igual al ángulo formado por las tangentes á la curva con el eje de las $x$, su coseno tendrá por expresión

$$\cos\theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Y como

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 + dz^2 = \left(1 + \frac{1}{c^2}\right) dz^2,$$

resulta desde luego que

$$\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Lo cual demuestra que *el ángulo* $\theta$, poco antes definido, *es constante.*

Y, con no menor sencillez, se demuestra que, inversamente, *las curvas cuyas tangentes forman un ángulo constante con una recta dada, son hélices cilíndricas.*

Para ello tómese la recta dada por eje de las $z$, é intégrese luego la ecuación

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = c,$$

que simboliza el problema, conviniendo en representar por $F(x, y) = 0$, la ecuación del cilindro proyectante de la curva sobre el plano $xy$, y por $s$ la longitud del arco de la curva que limita la base de este cilindro, comprendido entre un origen fijo y el punto $(x, y)$.

De donde se desprende, que

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

y, por consiguiente,

$$(1 - c^2)\, dz^2 = c^2\, ds^2;$$

ó, integrando y designando por $c_1$ una constante arbitraria,

$$z = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}\, s + c_1.$$

Las ecuaciones de las curvas buscadas serán, pues, éstas:

$$F(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad z = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}\, s + c_1;$$

de otras tantas hélices como valores particulares se atribuyan á la constante $c_1$.

**682.** *Las hélices son líneas geodésicas de las superficies cilíndricas* á que corresponden.

Si planificamos, en efecto, la superficie cilíndrica considerada, y tomamos la recta $AY$ (fig. 169), correspondiente á la $CA$ de la 123, para eje de las ordenadas, y la $AX$, correspondiente á la curva $APB$, como eje de las abscisas, las coordenadas $(x', y')$ del punto correspondiente al punto $M$, serán

$$x' = AP' = s, \quad \text{é}$$
$$y' = MP' = z.$$

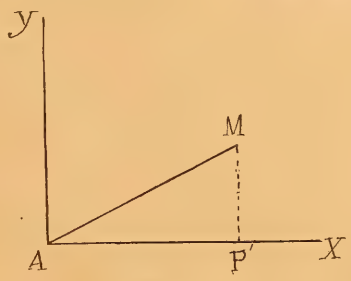



Figura 169.

Y, en consecuencia, hallaremos

$$y' = cx'$$

como ecuación de la transformada de la hélice, la cual representa una recta.

Bastando ahora atender á que con la planificación del cilindro no se altera la longitud de las líneas trazadas sobre su superficie, para concluir que la hélice es una *línea geodésica* de esta superficie.

**683.** Tomando el arco $s$ por variable independiente, puédese dar á las ecuaciones de la hélice la forma

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = cs,$$

y hallar fácilmente sus *radios de curvatura* y de *torsión*. Para lo cual basta aplicar al caso particular de que se trata, las fórmulas generales conocidas

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{[(x'\,y'' - y'\,z'')^2 + (x'\,z'' - z'\,x'')^2 + (y'\,x'' - x'\,y'')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$r = \frac{(x'\,y'' - y'\,z'')^2 + (x'\,z'' - z'\,x'')^2 + (y'\,x'' - x'\,y'')^2}{(x'\,y'' - y'\,z'')\,x''' + (x'\,z'' - z'\,x'')\,y''' + (y'\,x'' - x'\,y'')\,z'''};$$

representando por $R$ y $r$ los radios de curvatura y de torsión, y por $x'$, $y'$,... las *derivadas* de $x$, $y$, $z$ relativamente á $s$.

Desprendiéndose de este modo, por referencia al radio de *torsión* $r$, el siguiente resultado:

$$r = \frac{c^2 (x''^2 + y''^2) + (y' x'' - x' y'')^2}{c (y'' x''' - x'' y''')};$$

ó, por ser $x'^2 + y'^2 = s'^2 = 1$ y $x' x'' + y' y'' = 0$,

$$r = \frac{(1 + c^2)(x''^2 + y''^2)}{c (y'' x''' - x'' y''')}.$$

Y, por referencia al de *curvatura* $R$, este otro:

$$R = \frac{1 + c^2}{(x''^2 + y''^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

De las expresiones de $R$ y $r$ resulta además que

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{c} \cdot \frac{(x''^2 + y''^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' x''' - x'' y'''}.$$

Y, como la expresión

$$\frac{(x''^2 + y''^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' x''' - x'' y'''}$$

representa el radio de curvatura de la curva plana, cuyas ecuaciones son

$$X = x' = \varphi'(s) \quad \text{é} \quad Y = y' = \psi'(s),$$

y que, por ser $x'^2 + y'^2 = 1$, es una circunferencia cuya ecuación es

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

hállase, finalmente, que

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{c};$$

ó que *en las hélices cilíndricas es constante la razón* $\frac{r}{R}$ *del radio de torsión al radio de curvatura.*

**684.** E inversamente, *si la razón* $\frac{r}{R}$ *del radio de torsión para el radio de curvatura de una curva es constante, la curva será una hélice cilíndrica.*

Teorema debido á BERTRAND (*Journal de Liouville*, t. VIII, 1843), demostrado por SERRET del modo que á continuación se expresa.

Sean $(a, a', a'')$, $(b, b', b'')$, $(c, c', c'')$ los cosenos de los ángulos de la tangente, de la normal principal y de la binormal, con los ejes coordenados, cantidades entre las cuales existen nueve relaciones, conocidas por el nombre de *fórmulas de* FRENET, seis de las cuales dicen como sigue:

$$\frac{da}{ds_1} = \frac{b}{R}, \quad \frac{da'}{ds_1} = \frac{b'}{R}, \quad \frac{da''}{ds_1} = \frac{b''}{R},$$

$$\frac{dc}{ds_1} = -\frac{b}{r}, \quad \frac{dc'}{ds_1} = -\frac{b'}{r}, \quad \frac{dc''}{ds_1} = -\frac{b''}{r};$$

representando por $s_1$ la longitud de los arcos de la curva considerada.

Poniendo en estas ecuaciones $-\frac{r}{R} = m$, hállanse por de pronto estos resultados:

$$\frac{da}{dc} = \frac{da'}{dc'} = \frac{da''}{dc''} = m;$$

é, integrando,

$$a = mc + A, \quad a' = mc' + B, \quad a'' = mc'' + C;$$

en donde $A$, $B$, $C$ representan cantidades constantes, dos de ellas arbitrarias y la otra determinable por la ecuación

$$A^2 + B^2 + C^2 = (a - mc)^2 + (a' - mc')^2 + (a'' - mc'')^2 = 1 + m^2,$$

resultante de las ecuaciones anteriores y de las siguientes, condicionales:

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0.$$

Cambiemos ahora de ejes coordenados; y tomando para nuevo eje de las $z$ la recta cuyos coeficientes angulares sean $A$ y $B$, tendremos

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \sqrt{1 + m^2};$$

y, por tanto,

$$a = mc, \quad a' = mc', \quad a'' = mc'' + \sqrt{1 + m^2};$$

de donde resulta, multiplicando la primera ecuación por $a$, la segunda por $a'$ y la tercera por $a''$, sumándolas luego y atendiendo á las ecuaciones anteriores, que

$$a'' = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Lo cual demuestra que la tangente á la curva considerada forma un ángulo constante con el eje de las $z$; y, por lo tanto, que esta curva es una hélice cilíndrica.

685. *El plano osculador, en cualquiera de sus puntos, de la hélice de este nombre forma también un ángulo constante con las generatrices del cilindro á que esta hélice corresponde.*

La tercera de las *fórmulas de* FRENET, anteriormente consignadas, muestra, en efecto, que, en el caso de la hélice cilíndrica, $b'' = 0$; y la sexta que $\frac{dc''}{ds_1} = 0$, ó $c'' =$ constante. Y por ser $b'' = 0$, vese también que *las normales principales de la hélice cilíndrica son perpendiculares á las generatrices del cilindro donde la hélice está trazada.*

686. La rectificación de las hélices de que tratamos se obtiene fácilmente. Representando por $s_1$ la longitud del arco $AM$, tenemos que

$$s_1 = \int_0^s \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + c^2} \, . \, ds;$$

ó, por ser $\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1$,

$$s_1 = \sqrt{1 + c^2} \, . \, s,$$

conforme se deduce también fácilmente por procedimiento puramente geométrico.

**687.** Entre las hélices cilíndricas, la más importante de todas es la trazada sobre el cilindro de base circular ya mencionada por los antiguos geómetras, como PAPPO en sus *Colecciones Matemáticas (ed. Hultch.*, p. 1.110) y PROCLO en sus *Comentarios (ed. Taylor*, t. I, p. 129); de donde se infiere que su teoría había sido anteriormente expuesta por APOLONIO en un *Tratado sobre el tornillo*, que no ha llegado hasta nosotros (P. TANNERY: *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1883, p. 278), y por GEMINUS (CHASLES: *Aperçu historique*, 2.ª ed., p. 25).

Adoptando el eje del cilindro de base circular como eje de las $z$, y representando por $\rho$ el radio de aquella base, las ecuaciones de las hélices trazadas sobre el mismo cilindro serán éstas:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{y} \quad z = cs,$$

ó

$$x = \rho \cos \frac{s}{\rho}, \quad y = \rho \operatorname{sen} \frac{s}{\rho}, \quad \text{y} \quad z = cs.$$

Hélices caracterizadas por las dos siguientes propiedades importantes:

1.ª La de poseer *radios de curvatura y de torsión*, R *y* r, *constantes en todos sus puntos;* conforme lo demuestran las expresiones de estos radios, deducidas de las fórmulas generales del Núm. **683**:

$$R = \rho (1 + c^2), \quad r = \frac{\rho (1 + c^2)}{c}.$$

Y 2.ª La de *ser exclusivas estas propiedades de las hélices trazadas sobre cilindros de base circular.*

Teorema el último demostrado por vez primera por PUISEUX *(Journal de Liouville*, t. VII, 1842, y de cuya exactitud es fácil darse cuenta.

En efecto: por ser constante la razón de la torsión á la curvatura de la curva á que una y otra se refieren, esta curva debe ser (Núm. **684**) una hélice. Y para ver que esta hélice resulta trazada sobre un cilindro de base circular, basta advertir que la expresión de $R$, hallada en el Núm. **683**, nos enseña que en este caso también es constante la expresión $(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$,

la cual, como es ya sabido, representa el radio de curvatura de la curva, cuyas ecuaciones son $x = \varphi(s)$ é $y = \psi(s)$: esto es, el radio de curvatura de la curva que limita la base del cilindro. Radio que, por ser constante, corresponde á una circunferencia de círculo.

## II

### HÉLICE CÓNICA

688. Imaginemos un *cono de revolución* que tenga por vértice el origen $O$ de las coordenadas (fig. 170); por eje de figura el $OZ$ de las mismas; por generatriz la recta $OA$, sometida á la condición de formar con el mismo eje, $OZ$, el ángulo constante $ZOA = \theta$, y cuya proyección, $OP = \rho$, sobre el plano coordenado $XOY$, forma con la recta $OX$, de situación fija, el ángulo variable $POX = \varphi$: pues tomando sobre el cono un punto $M_1(x, y, z)$, móvil de manera que en la sucesión de sus posiciones la distancia $MP = Z$ varíe proporcionalmente al ángulo $\varphi$, aquel punto trazará sobre el cono una cierta curva, denominada por el ilustre geómetra CHASLES en su *Aperçu historique, hélice cónica*, cuyas ecuaciones y propiedades inmediatamente se desprenden de los supuestos aquí establecidos.

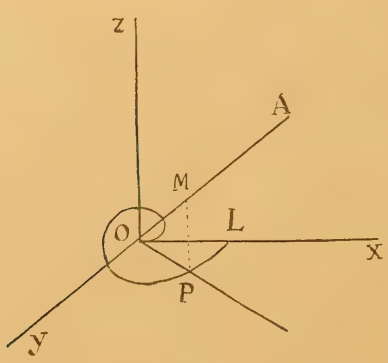



Figura 170.

689. En efecto: por definición, y sin más que fijar un momento la atención en la figura, concluyese que

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \quad \text{y} \quad z = \rho \cot\theta = a\varphi,$$

representando por $a$ una constante.

Luego las precedentes podrán también escribirse como sigue:

$$x = a\varphi \cos\varphi \operatorname{tang}\theta, \quad y = a\varphi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{tang}\theta \quad \text{y} \quad z = a\varphi.$$

**690.** Por ser $\rho = a\varphi \operatorname{tang}\theta$, la ecuación de la curva descrita por la proyección $P$ del punto $M$, cuando éste describe la hélice sobre el cono, se ve que *la proyección de aquella hélice cónica sobre cualquier plano, perpendicular al eje del cono, es una espiral de Arquímedes.*

**691.** Y por ser también respectivamente iguales á $\cos\varphi \operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ los cosenos de los ángulos formados por la recta $OA$ con los ejes de las $x$, de las $y$ y de las $z$; é iguales asimismo y por idéntico orden á $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ y $\frac{dz}{ds}$ los cosenos de los ángulos formados por la tangente á la curva en el punto $M$ con los mismos ejes; y porque á estas igualdades pueden agregarse además las cuatro siguientes, de muy fácil deducción,

$$\frac{dx}{d\varphi} = a \operatorname{tang}\theta (\cos\varphi - \varphi \operatorname{sen}\varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = a \operatorname{tang}\theta (\operatorname{sen}\varphi + \varphi \cos\varphi), \quad \frac{dz}{d\varphi} = a,$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = a\sqrt{\operatorname{tang}^2\theta (1 + \varphi^2) + 1},$$

conclúyese que el coseno del ángulo $\omega$, formado por la tangente á la curva con la generatriz del cono correspondiente al punto de contacto, se hallará expresado por la fórmula

$$\cos\omega = \frac{dx}{ds}\cos\varphi \operatorname{sen}\theta + \frac{dy}{ds}\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta + \frac{dz}{ds}\cos\theta$$

ó

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta}}.$$

**692.** Y la longitud de los arcos de la hélice cónica por esta otra:

$$s = \frac{a}{\cos\theta}\int \sqrt{1 + \varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\varphi$$

$$= \frac{a}{2\cos\theta}\left[\varphi (1 + \varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\log(\varphi \operatorname{sen}\theta + \sqrt{1 + \varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta})\right].$$

693. La hélice cónica es una de las curvas de *doble curvatura* que ya tuvieron en cuenta los geómetras griegos. A ella se refiere, en efecto, PAPPO en sus *Colecciones Matemáticas* (libro 4.°, prop. 29), y PROCLO la cita asimismo en sus *Comentarios*.

Con mucha posterioridad trató de ella también PASCAL en un artículo titulado *Dimension d'un solide formé por le moyen d'une spirale autour d'un cône (Oeuvres, ed. Hachette,* t. III, p. 448), en el cual determinó el volumen de aquel sólido, definido por el cilindro de base *OPL* limitada por la primera espira de la proyección de la hélice sobre la base del cono, por la superficie del mismo cono y por los planos $zx$ y $xy$. Problema que resolvió empleando los procedimientos de la Geometría infinitesimal, sintetizados más tarde en la siguiente fórmula del Cálculo Integral:

$$V = \iint_A f(\rho \cos\varphi, \rho \operatorname{sen}\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

en la cual $V$ representa el volumen buscado del sólido, limitado por la superficie que tiene por ecuación $z = f(x, y)$; por el cilindro cuya base $A$ se halla referida á las coordenadas $\rho$ y $\varphi$; y por el plano $xy$.

De todo lo cual, y en atención á que el cono y la base del cilindro tienen respectivamente por ecuaciones

$$z^2 = (x^2 + y^2)\cot^2\theta \quad \text{y} \quad \rho = a\varphi \operatorname{tang}\theta,$$

concluyese finalmente que

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\varphi \operatorname{tang}\theta} \rho^2 \cot\theta\, d\rho = \frac{4}{3}\, a^3 \pi^4 \operatorname{tang}^2\theta.$$

## III

### HÉLICE CILINDRO CÓNICA

694. Prosiguiendo el estudio del mismo asunto, iniciado pocos años antes por TISSOT en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1852), P. SERRET designó con el nombre de *hélices cilindro-cónicas* las curvas trazadas sobre la superficie de un cono de *revolución,* que forman un *án-*

*gulo constante* con las generatrices del mismo cono: curvas por él atentamente consideradas en su obra titulada *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure (París,* 1860, p. 101).

695. Supongamos que el cono de referencia sea el engendrado por la recta $OA$ al girar ésta alrededor del eje $OZ$ de las $z$, formando con él un ángulo constante, $\theta$; y sean, como en el caso anterior, $P$ la proyección del punto $M$ de la superficie del cono sobre el plano de las $XY$, $\varphi$ el ángulo $POX$ y $\rho$ la distancia $OP$.

Los cosenos de los ángulos formados por la recta $OA$ con los ejes coordenados tienen por expresión

$$\cos AOX = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad \cos AOY = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \cos AOZ = \cos\theta;$$

y las correspondientes á los ángulos formados por la tangente á cualquier curva, descrita por el punto variable $M$, con los mismos ejes, estas otras:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

en las cuales $ds = \sqrt{dy^2 + dy^2 + dx^2}$.

La condición, pues, para que $M$ describa una curva que corte las generatrices del cono, formando con ellas un ángulo constante, será, en consecuencia,

$$\frac{dx}{ds}\cos\varphi \operatorname{sen}\theta + \frac{dy}{ds}\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta + \frac{dx}{ds}\cos\theta = c.$$

Pero en atención á que

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\operatorname{sen}\varphi \quad \text{y} \quad z = \rho\cot\theta,$$

hállase también que

$$dx = \cos\varphi d\rho - \rho\operatorname{sen}\varphi d\varphi, \quad dy = \operatorname{sen}\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi,$$

$$dx = \cot\theta d\rho \quad \text{y} \quad ds^2 = \frac{d\rho^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + \rho^2 d\varphi^2.$$

Luego

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sen}\theta\, d\varphi.$$

E integrando esta ecuación,

$$\rho = e^{a\varphi}, \quad a = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sen}\theta.$$

Las ecuaciones de la *hélice-cilindro-cónica* serán, pues, éstas:

$$(1) \qquad x = e^{a\varphi}\cos\varphi, \quad y = e^{a\varphi}\operatorname{sen}\varphi \quad \text{y} \quad z = e^{a\varphi}\cot\theta.$$

A las tres últimas ecuaciones precede, expresada en coordenadas polares, esta otra, $\rho = e^{a\varphi}$, correspondiente á la *proyección de la hélice cilindro-cónica sobre el plano de las xy,* ó sobre la base del cono, representada por una *espiral logarítmica:* lo que constituye una propiedad muy interesante de la misma hélice.

**696.** El coseno de los ángulos $\omega$ formados por las tangentes á la curva en primer término considerada, con el eje de las $z$, se halla expresado por la fórmula

$$\cos\omega = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = \frac{a\cot\theta}{\sqrt{a^2+1+a^2\cot^2\theta}}.$$

Y, por lo tanto, el ángulo $\omega$ será *constante,* y *la curva á que corresponde coincidirá* (Núm. 681) *con una hélice cilíndrica, trazada sobre la superficie de este nombre, que tenga por base la espiral logarítmica anteriormente considerada.* Circunstancia que justifica el calificativo de *cilindro-cónica* aplicado á la hélice de que ahora se trata.

**697.** Al estudiar las propiedades de la *espiral logarítmica* quedó demostrado (Núm. 440) que la curva de este nombre da un número infinito de vueltas alrededor del punto *O,* aproximándose á él indefinidamente sin llegar á encontrarle nunca: luego la *hélice cilindro cónica* da también un ilimitado número de vueltas sobre la superficie del cono, aproximándose indefinidamente á su vértice sin jamás alcanzarle.

**698.** De lo que se dice en el Núm. 696 se infiere que, planificando el

cono, la hélice cilindro-cónica ha de transformarse en una curva que cortará á todas las rectas que fueran generatrices del cono, formando con ellas un *ángulo constante*, ó sea en una *espiral logarítmica*.

**699.** Aplicando á las ecuaciones (1) las fórmulas adecuadas á la determinación de los radios de curvatura, $R$, y de torsión, $r$, encuéntranse estos resultados:

$$R = \frac{e^{a\varphi}\,(a^2 + 1 + a^2 \cot^2 \vartheta)}{(a^2+1)^{\frac{1}{2}}}, \quad r = \frac{e^{a\varphi}\,(a^2 + 1 + a^2 \cot^2 \vartheta)}{a \cot \vartheta}.$$

**700.** Como complemento de lo expuesto en los últimos párrafos, debe advertirse que la hélice cilindro-cónica, que acaba de estudiarse, no es la única curva dotada de la propiedad de cortar, según ángulos constantes, las generatrices de un cono y de un cilindro, sobre cuyas superficies estuviere trazada. G. Pirondini ha demostrado, en efecto, en una importante Memoria recientemente publicada en el *Journal für Mathematik (Berlín*, t. 118, p. 61), que existen otras curvas que satisfacen la misma condición, á todas las cuales se aplica el nombre común de *hélices cilindro-cónicas*. Habiendo demostrado, además, aquel ilustre geómetra que, si la hélice cilíndro-cónica corresponde á un cilindro que pasa por el vértice del cono, este cono será de revolución forzosamente.

## IV

### CÍRCULO ALABEADO

**701.** La hélice trazada sobre un cilindro de base circular es caso particular de las curvas de curvatura constante, denominadas, en términos generales, *círculos alabeados* (Cesàro: *Lezioni di Geometría intrinseca, Napoli*, 1896, p. 144).

Aplicando á estas curvas la fórmula conocida

$$R_1^2 = R^2 + r^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2,$$

en la cual $R$ representa el *radio de curvatura*, $r$ el de *torsión*, y $R_1$ el de

la *esfera osculatriz* del círculo alabeado, resulta que $R_1 = R$; y, por lo tanto, el *radio de la esfera osculatriz* es igual al *de curvatura.*

Por medio de las fórmulas

$$x_0 - x = Rb - r\frac{dR}{ds}c,$$

$$y_0 - y = Rb' - r\frac{dR}{ds}c',$$

$$z_0 - z = Rb'' - r\frac{dR}{ds}c'',$$

en las cuales $b$, $b'$ y $b''$ representan los cosenos de los ángulos directores de la normal principal; $c$, $c'$ y $c''$ los de la *binormal*, y $x_0$, $y_0$ y $z_0$ las coordenadas del centro de la esfera osculatriz, aplicables á todas las curvas, vese, poniendo $\frac{dR}{ds} = 0$, que *las coordenadas del centro del círculo alabeado* puedan expresarse por las ecuaciones

$$x_0 - x = Rb, \quad y_0 - y = Rb' \quad \text{y} \quad z_0 - z = Rb'',$$

de manera que el expresado *centro se obtendrá tomando sobre la normal principal, á partir del punto á que se refiere, una longitud igual á* R.

**702.** En virtud de las *fórmulas de* FRENET, podemos también escribir las ecuaciones anteriores como sigue:

$$x_0 = x + R^2\frac{d^2x}{ds^2}, \quad y_0 = y + R^2\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \text{y} \quad z_0 = z + R^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Designemos ahora por $s_1$ la longitud de un arco cualquiera del lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices de la curva considerada, y por $R'$ y $r'$ sus radios de curvatura y torsión; y tendremos que

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \frac{dx_0^2}{ds^2} + \frac{dy_0^2}{ds^2} + \frac{dz_0^2}{ds^2}$$

$$= 1 + R^4\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2\right]$$

$$+ 2R^2\left[\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3} + \frac{dz}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}\right].$$

Pero de la igualdad

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

recordando una expresión conocida de $R$, se deduce asimismo que

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0, \text{ y}$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}+\frac{dz}{ds}\frac{d^3z}{ds^3}=-\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]$$

$$=-\frac{1}{R^2}.$$

Luego

$$\frac{ds_1^2}{ds^2}=-1+R^4\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2\right].$$

Y como, además, es cosa sabida que

$$\frac{1}{r^2}=R^2\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2\right]-\frac{1}{R^2}-R\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds},$$

cuando $R$ sea constante, resultará que

$$\frac{1}{r^2}=R^2\left[\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)^2+\left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2\right]-\frac{1}{R^2}.$$

Luego

$$\frac{ds_1}{ds}=\frac{R}{r}.$$

Mas, por la *teoría general de las curvas alabeadas* (véase, por ejemplo, LAURENT: *Traité d'Analyse*, t. II, p. 380), sábese que

$$\frac{ds_1}{ds}=\frac{r'}{R}=\frac{R'}{r}.$$

De donde, por combinación con el resultado anterior, se desprenden las siguientes relaciones finales, descubiertas por BOUQUET, que determinan los radios de curvatura y de torsión del lugar geométrico de los centros de las esferas osculatrices del círculo alabeado:

$$R' = R, \quad R^2 = rr'.$$

Así como, comparando las ecuaciones que determinan $x_0$, $y_0$, y $z_0$ con aquellas otras que determinan los centros de los círculos osculadores de las curvas, vese que, *en el círculo alabeado, los centros de las esferas osculatrices coinciden con los centros de los círculos osculadores.*

## V

### ELIPSE LOGARÍTMICA

**703.** El geómetra inglés J. BOOTH, en su libro titulado *A Treatise on some new geometrical Methods (London,* 1877, t. II, p. 51), aplicó el nom-

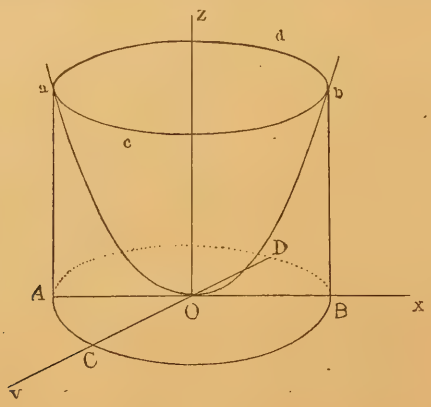



Figura 171.

bre de *elipse logarítmica* á la curva *acbd* (fig. 171), resultante de la intersección del paraboloide de revolución, engendrado por la parábola *aOb* al

girar ésta alrededor de su eje $Oz$, y eje también de las coordenadas, con el cilindro elíptico, de base $ACBD$ y eje común con el paraboloide.

Las ecuaciones de la curva serán, pues, éstas:

$$2kz = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De las cuales, por eliminaciones sucesivas de las $y$ y $x$, resultan estas otras:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \frac{2k}{b^2}z = 1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 + \frac{2k}{b^2}z = 1,$$

correspondientes á las proyecciones de la curva, parabólicas ambas, sobre los planos coordenados de las $xz$ é $yz$, siendo evidente que en los puntos de la elipse, que se proyectan en $C$ y $D$, del eje de las $y$, las tangentes á la curva son paralelas al de las $x$, y en los $A$ y $B$, del eje de las $x$, asimismo paralelas al de las $y$.

**704.** En la mencionada obra, Booth se ocupó muy especialmente en la rectificación de la curva de que tratamos por procedimiento de análisis muy distinto del que á renglón seguido pasamos á exponer, por considerarle más sencillo y ventajoso del propuesto por aquel ilustre matemático.

De la ecuación fundamental

$$\frac{ds^2}{dy^2} = 1 + \frac{dx^2}{dy^2} + \frac{dz^2}{dy^2}$$

y de las ecuaciones de la curva obtiénese, por de pronto, la igualdad

$$\frac{ds^2}{dy^2} = 1 - \frac{a^2 y^2}{b^2 (y^2 - b^3)} + \frac{y^2}{k^2}\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2$$

$$= \frac{\dfrac{(a^2 - b^2)^2}{b^4} y^4 - \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}(k^2 + a^2 - b^2) y^2 - b^2 k^2}{k^2 (y^2 - b^2)}.$$

De la cual, poniendo

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{b^4} y^4 - \frac{a^2 - b^2}{b^2}(k^2 + a^2 - b^2) y^2 - b^2 k^2$$

$$= (A + By^2)(C + By^2) = AC + B(A + C) y^2 + B^2 y^4,$$

se deducen, para determinar $A$, $B$ y $C$, las tres siguientes:

$$B = -\frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad A + C = k^2 + a^2 - b^2 \quad \text{y} \quad AC = -b^2 k^2.$$

La $B$ resulta desde luego determinada por la primera; y para determinar las $A$ y $C$, basta advertir que estas cantidades son las raíces reales de la ecuación de segundo grado

$$X^2 - (k^2 + a^2 - b^2) X - b^2 k^2 = 0,$$

una de las cuales, $A$, por ejemplo, es negativa.

Tras de estos preliminares, póngase ahora

$$A + By^2 = (C + y^2) \frac{A}{C} t^2,$$

y hallaremos que

$$y^2 = \frac{A(t^2 - 1)}{B\left(1 - \frac{A}{C} t^2\right)} \quad \text{y} \quad dy = \frac{(C - A) A \, dt}{C\sqrt{B}\left(1 - \frac{A}{C} t^2\right)^2 \sqrt{\frac{A(t^2 - 1)}{1 - \frac{A}{C} t^2}}}.$$

Con lo cual $ds$ podrá escribirse como sigue:

$$ds = \frac{(C - A)^2 A}{kb\sqrt{C}\sqrt{A + Bb^2}} \cdot \frac{t^2 \, dt}{(1 - \lambda t^2)^2 \sqrt{(1 - t^2)(1 - i'^2 t^2)}},$$

si

$$\lambda = \frac{A}{C} \quad \text{é} \quad i'^2 = \frac{A}{C} \cdot \frac{C + Bb^2}{A + Bb^2} = \frac{A}{C} \cdot \frac{C - (a^2 - b^2)}{A - (a^2 - b^2)};$$

en donde $0 < i^2 < 1$.

Pero

$$\frac{t^2}{(1 - \lambda t^2)^2} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{(1 - \lambda t^2)^2} - \frac{1}{1 - \lambda t^2}\right].$$

Luego

$$ds = -\frac{(C-A)^2 A}{kC\sqrt{C}\sqrt{A+Bb^2}}\left\{\frac{dt}{(1-\lambda t^2)^2\sqrt{(1-t^2)(1-i^2t^2)}}\right.$$
$$\left. -\frac{dt}{(1-\lambda t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-i^2t^2)}}\right\},$$

ó, finalmente, si $t = \operatorname{sen}\varphi$,

$$ds = -\frac{(C-A)^2 A}{kC\sqrt{C}\sqrt{A+Bb^2}}\left\{\frac{d\varphi}{(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)^2\sqrt{1-i^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right.$$
$$\left. -\frac{d\varphi}{(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-i^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\right\}.$$

Resulta, pues, para determinar $s$, la fórmula

$$s = K\left\{\int\frac{d\varphi}{(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)^2\Delta\varphi} - \int\frac{d\varphi}{(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)\Delta\varphi}\right\},$$

en la cual

$$K = -\frac{(C-A)^2 A}{kC\sqrt{C}\sqrt{A+Bb^2}} \quad \text{y} \quad \Delta\varphi = \sqrt{1-i^2\operatorname{sen}^2\varphi}.$$

Á la expresión anterior de $s$ puede darse distinta forma. Demuéstrase, en efecto, en la *Teoría de las integrales elípticas*, y se pueden además verificar por diferenciación, las identidades

$$\int\frac{d\varphi}{(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)^2\Delta\varphi} = \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda)(\lambda-i^2)}\left\{-\Phi\right.$$
$$\left. +\frac{i^2}{\lambda^2}\int(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{3i^2-2\lambda i^2-2\lambda+\lambda^2}{\lambda^2}\int\frac{d\varphi}{(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)\Delta\varphi}\right\},$$
$$\int(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \left(1-\frac{\lambda}{i^2}\right)\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{\lambda}{i^2}\int\Delta\varphi\, d\varphi,$$

en donde

$$\Phi = \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\Delta\varphi}{1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi};$$

identidades de las cuales se desprende la igualdad

$$\int \frac{d\varphi}{(1-\lambda \operatorname{sen}^2\varphi)^2\,\Delta\varphi} = \left.\frac{\lambda^2}{2\,(1-\lambda)\,(\lambda-i^2)}\right\} - \Phi$$

$$+\frac{i^2-\lambda}{\lambda^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \left.\frac{3i^2-2\lambda i^2-2\lambda+\lambda^2}{\lambda^2}\int\frac{d\varphi}{(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)\,\Delta\varphi}\right\}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int\Delta\varphi\,d\varphi.$$

Luego la expresión de $s$, podrá escribirse como sigue:

$$s = \frac{K}{2\,(1-\lambda)\,(\lambda-i^2)}\left\{-\lambda^2\,\Phi+\lambda\int\Delta\varphi\,d\varphi\right.$$

$$\left.+(i^2-\lambda)\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+(\lambda^2-i^2)\int\frac{d\varphi}{(1-\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)\,\Delta\varphi}\right\}.$$

Y así se ve que *s puede expresarse por integrales elípticas de primera, segunda y tercera especie.*

## VI

### HIPÉRBOLA LOGARÍTMICA

**705.** El mismo Booth, en la obra poco antes mencionada *(A Treatise,* etc., t. II, p. 76), designó con el nombre de *hipérbola logarítmica* á la curva de intersección de un paraboloide de revolución con un cilindro recto de base hiperbólica, cuyo eje coincide con el del paraboloide (fig. 172).

Las ecuaciones de la curva así definida son las siguientes:

$$2kx = x^2+y^2 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

las cuales muestran que las proyecciones de la curva sobre los planos $xz$ é $yz$ son arcos de parábola.

**706.** La hipérbola logarítmica se compone, evidentemente, de dos ramas iguales, simétricamente dispuestas respecto del plano $xy$. Ramas simétricas también relativamente al plano $xx$, y que parten de los puntos $a$ y $b$, correspondientes á los vértices de la hipérbola, teniendo en estos puntos sus tangentes paralelas al eje de las $y$. Las asíntotas de la hipérbola determinan además dos planos perpendiculares al de las $xy$, secantes del paraboloide según dos parábolas, que son, evidentemente, asíntotas de la curva considerada.

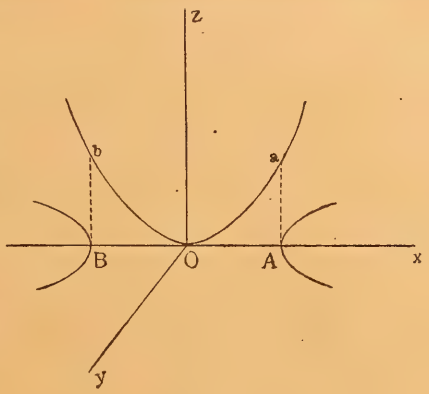


Fig. 172.

**707.** Por procedimiento algún tanto artificioso, Booth consiguió rectificar la hipérbola logarítmica, valiéndose de las integrales elípticas (l. c.); pero al mismo resultado puede también llegarse, utilizando el por nosotros discurrido para rectificar la elipse de aquel nombre, pocas páginas atrás, con solamente cambiar en los razonamientos ó trámites del cálculo, referente al primer caso, $b^2$ en $-b^2$. Con lo cual se hallará, con aplicación al segundo, esta otra fórmula:

$$s = \frac{K}{2(1-\lambda)(\lambda - i^2)} \left\{ -\lambda^2 \Phi + \lambda \int \Delta\varphi \, d\varphi \right.$$

$$\left. + (i^2 - \lambda) \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + (\lambda^2 - i^2) \int \frac{d\varphi}{(1 - \lambda \operatorname{sen}^2\varphi)\,\Delta\varphi} \right\},$$

en donde

$$B = \frac{a^2 + b^2}{b^2}, \quad A + C = k^2 + a^2 + b^2, \quad AC = b^2 k^2,$$

$$\lambda = \frac{A}{C}, \quad i^2 = \frac{A}{C} \cdot \frac{C - Bb^2}{A - Bb^2} = \frac{A}{C} \cdot \frac{C - (a^2 + b^2)}{A - (a^2 + b^2)},$$

$$K = \frac{(C - A)^2 A}{kC\sqrt{C}\sqrt{A - Bb^2}}.$$

En este caso $A$ y $B$ son las raíces de la ecuación

$$(\alpha) \qquad X^2 - (k^2 + a^2 + b^2) X + b^2 k^2 = 0,$$

ambas positivas.

Como $A$ y $B$ tienen el mismo signo, y $C - (a^2 + b^2)$ y $A - (a^2 + b^2)$ signos contrarios, $i^2$ será negativa; y, por tanto, $i$ imaginaria. Pero, poniendo $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, hallaremos que

$$s = \frac{K}{2(1 - \lambda)(\lambda - i^2)} \left\{ -\lambda^2 \Phi_1 - \int \Delta\psi d\psi \right.$$

$$\left. - (i^2 - \lambda) \int \frac{d\psi}{\Delta\psi} + (\lambda^2 - i^2) \int \frac{d\psi}{(1 - \lambda \cos^2\psi)\Delta\psi} \right\},$$

en donde

$$\Phi_1 = \frac{\operatorname{sen}\psi \cos\psi \Delta\psi}{1 - \lambda \cos^2\psi}, \quad \Delta\psi = \sqrt{1 - i^2 \cos^2\psi}.$$

Y, como también,

$$\Delta\psi = \sqrt{1 - i^2}\sqrt{1 - j^2 \operatorname{sen}^2\psi},$$

$$1 - \lambda \cos^2\psi = (1 - \lambda)(1 - \lambda_1 \operatorname{sen}^2\psi),$$

en donde

$$j^2 = \frac{i^2}{i^2 - 1} = \frac{A(C - a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)(C - A)}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{\lambda - 1};$$

conclúyese, finalmente, que

$$s = \frac{K}{2(1-\lambda)(\lambda - i^2)}\left\{-\lambda^2 \Phi_1 - \sqrt{1-i^2}\int \Delta_1 \psi d\psi \right.$$

$$\left. - \frac{i^2-\lambda}{\sqrt{1-i^2}}\int \frac{d\psi}{\Delta_1 \psi} - \frac{\lambda^2 - i^2}{(1-\lambda)\sqrt{1-i^2}}\int \frac{d\psi}{(1-\lambda_1 \operatorname{sen}^2\psi)\,\Delta_1 \psi}\right\},$$

en donde

$$\Delta_1 \psi = \sqrt{1 - j^2 \operatorname{sen}^2 \psi}.$$

Siendo cosa fácil ver que $j$ es real, y que también $j^2 < 1$.

## VII

### PARÁBOLA LOGARÍTMICA

**708.** El mismo BOOTH, en su mencionado libro *(A Treatise etc.*, t. II,

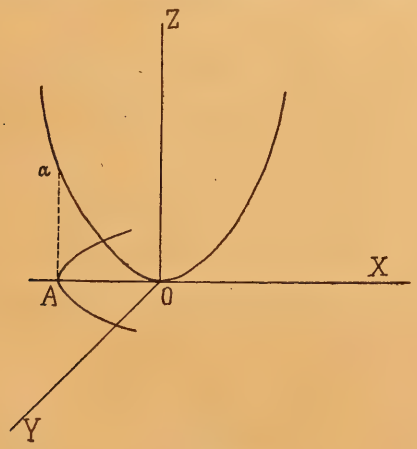



Figura 173.

página 110), atribuyó el nombre de *parábola logarítmica* á la curva resultante de la intersección de un *paraboloide de revolución* con un *cilindro*

*recto*, que tenga por base una parábola, cuyo foco coincida con un punto del eje del paraboloide.

Las ecuaciones de esta curva son

$$2kz = x^2 + y^2 \quad \text{é} \quad y^2 = 4h^2 + 4hx.$$

Y la curva, evidentemente simétrica respecto al plano $zx$, parte del punto $a$ (fig. 173), correspondiente al vértice $A$ de la parábola, en el cual la tangente será paralela al eje de las $y$, y se extiende indefinidamente, apartándose del plano $xy$ á medida que $x$ é $y$ aumentan.

709. La rectificación de la parábola logarítmica fué obtenida por Booth valiéndose también de las integrales elípticas, conforme ahora vamos á exponer.

Representando por $s$ la longitud de los arcos de la curva, hállase que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{(2h+x)\,[k^2 + (x+h)\,(x+2h)]}{x+h}}$$

$$= \frac{(2h+x)\,[k^2 + (x+h)\,(x+2h)]}{k\sqrt{(x+h)\,(x+2h)\,[k^2 + (x+h)\,(x+2h)]}}.$$

De donde, en el supuesto de ser

$$(x+2h)\,(x+h) = k^2 \operatorname{tang}^2\psi,$$

se desprenden fácilmente estas otras expresiones:

$$x = -\frac{3}{2}h + \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + 4k^2 \operatorname{tang}^2\psi},$$

$$dx = \frac{2k^2 \operatorname{tang}\psi d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{h^2 + 4k^2 \operatorname{tang}^2\psi}}, \text{ y}$$

$$(1) \qquad ds = k\frac{d\psi}{\cos^3\psi} + kh\frac{d\psi}{\cos^3\psi\sqrt{h^2 + 4k^2 \operatorname{tang}^2\psi}}.$$

Luego, si fuere $h = 2k$, hallaremos que

$$s = k\int \frac{d\psi}{\cos^3\psi} + k\int \frac{d\psi}{\cos^2\psi},$$

caso en el cual la curva puede ser rectificada por medio de funciones elementales.

Si fuere $h > 2k$, tendremos que

$$s = k\int \frac{d\psi}{\cos^3\psi} + k\int \frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1 - \frac{h^2 - 4k^2}{h^2}\operatorname{sen}^2\psi}},$$

y

$$0 < \frac{h^2 - 4k^2}{h^2} < 1.$$

La primera de las integrales que figura en esta fórmula, puede ser calculada por medio de funciones elementales. Y la segunda representa un arco de hipérbola, que, como es sabido, puede expresarse por *integrales elípticas de primera y segunda especie.*

Y, si fuere $2k > h$, póngase en el segundo de los términos de la fórmula (1)

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{h}{2k}\operatorname{tang} v;$$

y se hallará con esto

$$ds = k\frac{d\psi}{\cos^3\psi} + \frac{h}{2}\cdot\frac{\sqrt{1 + \frac{h^2}{4k^2}\operatorname{tang}^2 v}}{\cos v}\,dv$$

$$= k\frac{d\psi}{\cos^3\psi} + \frac{h}{2}\cdot\frac{\frac{h^2}{4k^2} + \left(1 - \frac{h^2}{4k^2}\right)\cos^2 v}{\cos^2 v\sqrt{1 - \frac{4k^2 - h^2}{4k^2}\operatorname{sen}^2 v}}\,dv.$$

Luego

$$s = k\int \frac{d\psi}{\cos^3\psi} + \frac{h^3}{8k^2}\int \frac{dv}{\cos^2 v\sqrt{1-\frac{4k^2-h^2}{4k^2}\operatorname{sen}^2 v}} \Bigg\} ,$$
$$+ h\,\frac{4k^2-h^2}{8k^2}\int \frac{dv}{\sqrt{1-\frac{4k^2-h^2}{4k^2}\operatorname{sen}^2 v}} \Bigg\}$$

y

$$0 < \frac{4k^2-h^2}{4k^2} < 1.$$

Lo cual demuestra que también entonces podrá expresarse $s$ por una integral compuesta de *funciones elementales;* otra, *elíptica,* que representará un arco de hipérbola; y otra, elíptica asimismo, de *primera especie.*

## VIII

### CURVA DE ARQUITAS

**710.** Sea *OBA* (fig. 174) una semicircunferencia, cuyo diámetro *OA* representaremos por *a; OZ* una recta perpendicular á *OA,* y *OCA'* otra semicircunferencia igual á la primera y cuyo plano es perpendicular al plano de ésta y á *OZ.* Dase el nombre de *curva de* ARQUITAS á la curva que resulta de la intersección del toro engendrado por el círculo *OBA,* cuando gira alrededor de *OZ,* con el cilindro cuya base es el círculo *OCA'.* Esta curva fué, en efecto, considerada por ARQUITAS, geómetra que vivió cerca de 400 años antes de J. C., el cual la empleó para resolver el *problema de* DELO.

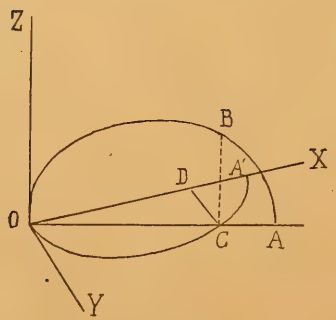



Figura 174.

Tomando para eje de las $x$ la recta que pasa por el punto $O$ y por el centro de la circunferencia $OCA'$, las ecuaciones de la *curva de* ARQUITAS son las siguientes:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 - ax = 0,$$

la primera de las cuales representa el toro y la segunda el cilindro considerado.

**711.** El método empleado por ARQUITAS para resolver el *problema de* DELO, esto es, para construir dos medias proporcionales á dos rectas dadas, es conocido por los *Comentarios de* EUTOCIO *al libro II de Arquímedes* (ARCHIMEDES: *Opera omnia, ed. Heiberg,* t. III, p. 98). Vamos á exponerlo.

Sea $C$ el punto en que la semicircunferencia $OCA'$ corta á la recta $OA$; $B$ el punto de la semicircunferencia $OBA$ que se proyecta en $C$, sobre el plano $xy$, y $CD$ la perpendicular trazada desde $C$ sobre $OA'$. El punto $B$ pertenece á la *curva de* ARQUITAS, cualquiera que sea la recta $OA$, y podemos determinar esta recta de tal modo que sea

$$\frac{OD}{OB} = \frac{b}{a}, \quad (b < a).$$

Se consigue esto determinando $B$ por medio de la intersección de la curva de Arquitas con el cono de base circular cuyo eje es $OX$ y cuya generatriz forma con este eje un ángulo $\theta$, dado por la ecuación

$$\cos\theta = \frac{b}{a}.$$

Las rectas $OB$ y $OC$ son las dos medias pedidas.

Tenemos, en efecto,

$$\overline{OC}^2 = a \,.\, OD, \quad \overline{OB}^2 = a \,.\, OC;$$

y eliminando en la primera de estas ecuaciones $OD$,

$$\overline{OB}^2 = a \,.\, OC, \quad \overline{OC}^2 = b \,.\, OB,$$

ó

$$\frac{a}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{b}.$$

Este método para resolver el problema de Delo, puramente teórico, es muy notable por ser el ejemplo más antiguo que se conoce de la resolución de un problema de Geometría plana por medio de consideraciones de Geometría del espacio.

**712.** La curva que resulta de la intersección del cono que entra en la construcción precedente, con el toro, está dada por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2, \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2),$$

y la ecuación de la proyección de esta curva sobre el plano $xy$ es

$$a^2 x^4 = b^4 (x^2 + y^2), \tag{1}$$

ó, en coordenadas polares,

$$\rho = \frac{b^2}{a \cos^2 \theta}.$$

Por medio de la curva representada por esta ecuación resuélvese fácilmente el *problema de* Delo. En efecto, el radio vector del punto de intersección de esta curva con la circunferencia cuya ecuación es $\rho = a \cos\theta$, viene dado por la igualdad

$$\rho_1^3 = a b^2.$$

Resulta, pues, que $\rho_1$ y $v = \sqrt{a\rho_1}$ satisfacen á las ecuaciones

$$\frac{b}{\rho_1} = \frac{\rho_1}{v} = \frac{v}{a}.$$

Se sabe por una carta de Eratóstene á Tolomeo III, que se encuentra en los *Comentarios de* Eutocio (ver Gino Loria: *Le scienze esatte nell' antica Grecia*, t. I, *Modena*, 1893, p. 71 y 135), que Eudosio, geómetra

griego ya citado (Núm. **651**), empleó, para resolver el problema de Delo, una curva plana con puntos de inflexión, á la cual dió el nombre de *kampila*. No se sabe cuál es la curva que los antiguos conocían por este nombre; pero las circunstancias de haber sido Eudosio discípulo de Arquitas, y la de figurar la curva cuya proyección expresa la ecuación (1) en el método de Arquitas para resolver el problema de Delo, llevaron á P. Tannery á considerar probable la coincidencia de la *kampila* con la curva representada por (1). (*Mémoires de la Société des sciences physiques de Bordeaux, 2.e serie*, t. II, p. 277; *Bulletin des sciences mathématiques*, 1884, p. 101).

## IX

### HORÓPTERA

**713.** Una cuestión de Óptica fisiológica, que se encuentra en la monumental obra que Helmhotz consagró á esta ciencia, condujo á estudiar una curva, á la que se dió el nombre de *horóptera*, y cuyas ecuaciones son

$$(1) \qquad x = \frac{2r}{1+\lambda^2 z^2}, \quad y = \frac{2r\lambda z}{1+\lambda^2 z^2},$$

siendo $\lambda$ y $r$ dos constantes.

Las propiedades de la curva citada fueron deducidas analítica y geométricamente por Ludwig en un opúsculo titulado *Die horopterkurve etc.* (Halle, 1902); por Schur en el *Zeitschrift für Mathematik* (t. XLVII, 1902); por Stuyvaert en *Mathesis* (t. XXIII, 1903); etc.

**714.** No mencionaremos aquí las consideraciones de Óptica y Geometría que permitieron deducir las ecuaciones anteriormente escritas, y que pueden leerse en los trabajos anteriormente citados; nos limitaremos á indicar la forma de la curva y algunas de sus propiedades.

Eliminando $z$ en las ecuaciones (1), se ve, ante todo, que la curva está situada en la superficie cilíndrica de revolución que tiene por ecuación

$$y^2 = r\,(2r - x),$$

que su proyección sobre el plano $xz$ es una *cúbica de* AGNESI (Núm. **75**); y sobre el $xy$ una *anguínea* (Núm. **64**).

Como la cúbica de Agnesi se construye con facilidad, puede cómodamente ser empleada, en unión del cilindro ya citado, para construir la *horóptera* y sus tangentes.

Las mismas ecuaciones (1) hacen ver que la *horóptera* está situada sobre el paraboloide hiperbólico que tiene por ecuación

$$y = \lambda x x,$$

de cuya circunstancia se deduce otro medio fácil de construirla.

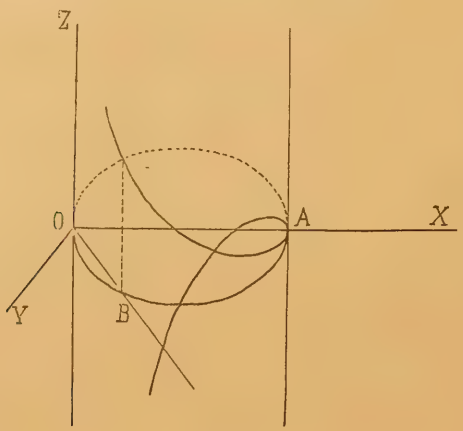



Figura 175.

Observemos, finalmente, que la curva está situada sobre la superficie de revolución representada por la ecuación

$$(x^2 + y^2)(1 + \lambda^2 x^2) = 4x^2,$$

y que tiene por eje el de las $z$.

Se ve fácilmente, por medio de las ecuaciones de la curva, que ésta tiene la forma que indica la figura 175. Parte del punto $A$, en que corta al eje de las $x$, formando con el plano $xy$ un ángulo cuyo coseno es igual

á $2r\lambda$, y se extiende indefinidamente en el sentido de las $z$ positivas y negativas, teniendo el eje $Oz$ por asíntota. Las cuerdas paralelas al plano $xy$ quedan divididas en partes iguales por la recta $OA$, que es, por consiguiente, eje de la curva.

**715.** Haciendo $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t$ (llamando $t$ al ángulo $BOA$), puede darse á las ecuaciones de la horóptera la forma

$$x = 2r\cos^2 t, \quad y = r\operatorname{sen} 2t, \quad z = \frac{\operatorname{tang} t}{\lambda}.$$

Aplicando á estas últimas la ecuación general del plano osculador

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

en las que

$$A = x'y'' - y'x'', \quad B = x'x'' - z'x''; \quad C = y'x'' - x'y'',$$

se obtiene en primer lugar

$$A = -\frac{4r}{\lambda\cos^3 t}\operatorname{sen} 3t, \quad B = \frac{4r}{\lambda\cos^3 t}\cos 3t, \quad C = -8r^2,$$

y también

$$Y\cos 3t - X\operatorname{sen} 3t - 2r\lambda\cos^3 t + 3r\cos t\operatorname{sen} 2t = 0.$$

Por medio de estas ecuaciones se ve, haciendo $X = 0$ ó $Y = 0$, que el plano osculador en el punto $(x, y, z)$ corta al eje $OZ$ en un punto cuya ordenada es $3z$ (Stuyvaert, *l. c.*).

**716.** Aplicando á las mismas ecuaciones las fórmulas generales de los radios de curvatura y torsión, que representamos por $R$ y $T$, respectivamente, se deduce

$$R = \frac{(1 + 4\lambda^2 r^2\cos^4 t)^{\frac{3}{2}}}{4r\lambda^2\cos^3 t\,(1 + 4\lambda^2 r^2\cos^6 t)^{\frac{1}{2}}}, \quad T = \frac{1 + 4\lambda^2 r^2\cos^6 t}{3\lambda\cos^2 t}.$$

Estas igualdades manifiestan que en el punto $A$ dichos radios tienen los valores

$$\frac{1+4\lambda^2 r^2}{4r\lambda^2}, \quad \frac{1+4\lambda^2 r^2}{3\lambda},$$

y que la curva no tiene puntos reales en los cuales el plano osculador sea *estacionario*.

**717.** Eliminando $x$ é $y$ entre las ecuaciones (1) y la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0,$$

se obtiene una ecuación de tercer grado en $z$. Por consiguiente, la horóptera pertenece á la clase de curvas algébricas que se conocen con el nombre de *cúbicas alabeadas*, y que están caracterizadas por la circunstancia de poder ser cortadas por un plano arbitrario en tres puntos.

Fueron estas curvas consideradas por primera vez por MÖBIUS, y han sido, después, objeto de muchos é importantes trabajos, que no citaremos, limitándonos á decir que en el *Treatrise on the analytic geometry* de SALMON se consagran algunas páginas á su estudio analítico, y en la obra de D. E. TORROJA, titulada *Teoría geométrica de las líneas alabeadas, etc.*, se dedica un capítulo á su estudio geométrico.

## X

### CURVAS DE BERTRAND

**718.** Bertrand demostró en una Memoria publicada en 1850 en el tomo XV del *Journal de Liouville*, que existe una clase de curvas tales que á cada una se puede asociar otra que tiene las mismas *normales* principales. A estas curvas se las designó con el nombre de *curvas de* BERTRAND.

Sean $(C)$ y $(C')$ dos de estas curvas; $(x, y, z)$ y $(x_1, y_1, z_1)$ las coordenadas de dos puntos correspondientes; $R$ y $r$ los radios de curvatura y de torsión de la curva $(C)$ en el punto $(x, y, z)$; $(a, a', a'')$, $(b, b', b'')$ y $(c, c', c'')$ los cosenos directores de la tangente, de la normal principal y

de la binormal á la curva en el punto citado; llamemos, finalmente, $l$ á la distancia de los puntos $(x, y, z)$ y $(x_1, y_1, z_1)$.

Entre las citadas cantidades existen las conocidas relaciones

$$(1) \qquad \frac{da}{ds} = \frac{b}{R}, \quad \frac{da'}{ds} = \frac{b'}{R}, \quad \frac{da''}{ds} = \frac{b''}{R};$$

$$(2) \qquad \frac{dc}{ds} = \frac{b}{r}, \quad \frac{dc'}{ds} = \frac{b'}{r}, \quad \frac{dc''}{ds} = \frac{b''}{r};$$

$$(3) \qquad \frac{db}{ds} = -\frac{a}{R} - \frac{c}{r}, \quad \frac{db'}{ds} = -\frac{a'}{R} - \frac{c'}{r}, \quad \frac{db''}{ds} = -\frac{a''}{R} - \frac{c''}{r},$$

denominadas *fórmulas de* FRENET.

Representemos por $(a_1, a'_1, a''_1)$ los cosenos directores de la tangente á la curva $(C')$ en el punto $(x_1, y_1, z_1)$, y observando que los cosenos directores de la normal principal á ella en el mismo punto son $(b, b', b'')$, se obtiene

$$(4) \qquad x_1 = x + lb, \quad y_1 = y + lb', \quad z_1 = z + lb'',$$

$$(5) \qquad b a_1 + b' a'_1 + b'' a''_1 = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{da_1}{ds_1} = \frac{b}{R_1}, \quad \frac{da'_1}{ds_1} = \frac{b'}{R_1}, \quad \frac{da''_1}{ds_1} = \frac{b''}{R_1},$$

llamando $s_1$ á la longitud de los arcos de la curva $(C')$ y $R_1$ al radio de curvatura en el punto $(x_1, y_1, z_1)$.

De la ecuación (5) se deduce la siguiente:

$$b\,dx_1 + b'\,dy_1 + b''\,dz_1 = 0;$$

y eliminando $x_1$, $y_1$ y $z_1$ por medio de las ecuaciones (4), y teniendo en cuenta las relaciones

$$b\,dx + b'\,dy + b''\,dz = 0,$$

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1,$$

$$b\,db + b'\,db' + b''\,db'' = 0,$$

se obtiene $dl = 0$. Se ve, pues, que $l$ es constante y que por consiguiente se puede establecer que

$$a_1 = \frac{dx_1}{ds_1} = \left(\frac{dx}{ds} + l\frac{db}{ds}\right)\frac{ds}{ds_1}, \quad a'_1 = \left(\frac{dy}{ds} + l\frac{db'}{ds}\right)\frac{ds}{ds_1}, \text{ etc.},$$

y, teniendo en cuenta las relaciones (3),

$$(7) \qquad \begin{cases} a_1 = \left[\left(1 - \dfrac{l}{R}\right)a - l\dfrac{c}{r}\right]\dfrac{ds}{ds_1}, \\ a'_1 = \left[\left(1 - \dfrac{l}{R}\right)a' - l\dfrac{c'}{r}\right]\dfrac{ds}{ds_1}, \\ a''_1 = \left[\left(1 - \dfrac{l}{R}\right)a'' - l\dfrac{c''}{r}\right]\dfrac{ds_1}{ds}. \end{cases}$$

Si ahora se sustituyen los valores de $a_1$, $a'_1$ y $a''_1$, deducidos de estas ecuaciones, en las igualdades (6), y se tienen presentes las fórmulas (1) y (2), resultan las ecuaciones

$$Aa + Bb + Cc = 0,$$
$$Aa' + Bb' + Cc' = 0,$$
$$Aa'' + Bb'' + Cc'' = 0,$$

habiendo hecho

$$A = \left(1 - \frac{l}{R}\right)d\frac{ds}{ds_1} - ld\left(\frac{1}{R}\right),$$
$$B = \left[\frac{l}{R}\left(1 - \frac{l}{R}\right) - \frac{l}{r^2}\right]\frac{ds}{ds_1}ds - \frac{1}{R_1}ds_1,$$
$$C = -\frac{l}{r}d\frac{ds}{ds_1} - ld\left(\frac{1}{r}\right),$$

siendo necesario, para que aquéllas se verifiquen, que se tenga

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

De la primera y la última se deduce

$$\left(1 - \frac{l}{R}\right) d\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{l}{r}\, d\left(\frac{1}{R}\right) = 0,$$

resultando por integración

$$\frac{l}{R} + \frac{h}{r} = 1, \tag{8}$$

representando $h$ una constante.

Resulta, pues, que las *curvas de* BERTRAND están caracterizadas por la existencia de una relación lineal entre la curvatura y la torsión (BERTRAND, *l. c.*).

El método que hemos empleado para llegar á este resultado, se debe á J. A. SERRET *(Journal de Liouville,* t. XVI).

**719.** Las ecuaciones (7) y las siguientes

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 0, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$
$$ac + a'c' + a''c'' = 0,$$

dan

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = \left(1 - \frac{l}{R}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2} = \frac{l^2 + h^2}{r^2}. \tag{9}$$

Si observamos ahora que $(C')$ es una curva de BERTRAND que satisface á la ecuación que resulta permutando en (8) $l$ y $-l$, se obtiene

$$\frac{ds^2}{ds_1^2} = \frac{l^2 + h^2}{r_1^2},$$

llamando $r_1$ al radio de torsión de $(C')$.

Resulta, por consiguente, $rr_1 = l^2 + h^2$; lo que demuestra que el producto de los radios de torsión de $(C)$ y $(C')$, en los puntos $(x, y, z)$ y $(x_1, y_1, z_1)$, es constante.

**720.** Si representamos por $\omega$ el ángulo de las tangentes á $(C)$ y $(C')$ en los puntos $(x, y, z)$ y $(x_1, y_1, z_1)$, se tiene

$$\cos\omega = aa_1 + a'a'_1 + a''_1 a''_1,$$

y, por lo tanto, las fórmulas (7) dan

$$\cos\omega = \left(1 - \frac{l}{R}\right)\frac{ds}{ds_1} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}}.$$

Resulta, pues, que *el ángulo de las tangentes, en los puntos correspondientes de las dos curvas, es constante.*

Se ve fácilmente que este ángulo es igual al de los planos osculadores de las curvas $(C)$ y $(C')$ en los puntos $(x, y, z)$ y $(x_1, y_1, z_1)$. Luego *el ángulo de los planos osculadores, en los puntos correspondientes, es constante.* Se debe este teorema á O. Bonnet, que lo publicó en el *Journal de l'École Polytechnique de Paris* (cuaderno XXXII, nota 1.ª).

**721.** La ecuación $B = 0_1$ da, teniendo en cuenta las (8) y (9),

$$\frac{l}{R_1} = \left[\frac{l}{R}\left(1 - \frac{l}{R}\right) - \frac{l}{r^2}\right]\frac{ds^2}{ds_1^2} = \frac{r}{R(h^2 + l^2)}(hr - lR).$$

Esta fórmula permite determinar la curvatura de $(C')$ cuando se conocen la curvatura y la torsión de $(C)$, y la

$$\frac{h}{r_1} - \frac{l}{R_1} = 1$$

sirve para calcular la torsión de $(C')$.

Relativamente á las curvas de Bertrand, consúltense las *Leçons sur la théorie des surfaces,* de G. Darboux (t. I, p. 13), en las que se emplea para su estudio un método cinemático elegantísimo; un artículo de Cesàro, publicado en la *Rivista di Mathematica* (Torino, t. II), etc.

# CAPÍTULO DÉCIMOCUARTO

## POLLODIA Y HERPOLLODIA

**722.** Demuéstrase en Mecánica que el movimiento de un cuerpo alrededor de un punto fijo equivale al movimiento del mismo cuerpo alrededor de un eje, que se mueve describiendo un cono elíptico, con el vértice en el punto fijo considerado. En este movimiento el elipsoide de inercia del cuerpo gira alrededor del punto fijo, quedando siempre tangente á un plano perpendicular al eje del momento de las cantidades de movimiento, sobre el cual rueda. El lugar de los puntos de contacto, sobre aquel plano, es una curva á la cual POINSOT, á quien se debe esta teoría *(Théorie nouvelle de la rotation des corps, présentée á l'Institut le 19 mai 1834)*, dió el nombre de *herpollodia.*

Designó también este ilustre geómetra con el de *pollodia* la curva de intersección del cono á que acabamos de referirnos con el elipsoide de inercia. Esta última curva es el lugar geométrico, sobre el elipsoide, de los puntos de contacto de esta superficie con el plano de la herpollodia.

Demuéstrase también en Mecánica que, siendo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>b>c)$$

la ecuación del elipsoide de inercia, la ecuación del cono es

$$\frac{x^2}{a^4}(a^2-\eta^2)+\frac{y^2}{b^4}(b^2-\eta^2)+\frac{z^2}{c^4}(c^2-\eta^2)=0,$$

en la que $\eta$ representa la distancia del centro del elipsoide al plano fijo. Esta distancia satisface á la condición $a>\eta>c$.

**723.** La ecuación de la herpollodia puede ser obtenida por un medio

enteramente geométrico. Antes de hallarla, estudiemos algunas propiedades de la pollodia.

Notemos, en primer lugar, que las ecuaciones de esta última curva son las dos que acabamos de escribir; y que, eliminando entre ellas sucesivamente $x$, $y$, $z$, se ve que las proyecciones de aquélla sobre los planos $zy$ y $xy$ son elipses, y sobre el plano $xz$ es una hipérbola.

Sea $r$ la distancia del centro del elipsoide al punto $(x, y, z)$ de la pollodia; tendremos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

por medio de la cual y de las anteriores se obtienen las ecuaciones siguientes, que determinan las coordenadas de los puntos de la pollodia en función del parámetro variable $r$:

$$x^2 = P(r^2 - \alpha^2) \quad y^2 = Q(r^2 - \beta^2), \quad z^2 = R(r^2 - \gamma^2),$$

donde es

$$P = \frac{a^4}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad Q = \frac{b^4}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}, \quad R = \frac{c^4}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$

$$(A) \quad \alpha^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{r_1^2}, \quad \beta^2 = c^2 + a^2 - \frac{a^2 c^2}{r_1^2}, \quad \gamma^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r_1^2}.$$

Entre las cantidades $P$, $Q$ y $R$ existen las relaciones

$$(B) \qquad P + Q + R = 1, \quad P\alpha^2 + Q\beta^2 + R\gamma^2 = 0,$$

que se deducen de la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, sustituyendo en ella $x^2$, $y^2$ y $z^2$ por sus valores é igualando después los coeficientes de las mismas potencias de $r$.

**724.** En la cuestión de Mecánica á que anteriormente nos hemos referido, las cantidades $a$, $b$ y $c$ no son completamente arbitrarias; satisfacen á la condición

$$c^2 > \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Tenemos, pues,

$$\eta_1^2 > \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

y, en virtud de la tercera de las igualdades $(A)$, $\gamma^2 > 0$.

Observemos además que las expresiones de $P$, $Q$ y $R$ hacen ver que es $P > 0$, $Q < 0$, $R > 0$, y que de las dos primeras igualdades $(A)$ y de la desigualdad $\eta_1 > c$ resultan las desigualdades $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$, las cuales muestran que $\alpha$ y $\beta$ son reales.

Notemos, finalmente, que $x$, $y$ y $z$ no son reales para todos los valores de $r$. En efecto, de las igualdades $(A)$ resultan las siguientes:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (b^2 - a^2)\left(1 - \frac{c^2}{\eta_1^2}\right),$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = (c^2 - b^2)\left(1 - \frac{a^2}{\eta_1^2}\right),$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 = (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{b^2}{\eta_1^2}\right),$$

en las cuales se observa que es $\beta > \gamma > \alpha$ cuando $\eta_1 > b$, y $\beta > \alpha > \gamma$ cuando $\eta_1 < b$; de las expresiones de $x^2$, $y^2$ y $z^2$ se deduce también que $x$, $y$ y $z$ sólo son reales cuando es $r \leqq \beta$ y $r \geqq \gamma$, si $\eta_1 > b$; y cuando es $r \leqq \beta$ y $r \geqq \alpha$, si $\eta_1 < b$. De estas desigualdades se concluye que la expresión

$$T = (r^2 - \alpha^2)(r^2 - \beta^2)(r^2 - \gamma^2)$$

es negativa, resultado del que más adelante ha de hacerse uso.

De las fórmulas anteriores se deducen también las siguientes consecuencias, que tendremos necesidad de aplicar:

$$\eta_1^2 - \alpha^2 = \frac{(\eta_1^2 - b^2)(\eta_1^2 - c^2)}{\eta_1^2}, \quad \eta_1^2 - \beta^2 = \frac{(\eta_1^2 - c^2)(\eta_1^2 - a^2)}{\eta_1^2},$$

$$\eta_1^2 - \gamma^2 = \frac{(\eta_1^2 - c^2)(\eta_1^2 - b^2)}{\eta_1^2},$$

$$(C) \quad \Delta = \pm \eta_1^3 \sqrt{(\eta_1^2 - \alpha^2)(\eta_1^2 - \beta^2)(\eta_1^2 - \gamma^2)} = (\eta_1^2 - a^2)(\eta_1^2 - b^2)(\eta_1^2 - c^2),$$

donde se debe emplear el signo + cuando $r_1 < b$, y el signo — cuando $r_1 > b$.

725. Es fácil obtener la expresión de la diferencial de la longitud de los arcos de la pollodia. Tenemos, en efecto,

$$ds^2 = \left[\frac{P}{r^2 - \alpha^2} + \frac{Q}{r^2 - \beta^2} + \frac{R}{r^2 - \gamma^2}\right] r^2\, dr^2;$$

ó, eliminando $P$, $Q$ y $R$ por medio de las ecuaciones $(B)$,

$$ds^2 = [r^4 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, r^2 + Q\,(\beta^2 - \alpha^2)\,(\beta^2 - \gamma^2) + \alpha^2\,\beta^2 + \beta^2\,\gamma^2]\,\frac{r^2\,dr^2}{T}.$$

Puede darse otra forma á la expresión de $ds^2$, sustituyendo $Q$ por su valor en función de $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$, como ahora veremos.

Las ecuaciones $(A)$ dan

$$a^2 = \frac{r_1^2\,(\gamma^2 - b^2)}{r_1^2 - b^2}, \quad c^2 = \frac{r_1^2\,(\alpha^2 - b^2)}{r_1^2 - b^2},$$

$$b^2 = r_1^2 - \frac{r_1^3}{(r_1^2 - a^2)\,(r_1^2 - c^2)} \cdot \frac{(r_1^2 - a^2)\,(r_1^2 - b^2)\,(r_1^2 - c^2)}{r_1^3}$$

$$= r_1^2 - \frac{r_1}{r_1^2 - b^2} \cdot \frac{\Delta}{r_1^3}.$$

Sustituyendo ahora los valores de $a^2$, $b^2$ y $c^2$ en la expresión de $Q$, se obtiene en primer lugar

$$Q = \frac{b^4\,(r_1^2 - b^2)^2}{(b^4 - 2\,b^2\,r_1^2 + r_1^2\,\alpha^2)\,(b^4 - 2\,b^2\,r_1^2 + r_1^2\,\gamma^2)};$$

y después

$$Q = \frac{b^4\,(r_1^2 - \beta^2)}{r_1^2\,(\beta^2 - \gamma^2)\,(\beta^2 - \alpha^2)};$$

y, finalmente,

$$Q = \frac{2\,r_1^4 - r_1^2\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \alpha^2\,\gamma^2 - \dfrac{2\Delta}{r_1^2}}{(\beta^2 - \gamma^2)\,(\beta^2 - \alpha^2)}.$$

Poniendo ahora este valor de $Q$ en la expresión de $ds^2$, se llega al resultado que queríamos obtener:

$$ds^2 = \frac{r^2\,dr^2}{T}\left[r^4 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,r^2 - \eta^2\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right.$$

$$\left. + 2\,\eta^4 - \frac{2\Delta}{\eta^2} + \alpha^2\,\beta^2 + \alpha^2\,\gamma^2 + \beta^2\,\gamma^2\right],$$

que hace ver que $s$ depende de las integrales elípticas.

**726.** Pasemos á estudiar la herpollodia. Para eso refirámosla á coordenadas polares $\rho$ y $\varphi$, existentes en el plano de la curva, y tomemos para origen de estas coordenadas el pie de la perpendicular bajada del centro del elipsoide sobre este plano. El triángulo rectángulo formado por el radio vector de un punto de la curva, por la distancia de este punto al centro del elipsoide y por la perpendicular á que acabamos de referirnos, da

$$\rho^2 = r^2 - \eta^2.$$

Cuando tiene lugar el movimiento de rotación del elipsoide, la pollodia rueda sin resbalar sobre la herpollodia, las diferenciales de las longitudes de los arcos de las dos curvas son, por lo mismo, iguales, y tenemos, representando por $s$ la longitud de los arcos de la pollodia,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2 = \frac{r^2\,dr^2}{r^2-\eta^2} + \rho^2\,d\varphi^2;$$

ó, sustituyendo $ds^2$ por su valor hallado anteriormente,

$$\rho^2\,d\varphi^2 = -\frac{r^2\,dr^2}{T\,(r^2-\eta^2)}\left[\eta^2\,r^4 - 2\left(\eta^3 - \frac{\Delta}{\eta^3}\right)\eta\,r^2\right.$$

$$+ (\alpha^2\,\beta^2 + \alpha^2\,\gamma^2 + \beta^2\,\gamma^2)\,\eta^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,\eta^4 + 2\,\eta^6$$

$$\left. - 2\Delta - \alpha^2\,\beta^2\,\gamma^2\right].$$

Pero se tiene que

$$\left(r_1^3 - \frac{\Delta}{r_1^3}\right)^2 = r_1^6 - 2\Delta + (r_1^2 - \alpha^2)(r_1^2 - \beta^2)(r_1^2 - \gamma^2)$$

$$= (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)\, r_1^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, r_1^4 + 2\, r_1^6 - 2\Delta - \alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Luego

$$\rho^2\, d\varphi_1^2 = -\frac{r^2\, dr^2}{T(r^2 - r_1^2)}\left[r_1 r^2 - \left(r_1^3 - \frac{\Delta}{r_1^3}\right)\right]^2,$$

ó

$$(C) \qquad d\varphi_1 = \pm \frac{d\rho}{\rho\sqrt{-T}}\left(r_1\rho^2 + \frac{\Delta}{r_1^3}\right),$$

donde

$$T = (\rho^2 + r_1^2 - \alpha^2)(\rho^2 + r_1^2 - \beta^2)(\rho^2 + r_1^2 - \gamma^2).$$

Conviene notar que esta cantidad $T$ es, como ya hemos visto, negativa.

La ecuación que acabamos de obtener es la ecuación diferencial de la herpollodia y hace ver que la ecuación finita de esta curva depende de las *funciones elípticas*. Por eso su estudio ha sido hecho por algunos geómetras por medio de estas funciones, método que no exponemos por no alargar excesivamente este trabajo (*). El por nosotros empleado para estudiar la herpollodia está sacado del capítulo VI del tomo VII del *Traité de Mécanique générale*, *de* RESAL, y de un trabajo de BARBARIN publicado en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3.ª serie, t. IV, 1885).

**727.** Para hallar la forma de la curva representada por la ecuación diferencial $(C)$, debemos notar en primer lugar que la rama correspon-

---

(*) Para el estudio de la rotación de los sólidos por medio de las funciones elípticas, se pueden consultar las obras siguientes:

HERMITE: *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, París, 1885.

C. DE SPARRE: *Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe (Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. IX, 1885, p. 49).

HALPHEN: *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 43.

diente al signo inferior sólo difiere de la que corresponde al signo superior en la posición, razón por la cual sólo consideraremos la ecuación

$$d\varphi = -\frac{d\rho}{\rho\sqrt{-T}}\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right).$$

La igualdad $\rho^2 = r^2 - \eta^2$ pone de manifiesto que $\rho$ y $r$ pasan al mismo tiempo por sus valores máximos y mínimos; luego tenemos, atendiendo á lo que se dijo anteriormente respecto á los límites de $r$ (Núm. **724**),

$$\rho \gtrless \sqrt{\beta^2 - \eta^2},$$

y

$$\rho \gtrless \sqrt{\gamma^2 - \eta^2}, \text{ si } \eta > b; \quad \rho \gtrless \sqrt{\alpha^2 - \eta^2}, \text{ si } \eta < b.$$

*La curva está, pues, comprendida entre dos circunferencias, una exterior de radio igual á* $\sqrt{\beta^2 - \eta^2}$, *y otra interior de radio igual a* $\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}$ *ó á* $\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}$.

Representando por $V$ el ángulo que forma la tangente á la curva en el punto $A$ (fig. 176) con el radio vector $OA$, tenemos

$$\operatorname{tg} V = \rho\frac{d\varphi}{d\rho} = -\frac{\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}}{\sqrt{-T}};$$

y, poniendo $\rho = \sqrt{\beta^2 - \eta^2}$, $\operatorname{tang} V = -\infty$. Luego *la curva es tangente al círculo exterior en el punto A*. Del mismo modo se demuestra que *la curva es tangente al círculo interior en el punto en que la encuentra.*

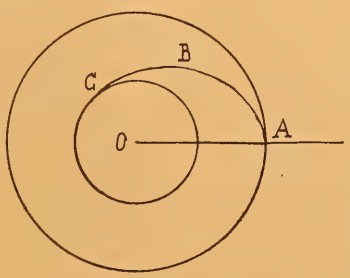


Figura 176.

**728.** Tomando para eje, á partir del cual se cuentan los ángulos $\varphi$, la recta $OA$, tenemos

$$\int_{\sqrt{\beta^2 - \eta^2}}^{\rho} \frac{1}{\rho\sqrt{-T}}\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right)d\rho.$$

En el caso de ser $r_1 < b$, la cantidad $\Delta$ es positiva; y, por lo tanto, también lo es la cantidad $r_1\rho^2 + \frac{\Delta}{r_1^3}$. En el caso de ser $r_1 > b$, $\Delta$ es negativa; pero dando á $\rho^2$ su valor mínimo $\gamma^2 - r_1^2$, vese que la cantidad $r_1\rho^2 + \frac{\Delta}{r_1^3}$ es positiva; en efecto, la desigualdad

$$r_1^2 (\gamma^2 - r_1^2)^2 > (r_1^2 - \alpha^2)(r_1^2 - \beta^2)(r_1^2 - \gamma^2)$$

da la siguiente:

$$1 > \frac{(r_1^2 - c^2)^2}{r_1^4},$$

ó

$$r_1^2 - c^2 < r_1^2,$$

la cual es verdadera. El binomio considerado $r_1\rho^2 + \frac{\Delta}{r_1^3}$ es, por lo tanto, siempre positivo cuando se da á $\rho^2$ su mínimo valor.

La igualdad (1) hace ver que $\varphi$ crece, cuando $\rho$ decrece desde $\sqrt{\beta^2 - r_1^2}$ hasta $\sqrt{\alpha^2 - r_1^2}$ ó $\sqrt{\gamma^2 - r_1^2}$. El arco considerado de la curva (arco $ABC$ de la figura) se aproxima cada vez más á la circunferencia interior á medida que $\varphi$ aumenta.

Los otros arcos de la herpollodia son iguales al anterior, y gozan de la misma propiedad de ser tangentes á las dos circunferencias consideradas.

**729.** Suponía POINSOT que su herpollodia tenía puntos de inflexión; pero HESS demostró, en un opúsculo intitulado *Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabeln Ebene (Munich,* 1880), la inexactitud de esta afirmación. La misma observación hizo después el CONDE DE SPARRE en los *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de París* (1884) y en la Memoria anteriormente citada. SPARRE se fundó, para demostrar este teorema, en la teoría de las funciones elípticas; emplearemos aquí, para el mismo fin, un método más elemental, seguido por RESAL (*l. c*).

La ecuación diferencial de la herpollodia da, ya sea $\varphi$ una cantidad positiva ó negativa,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho\sqrt{-1}}{\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}},$$

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{\rho T}{\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right)^2} + \frac{2\rho^3\eta T}{\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right)^3}$$

$$-\frac{\rho^3}{\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right)^2}[(\rho+\eta^2-\beta^2)(\rho^2+\eta^2-\gamma^2)$$

$$+(\rho^2+\eta^2-\alpha^2)(\rho^2+\eta^2-\gamma^2)+(\rho^2+\eta^2-\alpha^2)(\rho^2+\eta^2-\beta^2)].$$

Por medio de estas igualdades y de la fórmula

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} - 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho^2}$$

podemos calcular el radio de curvatura $R$ de la herpollodia. Su expresión, igualada sucesivamente á 0 y á $\infty$, da los puntos de retroceso y de inflexión de esta curva.

Haciendo, para ello,

$$N = \left[\rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} - 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho^2\right]\frac{\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right)^3}{\rho^2},$$

se tiene, en primer lugar,

$$R = \frac{\rho\left[\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right)^2 - T\right]^{\frac{3}{2}}}{N},$$

y

$$N = T\left(3\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right) - \left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right)^3$$

$$-\rho^2\left(\eta\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta^3}\right)[(\rho^2+\eta^2-\beta^2)(\rho^2+\eta^2-\gamma^2)+(\rho^2+\eta^2-\alpha^2)(\rho^2+\eta^2-\gamma^2)$$

$$+(\rho^2+\eta^2-\alpha^2)(\rho^2+\eta^2-\beta^2)],$$

y, ordenando según las potencias de $\rho$,

$$N = \left[ 2r_1^3 - r_1\alpha^2 - r_1\beta^2 - r_1\gamma^2 - \frac{2\Delta}{r_1^3} \right] \rho^6$$

$$+ \left\{ 2r_1 \left[ (r_1^2 - \alpha^2)(r_1^2 - \beta^2) + (r_1^2 - \alpha^2)(r_1^2 - \gamma^2) + (r_1^2 - \beta^2)(r_1^2 - \gamma^2) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{\Delta}{r_1^3} (6r_1^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) \right\} \rho^4,$$

ó, en virtud de las fórmulas $(A)$ y $(C)$,

$$N = \left[ a^2 b^2 (c^2 - r_1^2) + a^2 c^2 (b^2 - r_1^2) - b^2 c^2 r_1^2 \right] \frac{\rho^6}{r_1^3}$$

$$- \frac{\Delta}{r_1^5} (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \rho^4.$$

Por medio de la expresión de $R$, se puede ver ahora que los puntos de inflexión de la herpollodia deben satisfacer á la ecuación $N = 0$, la cual da

$$\rho^2 = \frac{(r_1^2 - a^2)(r_1^2 - b^2)(r_1^2 - c^2)(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)}{r_1^2 \left[ a^2 b^2 (c^2 - r_1^2) + a^2 c^2 (b^2 - r_1^2) - b^2 c^2 r_1^2 \right]}.$$

Si es $r_1 > b$, el segundo miembro de esta igualdad es positivo (puesto que además se verifica que $a > r_1$, $c < r_1$). Pero, como el mínimo valor que tiene $\rho^2$ es igual á $\gamma^2 - r_1^2$, y por tanto á

$$\frac{(a^2 - r_1^2)(r_1^2 - b^2)}{r_1^2},$$

debe ser

$$\frac{(a^2 - r_1^2)(r_1^2 - b^2)(r_1^2 - c^2)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2)}{r_1^2 \left[ a^2 b^2 (r_1^2 - c^2) + a^2 c^2 (r_1^2 - b^2) + b^2 c^2 r_1^2 \right]} > \frac{(a^2 - r_1^2)(r^2 - b^2}{r_1^2},$$

lo que da

$$c^2 < \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Luego el elipsoide no coincide con el elipsoide considerado por POINSOT.

Sea ahora $\eta_1 < b$. En este caso el numerador de la expresión de $\rho^2$ es positivo, y $\rho$ es imaginario, ó real, según que el denominador sea negativo ó positivo. Dase el último caso, cuando es

$$\eta_1^2 < \frac{2\,a^2\,b^2\,c^2}{a^2\,b^2 + a^2\,c^2 + b^2\,c^2}.$$

Pero como entonces el valor de $\rho^2$ debe ser inferior á su valor máximo $\beta^2 - \eta_1^2$, esto es, á

$$\frac{(a^2 - \eta_1^2)\,(\eta_1^2 - c^2)}{\eta_1^2},$$

tenemos la desigualdad

$$\frac{(a^2 - \eta_1^2)\,(b^2 - \eta_1^2)\,(\eta_1^2 - c^2)\,(a\,b^2 + a^2\,c^2 + b^2\,c^2)}{\eta_1^2\,[2\,a^2\,b^2\,c^2 - \eta_1^2\,(a^2\,b^2 + a^2\,c^2 + b^2\,c^2)]} < \frac{(a^2 - \eta_1^2)\,(\eta_1^2 - c^2)}{\eta_1^2},$$

ó

$$b^2 < \frac{a^2\,c^2}{a^2 + c^2},$$

lo que no puede ser, porque, por ser $\eta_1 > c$, tenemos

$$\eta_1^2 > \frac{a^2\,c^2}{a^2 + c^2},$$

y, por tanto, si aquella desigualdad tuviese lugar, tendríamos $\eta_1 > b$, lo que es contrario á la hipótesis. RESAL saca esta conclusión por otro procedimiento, que no nos parece exacto.

Demostremos ahora que la herpollodia no tiene puntos de retroceso. Para eso basta notar que el numerador de $R$ no puede ser nulo, ni el denominador infinito. En efecto, el factor

$$\left(\eta_1\rho^2 + \frac{\Delta}{\eta_1^2}\right)^2 - T$$

no puede ser nulo, puesto que $T$ es negativo (Núm. **724**).

730. La ecuación diferencial de la herpollodia es integrable cuando es $\eta_1 = b$, y resulta entonces una espiral que, por haber sido considerada por POINSOT, en la Memoria atrás citada, se llama *espiral de* POINSOT.

Si es $\eta_1 = b$, tenemos $\alpha = \gamma = \eta_1$ y, por tanto,

$$T = \rho^4 (\rho^2 + \eta_1^2 - \beta^2) = \rho^4 (\rho^2 - \rho_0^2),$$

poniendo

$$\rho_0 = \sqrt{\beta^2 - \eta_1^2}.$$

Luego

$$d\varphi = \frac{\eta_1 d\rho}{\rho \sqrt{\rho_0^2 - \rho^2}}.$$

Integrando, se obtiene

$$e^{\frac{2\rho_0 \varphi}{\eta_1}} = C \frac{\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} - \rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} + \rho_0},$$

ó

$$e^{\frac{\rho_0 \varphi}{\eta_1}} = - c \frac{\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} - \rho_0}{\rho}.$$

Tenemos también

$$e^{-\frac{\rho_0 \varphi}{\eta_1}} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\sqrt{\rho_0^2 - \rho^2} + \rho_0}{\rho}.$$

Luego

$$\frac{1}{c} e^{\frac{\rho_0 \varphi}{\eta_1}} + c e^{\frac{\rho_0 \varphi}{\eta_1}} = \frac{2\rho_0}{\rho},$$

ó, poniendo $c = e^{\frac{\rho_0 \varphi_0}{\eta_1}}$,

$$\rho = \frac{2\rho_0}{e^{\frac{\rho_0 (\varphi - \varphi_0)}{\eta_1}} + e^{-\frac{\rho_0 (\varphi - \varphi_0)}{\eta_1}}}.$$

Cambiando el eje á partir del cual se cuenta el ángulo $\varphi$, podemos aún escribir

$$\rho = \frac{2\rho_0}{e^{\frac{\rho_0\varphi}{\eta}} + e^{-\frac{\rho_0\varphi}{\eta}}}.$$

Es esta la ecuación de la *espiral de* POINSOT, la cual ya fué anteriormente estudiada (Núm. 447).

# NOTA A LOS NUMEROS 47 Y 186

El teorema estudiado en el Núm. 47 puede deducirse con mucha facilidad del demostrado en el Núm. 46 (que no es nuevo, como erróneamente afirmamos en dicho número, sino consecuencia de otro teorema conocido relativo á las curvas analagmáticas) y del demostrado en el Núm. 45.

En efecto, representando por $O$ el punto de intersección de las rectas que pasan por los dos puntos de contacto de los círculos bitangentes á la cúbica circular, por $(C)$ uno de estos círculos, por $A$ y $B$ sus puntos de contacto con aquella cúbica y por $(C')$ el círculo considerado en el Número 45, teniendo en cuenta que este círculo corta perpendicularmente al círculo $(C)$, y que su centro coincide con $O$, se advierte que las tangentes á $(C)$ tiradas por $O$ tienen sus puntos de contacto en las intersecciones de las circunferencias de $(C)$ y $(C')$. Luego tenemos, en virtud de un teorema de Geometría elemental bien conocido,

$$OA \times OB = R^2.$$

$R$ representa el radio de $(C')$ y, por lo tanto, la transformación por radios vectores recíprocos cambia entre sí los puntos $A$ y $B$ de la cúbica, la cual, por tal motivo, es *analagmática*.

De modo análogo se demuestra el teorema relativo á las cuárticas bicirculares, considerado en el Núm. 189, si se atiende á que la ecuación de la recta que une los dos puntos de contacto de cada una de las circunferencias estudiadas en el Núm. 185 con la cuártica es

$$y = -\frac{\alpha\beta x + \beta\gamma - C' + hB}{\beta^2 - A' - h},$$

ó sustituyendo $\gamma$ por su valor, dado en el referido Núm. 185,

$$(\beta^2 - A' - h)\left(y + \frac{C'}{A' + h}\right) + \alpha\beta\left(x + \frac{l}{A + h}\right),$$

y á que esta recta, por tanto, pasa por el centro del círculo considerado en el Núm. 186.

# NOTA AL NUMERO 48

Vamos á reproducir aquí una demostración del teorema utilizado en el Núm. 48, relativo al número de tangentes á una curva que se pueden trazar por un punto de ella, publicada en el t. VII, p. 138 de *L'Enseignement mathématique.*

Sea

$$f(x, y) = 0$$

la ecuación de la curva considerada, de grado $m$.

La ecuación de su primera polar, respecto al punto $(x_1, y_1)$, es, según se sabe, la siguiente:

$$\frac{df}{dx}(x - x_1) + \frac{df}{dy}(y - y_1) = 0,$$

siendo su grado $(m - 1)$.

También es sabido que estas curvas se cortan en los puntos de contacto de las tangentes á la primera, trazadas por el punto $(x_1, y_1)$.

Esto dicho, vamos á demostrar el siguiente lema:

*Si* $(x_1, y_1)$ *es un punto múltiple de orden* k *de la curva considerada, es también múltiple del mismo orden de su polar, siendo tangentes entre sí las* k *ramas de la curva y las* k *de la polar que pasan por aquél.*

Se puede considerar como comprendido en este enunciado el caso de un punto simple, que corresponde á la hipótesis $k = 1$.

Para demostrar el precedente lema, escribamos la ecuación de la curva del siguiente modo:

$$f(x_1 + x - x_1, \quad y_1 + y - y_1) = 0,$$

y desarrollemos su primer miembro según las potencias de $x - x_1$ é $y - y_1$, resultando

$$\frac{df}{dx_1}(x - x_1) + \frac{df}{dy_1}(y - y_1) + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2 f}{dx^2_1}(x - x_1)^2 + 2\frac{d^2 f}{dx_1 dy_1}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{d^2 f}{dy^2_1}(y - y_1)^2\right] + \ldots = 0.$$

La ecuación de la polar de esta curva puede escribirse del siguiente modo, ordenando su primer miembro por las potencias de $x - x_1$ é $y - y_1$,

$$\frac{df}{dx_1}(x - x_1) + \frac{df}{dy_1}(y - y_1) + \left[\frac{d^2 f}{dx^2_1}(x - x_1)^2 + 2\frac{d^2 f}{dx_1 dy_1}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{d^2 f}{dy^2_1}(y - y_1)^2\right] + \ldots = 0.$$

Esta ecuación nos dice, en primer lugar, que si $(x_1, y_1)$ es un punto simple de la curva considerada, la recta que tiene por ecuación

$$\frac{df}{dx_1}(x - x) + \frac{df}{dy_1}(y - y_1) = 0$$

es tangente á esta curva y á su polar.

Se ve asímismo que si $(x_1, y_1)$ es un punto doble de la curva cuyas cordenadas satisfacen á las ecuaciones $\frac{df}{dx} = 0$, $\frac{df}{dy} = 0$, las dos rectas representadas por las ecuaciones

$$\frac{d^2 f}{dx^2_1}(x - x_1)^2 + 2\frac{d^2 f}{dx_1 dy_1}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{d^2 f}{dy^2_1}(y - y_1)^2 = 0,$$

son tangentes en el punto $(x_1, y_1)$ á la curva y á su polar.

Continuando en la misma forma el razonamiento, se demuestra el lema precedente.

Basándonos en el anterior lema, vamos á determinar el número de tangentes que se pueden trazar á una curva dada por el punto $(x_1, y_1)$.

Supongamos primero que la curva tiene solamente un punto múltiple, que coincide con $(x_1, y_1)$, y que sea $k$ su orden.

La curva dada y su polar se cortan en $m(m-1)$ puntos, y uno de estos puntos coincide con $(x_1, y_1)$.

Ahora bien, siendo este punto del orden de multiplicidad $k$ en la curva y en la polar, representa $k^2$ intersecciones. Pero como las $k$ ramas de la curva son tangentes á las $k$ ramas de la polar, cada rama de aquélla tiene aún otro punto común con la polar. Por consiguiente, el número de intersecciones de la curva y de su polar, distintas de $(x_1, y_1)$, es igual á

$$m(m-1) - k(k+1).$$

Ahora bien, estos puntos coinciden con los puntos de contacto de las tan gentes á la curva, trazadas por $(x_1, y_1)$; resulta, por consiguiente, representando el número de estas tangentes por $t$,

$$t = m(m-1) - k(k+1).$$

(Salmon: *Higher plane Curves).*

Si $(x_1, y_1)$ es un punto simple, se verifica aún la fórmula anterior, suponiendo entonces $k = 1$.

Si la curva dada tiene $\delta$ puntos dobles y $v$ puntos de retroceso, distintos del $(x_1, y_1)$, el valor de $t$ se puede obtener con facilidad, empleando el método de que habitualmente se hace uso para demostrar aquella de las fórmulas de PLÜCKER que determina la clase de la curva, y el lema demostrado anteriormente. De este modo resulta

$$t = m(m-1) - 2\delta - 3v - k(k+1).$$

# NOTA AL NUMERO 96

Consideremos dos curvas $(C)$ y $(C')$, cuyas coordenadas $(x, y)$ y $(X, Y)$ están ligadas por las relaciones

$$x = \frac{aX + bY + c}{X + pY + q}, \quad y = \frac{a'X + b'Y + c'}{X + pY + q},$$

y vamos á demostrar que una de estas curvas es una perspectiva de la otra.

Para probarlo, observemos, ante todo, que los segundos miembros de las fórmulas anteriores pueden escribirse del modo siguiente:

$$x = \beta\left[\frac{X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\,\alpha + h}{X + pY + q} + x_0\right],$$

$$y = \beta\left[\frac{X\,\mathrm{sen}\,\alpha + Y\cos\alpha + k}{X + pY + q} + y_0\right],$$

determinándose $\alpha$, $\beta$, $h$, $k$, $x_0$ é $y_0$ por medio de las ecuaciones

(1) $$\beta(\cos\alpha + x_0) = a,$$

(2) $$\beta(px_0 - \mathrm{sen}\,\alpha) = b,$$

(3) $$\beta(qx_0 + h) = c,$$

(4) $$\beta(\mathrm{sen}\,\alpha + y_0) = a',$$

(5) $$\beta(py_0 + \cos\alpha) = b',$$

(6) $$\beta(qy_0 + k) = c'.$$

En efecto, las ecuaciones (1) y (2), unidas á las (4) y (5), dan las siguientes:

$$ap - b = \beta\,(p\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha), \tag{7}$$

$$a'\,p - b' = \beta\,(p\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha), \tag{8}$$

para determinar $\alpha$ y $\beta$. Por otra parte, la ecuación (1) determina á $x_0$, y las (3), (4), (6) dan respectivamente los valores de $h$, $y_0$ y $k$.

Ya probado esto, hagamos

$$h + X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha = X_1,$$

$$k + X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha = Y_1,$$

que equivale á un cambio de los ejes coordenados á que está referida la curva $(C')$. Se llega así á expresiones de la forma

$$x = \frac{X_1}{a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1} + x'_0, \quad y = \frac{Y_1}{a_1 X_1 + b_1 Y_1 + c_1} + y'_0;$$

y haciendo en primer lugar

$$a_1 = \lambda\cos\alpha_1, \quad b_1 = \lambda\operatorname{sen}\alpha, \quad c_1 = \lambda e,$$

y después

$$X_2 = X_1\cos\alpha_1 + Y_1\operatorname{sen}\alpha_1 + e,$$

$$Y_2 = Y_1\cos\alpha_1 - X_1\operatorname{sen}\alpha_1,$$

lo que también equivale á un cambio de los ejes á que está referida $(C')$; resulta

$$x = \frac{(X_2 - e)\cos\alpha_1 - Y_2\operatorname{sen}\alpha_1}{\lambda X_2} + x'_0,$$

$$y = \frac{Y_2\cos\alpha_1 + (X_2 - e)\operatorname{sen}\alpha_1}{\lambda X_2} + y'_0.$$

Cambiemos ahora los ejes á que está referida la curva $(C)$, haciendo

$$x = x'_0 + \frac{\cos\alpha_1}{\lambda} - x_2\cos\alpha_1 - y_2\,\mathrm{sen}\,\alpha_1,$$

$$y = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha_1}{\lambda} - x_2\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 + y_2\cos\alpha_1,$$

y resulta

$$(9) \qquad x_2 = \frac{e}{\lambda X_2}, \quad y_2 = \frac{Y_2}{\lambda X_2}.$$

Estas relaciones entre las coordenadas $(x_2, y_2)$ y $(X_2, Y_2)$ de las curvas $(C)$ y $(C')$ prueban, como vamos á ver, que son perspectivas.

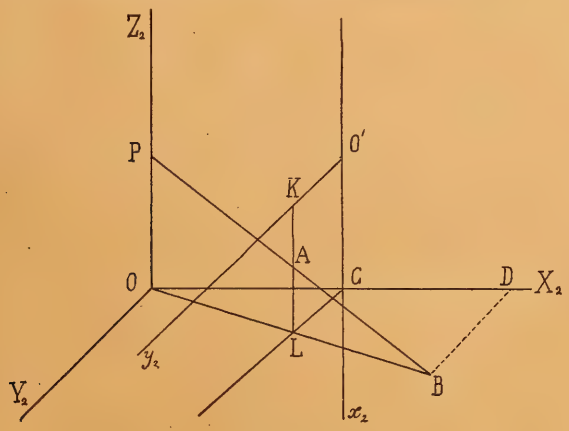



Figura 177.

Sea, en efecto, $P$ (fig. 177) el vértice del cono; $PAD$ una generatriz; $A$ y $B$ los puntos en que ésta corta al plano $x_2\,y_2$, paralelo á $Z_2\,Y_2$, y al plano $X_2\,Y_2$; y supongamos que $A$ es un punto de la curva $(C)$, situada en el plano $x_2\,y_2$, y $B$ uno de la curva $(C')$, colocada en el $X_2\,Y_2$.

Las coordenadas del punto $A$ respecto á los ejes rectangulares $O'x_2$ y

$O'y_2$, y tales que $O'C = OP$, son $AK$ y $LC$, y las coordenadas de $B$ relativamente á los ejes $OX_2$ y $OY_2$ son $BD$ y $OD$.

Pero se tiene

$$\frac{AL}{PO} = \frac{BL}{BO} = \frac{CD}{OD}, \quad \frac{BD}{LC} = \frac{OD}{OC};$$

y, por consiguiente, haciendo $OP = e$, $OC = \frac{1}{\lambda}$, resulta

$$\frac{e - x_2}{e} = \frac{X_2 - \lambda^{-1}}{X_2}, \quad \frac{Y_2}{y_2} = \lambda X_2.$$

Luego las coordenadas $(x_2, y_2)$ y $(X_2, Y_2)$ de los puntos $A$ y $B$ están ligadas por las relaciones (9).

# LISTA DE LAS CURVAS ESTUDIADAS EN ESTA OBRA


Alisoides, 334.
Analagmáticas de tercer orden (vid. cúbicas circulares).
Analagmáticas de cuarto orden (vid. cuárticas bicirculares).
Analagmáticas esféricas, 550.
Anguínea, 59-63, 73-74.
Astroide, 261-273, 441.
Atriftaloide, 285-293.
Besace, 195-200.
Bicornio, 236-240.
Bifolium, 223-231.
Caracol de Pascal, 142-153, 464.
Cardioide, 154-157.
Cartesianas, 176.
Cartesianas esféricas, 554.
Cassínicas, 109-118.
Cassínicas esféricas, 554.
Catenaria, 329-334.
Catenaria de igual resistencia, 340-342.
Catenaria elíptica, 471.
Catenaria hiperbólica, 471.
Cíclicas, 550-556.
Cicloide, 421-427.
Cicloides dilatadas y contraídas, 428-432.
Círculo alabeado, 569-572.
Cisoide de Diocles, 1-7, 15, 16, 49-50, 71-72.
Cisoide oblicua, 7-12.
Cisoides, 12-13.
Clélias, 531-533.

Clotoide, 397-403.
Cocleoide, 394-397.
Compañera de la cicloide, 426.
Concoide de Nicomedes, 185-194.
Concoide parabólica de Descartes, 66-67.
Concoide de Sluse, 13-16.
Concoides focales de las cónicas, 242-253.
Cruciforme, 200-212.
Cuadratriz de Dinóstrato, 350-354.
Cuárticas bicirculares, 172-184.
Cuárticas piriformes, 215-218, 480.
Cúbica de Agnesi, 68-74.
Cúbica mixta, 77-79.
Cúbicas alabeadas, 588.
Cúbicas de Chasles, 94-98.
Cúbicas circulares, 35-52.
Cubo-cicloide, 267.
Cucumeide, 18.
Curva de Arquitas, 582-585.
Curva de Jarabek, 251.
Curva de larga inflexión, 256-261.
Curva de las secantes, 347.
Curva de las tangentes, 346-347.
Curva de las tangentes iguales, 334-338.
Curva del diablo, 218-219.
Curva de los senos, 343-350.
Curva de los senos versos, 427.
Curva de Rolle, 74-76.
Curva de Talbot, 293-297.
Curva de Viviani, 524-528.
Curva de Watt, 256-261.
Curva elástica, 354-359
Curva equipotencial, 313-318.
Curva isócrona paracéntrica, 360-365.
Curva gamma, 347.

Curva K, 240-242.
Curvas aplanéticas (vid Ovalos de Descartes) 158.
Curvas de Bertrand, 588-592.
Curvas de inflexión proporcional, 509.
Curvas de Lamé, 494-501.
Curvas del perro, 502-507.
Curvas de perseguimiento, 502-507.
Curvas de Ribaucour, 516-520.
Curvas ciclo-cilíndricas, 528.
Curvas paralelas á la astróide, 267-273.
Curvas paralelas á la elipse, 297-313.
Curvas triangulares simétricas, 500-501.
Elipse de Cassini (vid. cassínicas).
Elipse esférica, 542-549, 555-556.
Elipse logarítmica, 572-576.
Epicicloides, 438-441.
Epicicloides contraídas y dilatadas, 462-465.
Epicicloides esféricas, 536-542.
Espiral de Arquímedes, 363-367.
Espiral de Fermat, 371-374.
Espiral de Galileo, 367-371.
Espiral de Poinsot, 386-390, 604-605.
Espiral de Pappo, 521-524.
Espiral hiperbólica, 377-380.
Espiral logarítmica, 383-386.
Espiral parabólica, 374-377.
Espiral tractriz, 390-393.
Espiral sinusoide, 507-516.
Escarabajo, 279-285.
Espigas, 488-492.
Espíricas, 109.
Espíricas de Perseo, 100-109.
Estrofoide, 16-30, 49.
Estoroides, 494.
Evoluta de la elipse, 273-277.

Evoluta de la hipérbola, 277-278.
Evolvente del círculo, 458-462.
Flor de jazmín, 53.
Focal con nodo (vid. estrofoide), 18.
Focal de Quetelet (vid. estrofoide), 18.
Folium de Descartes, 53-58, 72-73.
Folium duplex, 223-231.
Folium parabólico, 80-82.
Folium simplex, 220-223.
Folium triplex, 232-236.
Galand, 53.
Hélice cilíndrica, 556-564.
Hléice cilindro-cónica, 566-569.
Hélice conica, 564-566.
Herpollodia de Poinsot, 593-603.
Hipérbolas, 416-419.
Hipérbola logarítmica, 576-579.
Hipercicloides, 474.
Hipocicloides, 438-441.
Hipocicloides contraídas y dilatadas, 462-465.
Hipocicloides de tres retrocesos ó tricuspidales, 442-457.
Hipocicloides de Steiner, 442-457.
Hipocicloides triangulares, 442-457.
Hipopeda de Eudosio, 529-530.
Horóptera, 585-588.
Kampila, 584.
Kohlenspitsencurva (vid. puntiforme).
Kreuzcurva (vid. cruciforme).
Lemníscata de Bernoulli, 130-141.
Lemníscata de Gerono, 198.
Lemníscatas elipticas é hiperbólicas, 118-130.
Lemníscatas esféricas-529-530.
Lintearia, 354-359.
Lituus, 380-382.
Logarítmica, 325-329.

Logocíclica, 18.
Loxodromia, 533-536.
Nudos, 492-494.
Ocho, 198.
Ovalos de Cassini, 109-118.
Ovalos de Descartes, 157 171.
Ovoide, 220-223.
Parábolas, 410-413.
Parábolas divergentes, 82-94.
Parábola de Descartes, 66 67.
Parábola de Neil, 413 415.
Parábola de Wallis, 415-416.
Parábola cúbica, 415-416.
Parábola logarítmica, 579 582.
Parábola semicúbica, 88, 413-415.
Parábola virtualis, 195-200.
Paracicloides, 474.
Pteroide, 18.
Perlas de Sluse, 476-480.
Pollodia, 593-605.
Pseudo-catenaria, 403-406.
Pseudocicloide, 471-475.
Pseudotractriz, 406-409.
Pseudotrocoide, 475.
Pseudoversiera, 71-74.
Puntiforme, 212-215.
Ruleta de Delaunay, 466-471.
Rosáceas, 481-488.
Serpentina, 59.
Sintractriz, 338-340.
Sinusoide, 343-350.
Secantoide, 347.
Tangentoide, 346-347.
Tetracúspide de Bellavitis, 279.
Toroides, 297-313.

Tractriz, 334-338.
Tridente, 63-66.
Trifolium, 232-236.
Trisectriz de Maclaurin, 31-35, 56.
Trocoide, 421.
Versiera, 68-74.
Visiera, 71.
Visoria, 327-329.

# LISTA DE LOS AUTORES CITADOS


## A

Abel, pág. 140.
Agnesi, págs. 18, 68.
Allegret, pág. 512.
Amstein, pág. 266.
Apolonio, pág.
Arquitas, pág. 582, 585.
Aristóteles, pág. 529.
Arquímedes, págs. 2, 363, 366, 583.
Aubry, 18, 68, 71, 198, 246, 485, 488, 492.

## B

Balitrand, págs. 10, 11, 12, 27, 205.
Barbarin, pág. 267, 589.
Barbier, pág. 510.
Barisien, pág. 465.
Barrow, págs. 68, 240.
Bassani, págs. 507, 511, 513, 516.
Bellavitis, pág. 279.
Beltrami, pág. 337.
Benthen, pág. 394.
Bernoulli (Jacobo), págs. 130, 266, 329, 358, 360, 361, 362, 374, 383, 384, 394, 427, 524, 536.
Bernalli (Juan), págs. 53, 55, 58, 192, 329, 351, 377, 422, 427, 433, 437, 439, 440.
Bertrand, 561, 588, 591.
Binet, 359.
Birpal, pág. 266.
Bonnet (O.), 215, 592.
Booth, pág. 18, 21, 22, 118, 119, 126, 128, 129, 201, 547, 549, 572, 576, 579.
Bouguer, pág. 502.
Bouquet, 572.
Bragelongue, 254.
Brassine, pág. 266.
Brill, pág. 255, 322, 323.
Briot, pág. 218.
Brocard, págs. 158, 215, 220. 224, 232, 236, 237, 443, 454, 457.

## C

Calippo, pág. 529.
Cantor (M), pág. 68, 99, 191, 343, 363.
Caporali, pág. 322.
Carcavi, pág. 422.
Cardan, pág. 441.

Casali, pág. 18, 27.
Casey, págs. 175, 181, 184.
Cassini, 109-118.
Castillon, pág. 254.
Castizo, pág. 226.
Catalan, pág. 257, 300, 394.
Cauchy, pág. 299, 300, 307.
Cayley, 97, 99, 255, 549.
Cesàro, pág. 111, 334, 342, 394, 396, 397, 401, 403, 406, 460, 471, 512, 520, 569, 592.
Chasles, pág. 67, 85, 94, 95, 96, 97, 98, 100, 161, 170, 171, 321, 323, 343, 549, 563, 564.
Clairaut, pág. 83, 334.
Clebesch, pág. 94, 99, 320, 323.
Clifford, pág. 257.
Conon, pág. 363.
Conte (A.), pág. 67.
Cornu, págs. 397, 400.
Cotes, 319, 380.
Cramer, págs. 99, 195, 196, 226, 254, 257, 313, 317, 319, 322.
Cremona, págs. 321, 323, 443, 447, 451, 452, 549.
Cusa, pág. 421.

## D

Darboux, págs. 109, 118, 175, 176, 550, 556, 592.
D' Alembert, pág. 266.
De Champs (Breton), págs. 298, 299, 308.
De Gua, pág. 89.
Delaunay, págs. 466, 469, 470.
Delens, pág. 448.
Descartes, págs. 53, 55, 66, 67, 72, 73, 74, 89, 157, 158, 191, 383, 410, 421, 422, 423, 428, 429, 430, 435, 463.
Desgranges, pág. 266.
Dewulf, pág. 251.
Dieu, pág. 432.
Dighy, pág. 419.
Dinóstrato, págs. 350, 351, 353.
Diocles págs. 35, 71.
Durége pág. 99.
Durero (Alb.), pág. 433.

## E

Elgé, pág. 76.
Erostatene, pág. 584.
Eudosio, pág. 529, 584.
Euler, págs. 99, 130, 254, 319, 254, 359, 427, 433, 439, 442, 465, 474.
Euret, pág. 495.
Eutocio, págs. 2, 191, 397, 583.

## F

Fagnano, págs. 130, 137, 140, 152, 345, 346, 487.
Falkenburg, pág. 394.
Fermat, págs. 2, 5, 53, 68, 191,

351, 367, 371, 373, 410, 418, 419, 421, 422, 426.
Fouret, págs. 351, 465.
Fresnel, pág. 400.
Frenet, págs. 561, 562, 570.
Fuss, pág. 549.

## G

Galdeano, págs. 106, 296.
Galileo, pág. 367.
Garlin, pág. 118.
Geminus, pág. 563.
Gentry, pág. 254.
Gerbaldi, pág. 322.
Ghinasi, pág. 324.
Gilbert, pág. 495.
Godefroy, págs. 347, 495.
Goupillière (Haton de La), páginas 266, 390, 393, 461, 507, 511, 516.
Grandi (Guido), págs. 324, 481, 483, 485, 486, 525, 531, 532.
Gregory (James), págs. 68, 324.
Guccia, pág. 322.
Gudermann, págs. 547, 549.
Guenochi, pág. 169.
Güntter, págs 19, 536.

## H

Hachette, pág. 257.
Halley, pág. 535,
Halphen, pág. 94, 598.
Hart, págs. 45, 181.
Haughton, pág. 285.
Helmohtz, pág. 585.
Hermann, pág. 536.
Hermite, pág. 359, 598.
Herón, pág. 100.
Herschel, pág. 158.
Hess, 600.
Hesse (O.) págs. 254, 322.
Heuraet, pág. 414.
Hippias, pág. 351.
Höuel, pág. 118.
Huygens, págs. 2, 5, 6, 14, 15, 53, 71, 191, 195, 324, 329, 331, 334, 414, 422, 423, 424, 426, 427, 428.

## J

Jamblique, pág. 397.
Jamet, pág. 500.
Jarabek, págs. 250, 251.
Joacchimthal, pág. 271.

## K

Kepler, pág. 109.
Kiepert, pág. 140.
Klein, pág. 322.

## L

Lacolonge, pág. 257.
Lacroix, pág. 218.

La Gournerie, pág. 109, 175, 500.
Lagrange, pág. 427.
Laguerre, pág. 118, 180, 445, 550, 556.
La Hire, págs. 157, 433.
La Loubère, pág. 528.
Laquière, pág. 393, 509.
Lamé, 494.
Laurent, págs. 218, 280, 449, 571.
Legendre, págs. 24, 33, 34, 293.
L'Hôpital, págs. 53, 58, 524.
Lehmus, pág 18.
Leibnitz, págs. 71, 130, 329, 334, 343, 360, 414, 421, 433, 524, 536.
Lemoine, pág. 267.
Le Paige, pág. 476.
Leotaud, págs. 351, 352.
Leroy, pág. 494.
Libri, pág. 367.
Liguine, pág. 158.
Lima, pág. 31.
Lindlöf, págs. 333, 470.
Liouville, pág. 140.
Lobatschefsky, pág. 337.
Longchamps, págs. 9, 31, 52, 65, 71, 77, 78, 80, 81, 216, 217, 220, 221, 285, 443, 453, 454, 457.
Loria (Gino), págs. 14, 18, 33, 34, 71, 99, 363, 367, 549, 584.
Loriga, pág. 337.
Ludwig, pág. 585.
Lucas, pág. 510.

## M

Maclaurin, págs. 31, 35, 51, 53, 56, 72, 73, 89, 99, 254, 319, 512.
Magnus, pág. 549.
Malfatti, pág. 118.
Mannhein, pág. 460.
Marie (G.), pág. 198.
Massan, pág. 6.
Maupertuis, pág. 502, 536.
Menelao, págs. 170, 525.
Merlieux, pág. 271.
Mersenne, págs. 53, 367, 371, 383, 410, 421, 428.
Meusnier, pág. 333.
Mister, pág. 215.
Möbius, pág. 97, 588.
Moivre, pág. 18.
Montucci, págs. 18, 267.
Montucla, pág. 67, 100, 363, 414, 530,
Moutard, págs. 167, 175.

## N

Neil, pág. 413.
Neuberg, págs. 209, 251, 394.
Newton, págs. 2, 59, 63, 82, 85, 95, 97, 98, 99, 169, 191, 253, 254, 319, 433, 440.
Nicolás, pág. 324.
Nicole, págs. 83, 99, 319, 464.
Nicomedes, págs. 66, 185, 191.
Nizze, pág. 363.

Nöether, págs. 322, 323.
Nuñez (Pedro), pág. 535.

## O

Offenburgus, págs. 536, 542.

## P

Pagani, pág. 109.
Painvin, págs. 280, 443, 446, 451, 550.
Pappo, págs. 2, 191, 351, 353, 363, 397, 521, 522, 525, 563, 566.
Pascal (B.), pág. 367, 421, 422, 426, 428, 464, 476, 478, 566.
Pascal (E.), págs. 142, 143, 147.
Péano, pág. 71.
Peirce, pág. 68.
Perseo, págs. 100, 109.
Pesenas, pág. 31.
Peyrard, pág. 363.
Pigeon, pág. 267.
Pirondini, págs. 402, 462, 483, 536, 569.
Pitot, pág. 343.
Pittarelli, pág. 149.
Plücker, págs. 304, 320.
Poinsot, pág. 386, 593, 600, 604.
Poisson, págs. 359, 401.
Poncelet, págs. 321, 550.
Proclo, págs. 2, 100, 191, 351, 397, 563, 566.
Prony, pág. 257.
Puiseux, pág. 563.

## Q

Quetelet, pags. 18, 27, 171.

## R

Ramsay, pág. 340.
Resal, págs. 598, 600, 603.
Retalli, pág. 211.
Ribaucour, pág. 516.
Ricci, pág. 324.
Riemann, págs. 320, 321.
Roberts (S.), págs. 184, 257.
Roberts (W.), pág. 515.
Roberval, págs. 18, 53, 142, 143, 147, 158, 191, 343, 351, 367, 422, 425, 426, 428.
Roche, pág. 293.
Roemer, pág. 433.
Rolle, pág. 74, 76.
Rouquel, págs. 390, 393.

## S

Saavedra, pág. 327.
Saint-Laurent, pág. 502.
Saint-Vincent, pág. 195.
Salmon, págs. 42, 45, 83, 99, 169, 181, 255, 271, 323, 415, 588, 611.
Saussure, pág. 474.

Schiapparelli, pág. 529.
Scott (Carlota), pág. 238.
Schoute, págs. 31, 132, 134, 136, 200, 201, 207, 208, 212, 214.
Schoote, pág. 191.
Schoter, pág. 443.
Schoubert, pág. 549.
Schur, pág. 585.
Segre, pág. 322.
Serret (J. A.), págs. 113, 118, 123, 561, 591.
Serret (P.), pág. 566.
Simplicius, pág. 397.
Sluse, págs. 26, 13, 15, 71, 195, 476, 477, 480.
Sparre, pág. 598, 600.
Snellius, pág. 535.
Staudt, pág. 322.
Steiner, págs. 254, 322, 442, 443, 451, 442.
Stevin, pág. 535.
Stirling, págs. 98, 319.
Sturm, pág. 171.
Stuvayert, págs. 585, 587.
Sylvester, pág. 338.

## T

Talbot, págs. 293, 296.
Tannery (P.), págs. 55, 143, 363, 367, 397, 525, 563, 585.
Terquem, pág. 201.
Tissot, pág. 566.
Todhunter, págs. 333, 354.
Tolomeo, pág. 584.
Torricelli, pág. 18, 324.
Torroja, pág. 550, 588.
Townsend, pág. 285.

## V

Valdés, pág. 27.
Verdus, pág. 18.
Vincent, pág. 257.
Viviani, págs. 524, 525, 526, 532.
Vogt, pág. 549.

## W

Wallis, pág. 2, 5, 192, 215, 410, 414, 415, 418, 419, 421, 427, 480.
Wantzel, pág. 359.
Watt, pág. 256.
Weierstrass, págs. 79, 93, 94, 371, 382, 390, 417.
Weyer, pág. 377.
Weyr (Em.), 132, 134, 135, 207.
Wölffing, pág. 475.
Wren, págs. 422, 424.

## Z

Zahradnik, pág. 13.
Zeuthen, pág. 254, 255, 322, 366.

# ÍNDICE


Páginas

INTRODUCCIÓN ..... v
CAPÍTULO PRIMERO.—*Cúbicas notables* ..... 1
I La cisoide ..... 1
II La concoide de Sluse ..... 13
III La estrofoide ..... 16
IV La trisectriz de Maclaurin ..... 31
V Las cúbicas circulares ..... 35
CAPITULO SEGUNDO.—*Cúbicas notables* (continuación) ..... 53
I El folium de Descartes ..... 53
II La anguínea de Newton ..... 59
III El tridente de Newton ..... 63
IV La concoide parabólica de Descartes ..... 66
V La cúbica de Agnesi ..... 68
VI La curva de Rolle ..... 74
VII La cúbica mixta ..... 77
VIII El folium parabólico ..... 80
IX Las parábolas divergentes ..... 82
X Las cúbicas de Chasles ..... 94
XI Conclusión.—Sucinta noticia bibliográfica sobre las cúbicas en general ..... 98
CAPÍTULO TERCERO.—*Cuárticas notables* ..... 100
I Las espíricas de Perseo ..... 100
II Las cassínicas ..... 109
III Las lemniscatas ..... 118
IV La lemniscata de Bernoulli ..... 130
CAPITULO CUARTO.—*Cuárticas notables* (continuación) ..... 142
I El caracol de Pascal ..... 142
II La cardioide ..... 154
III Los óvalos de Descartes ..... 157
IV Las cuárticas bicirculares ..... 172
CAPÍTULO QUINTO.—*Cuárticas notables* (continuación) ..... 182
I La concoide de Nicomedes ..... 182
II La parábola virtualis ..... 195

Páginas

III La cruciforme ..... 200
IV La puntiforme ..... 212
V La cuártica piriforme ..... 215
VI La curva del Diablo ..... 218
VII El folium simplex ú ovoide ..... 220
VIII El folium duplex ó bifolium ..... 223
IX El folium triplex ó trifolium ..... 232
X Bicornio ..... 236
XI La curva K ..... 240
XII Concoides focales de las cónicas ..... 242
XIII Breve noticia del origen y descubrimiento de la teoría de las cuárticas ..... 253
CAPÍTULO SEXTO.—*Séxticas y bicuárticas más notables* ..... 256
I La curva de Watt ..... 256
II La astroide ..... 261
III Las curvas paralelas á la astroide ..... 267
IV Las evolutas de la elipse y de la hipérbola ..... 273
V El escarabajo ..... 279
VI La atriftaloide ..... 285
VII La curva de Talbot ..... 293
VIII Las toroides ..... 297
IX La curva equipotencial ..... 313
X Nota final complementaria referente á la historia de las curvas algébricas ..... 319
CAPÍTULO SÉPTIMO.—*Curvas transcendentes notables* ..... 324
I La logarítmica ..... 324
II La catenaria ..... 329
III La tractriz de Leibnitz ..... 334
IV La sintractriz de Sylvester ..... 338
V La catenaria de igual resistencia ..... 340
VI La curva de los senos ..... 343
VII Cuadratriz de Dinóstrato ..... 350
VIII Curva elástica, ó lintearia ..... 354
IX Curva isócrona paracéntrica ..... 360
CAPÍTULO OCTAVO.—*Las espirales* ..... 363
I Espiral de Arquímedes ..... 363
II Espiral de Galileo ..... 367
III Espiral de Fermat ..... 371
IV Espiral parabólica ..... 374

Páginas

V Espiral hiperbólica ..... 377
VI Lituus ..... 380
VII Espiral logarítmica ..... 383
VIII Espiral de Poinsot ..... 386
IX Espiral tractriz ..... 390
X La cocleoide ..... 394
XI La clotoide ..... 397
XII La pseudocatenaria ..... 403
XIII La pseudotractriz ..... 406
CAPÍTULO NOVENO.—*Parábolas é hipérbolas* ..... 410
I De las parábolas en general ..... 410
II La parábola semicúbica ..... 413
III La parábola cúbica ..... 415
IV De las hipérbolas en general ..... 416
CAPÍTULO DÉCIMO.—*Curvas cicloidales* ..... 420
I La cicloide ordinaria ..... 420
II Cicloides contraídas y dilatadas ..... 428
III Epicicloides é hipocicloides ..... 433
IV Hipocicloide de tres retrocesos ..... 412
V Evolvente del círculo ..... 458
VI Epicicloides é hipocicloides contraídas y dilatadas ..... 462
VII Ruleta de Delaunay ..... 466
VIII Pseudocicloides ..... 471
CAPÍTULO UNDÉCIMO.—*Varias clases de curvas* ..... 476
I Perlas de Sluse ..... 476
II Rosáceas de G. Grandi ..... 481
III Espigas ..... 488
IV Nudos ..... 492
V Curvas de Lamé ..... 494
VI Curvas de perseguimiento ..... 502
VII Espirales sinusoides ..... 507
VIII Curvas de Ribaucour ..... 516
CAPÍTULO DÉCIMOSEGUNDO.—*Curvas de doble curvatura* ..... 521
I Espiral de Pappo ..... 521
II Curva de Viviani ..... 524
III Hipopeda de Eudosio ó lemniscata esférica ..... 529
IV Clelias ..... 531
V Loxodromia ..... 533
VI Epicicloides esféricas ..... 536

Páginas

VII Elipse esférica ..... 542
VIII Cíclicas ..... 550
CAPÍTULO DÉCIMOTERCERO.—*Curvas de doble curvatura* (continuación) ..... 557
I Hélice cilíndrica ..... 557
II Hélice cónica ..... 564
III Hélice cilindro-cónica ..... 566
IV Círculo alabeado ..... 569
V Elipse logarítmica ..... 572
VI Hipérbola logarítmica ..... 576
VII Parábola logarítmica ..... 579
VIII Curva de Arquitas ..... 582
IX Horóptera ..... 585
X Curvas de Bertrand ..... 588
CAPÍTULO DÉCIMOCUARTO.—*Pollodia y herpollodia* ..... 593
Nota á los núms. 47 y 186 ..... 607
Nota al núm. 48 ..... 609
Nota al núm. 96 ..... 613
Lista de las curvas estudiadas en esta obra ..... 617
Lista de los autores citados ..... 623

# ERRATAS

| Página. | Línea | Dice. | Debe decir. |
|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 10 Febrero | 4 Marzo |
| 8 | 20 | asíntota de una rama de la curva y corta á la otra rama | asíntota de la curva y la corta... |
| 13 | 13 | la corta | corta la cónica |
| 12 | 16 | la curva | la cónica |
| 40 | | | Sustituir, en todo el cálculo del núm. 47, $2h$ por $h$, y $2C'$ por $C'$ |
| 72 | 12 | MACLAURIN | NEWTON |
| 73 | 11 | MACLAURIN | NEWTON |
| 182 | | | Sustituir, en todo el cálculo, $2C$ por $C$, y $2C'$ por $C'$. |
| 371 | 8 | $\frac{a^2}{b^2}$ | $4\frac{a^2}{b^2}$ |